

## Практичне заняття № 2.4

### КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1. Коло.
2. Еліпс.
3. Гіпербола.
4. Парабола.
5. Криві другого порядку в полярній системі координат.

#### 1. Коло.

Коло – це геометричне місце точок, рівновіддалених від точки  $M_0$  – центра кола.

1)  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$  – рівняння кола, де  $M_0(x_0, y_0)$  – центр кола,  $R$  – радіус.

2)  $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$  – параметричні рівняння кола радіуса  $R$  з центром в початку координат.

3)  $\rho = R$  – полярне рівняння кола радіуса  $R$  з центром в полюсі.

**Задача 1.** Встановити, яка лінія визначається рівнянням  $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$  та переписати його в канонічному і в параметричному вигляді.

*Розв'язання:*

Це рівняння визначає лінію II порядку. Перепишемо його у канонічній формі. Виділимо повні квадрати:

$$x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + y^2 - 4 - 5 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 9.$$

Це коло з центром в точці  $A(2; 0)$  і радіусом  $R = 3$ .

Запишемо параметричні рівняння даного кола:  $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$

*Відповідь:* коло,  $(x - 2)^2 + y^2 = 9$ ,  $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$

**Задача 2.** Встановити, яка лінія визначається рівнянням  $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$ .

*Відповідь:* коло,  $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 4$ .

**Задача 3.** Записати рiвняння кола з центром в точцi  $A(2;-1)$  i рiдiусом 7.

*Вiдповiдь:*  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 49$ .

**Задача 4.** Знайти рiвняння кола, що торкається осi  $Ox$  в початку координат i перетинає вiсь  $Oy$  в точцi  $A(0;10)$ .

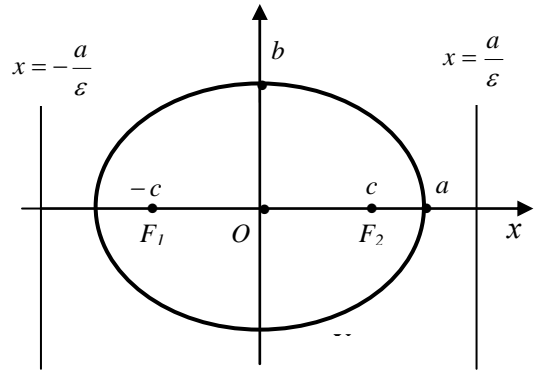
*Вiдповiдь:*  $x^2 + (y - 5)^2 = 25$ .

**Задача 5.** Знайти рiвняння кола, що проходить через точку  $A(0;0)$  з центром на прямiй  $y = x$  (в I чвертi) i рiдiусом 3.

*Вiдповiдь:*  $(x - 3/\sqrt{2})^2 + (y - 3/\sqrt{2})^2 = 4$ .

### 1. Еліпс.

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума вiдстаней вiд яких до двох фiксованих точок площини, що називаються фокусами, є величина стала, яка дорiвнює  $2a$  i бiльше вiдстанi мiж фокусами  $2c$ .



1)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  – канонiчне рiвняння еліпса,  
 $a, b$  – велика i мала пiввiсi;

$c^2 = a^2 - b^2$ ,  $c$  – фокусна вiдстань;

$\varepsilon = \frac{c}{a}$  – ексцентриситет,  $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$  – рiвняння директрис.

2)  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$  – параметричнi рiвняння еліпса.

Зауваження: Рiвняння  $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$  визначає еліпс з центром в  $M(x_0; y_0)$ .

**Задача 6.** Записати канонiчне рiвняння еліпса, якщо його велика пiввiсь дорiвнює 6, а ексцентриситет дорiвнює 0,5. Визначити координати фокусiв.

*Розв'язання:*

За умовою  $a = 6$  i  $\varepsilon = 0,5$ . Використаємо формулу  $\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 3$ .

Отже, координати фокусiв  $F_1(3; 0)$  i  $F_2(-3; 0)$ .

Знайдемо піввісь  $b$ :  $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow b = \sqrt{27}$ .

Канонічне рівняння еліпса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ .

Відповідь:  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ .

**Задача 7.** Встановити, яка лінія визначається рівнянням  $2x^2 + 8x + 3y^2 - 18y + 29 = 0$ .

Відповідь: еліпс з центром в точці  $A(-2;3)$  і півосями  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = \sqrt{2}$ .

**Задача 8.** Скласти канонічне і параметричні рівняння еліпса, якщо його мала піввісь дорівнює 4, а відстань між фокусами дорівнює 10.

Відповідь:  $\frac{x^2}{41} + \frac{y^2}{16} = 1$ ,  $\begin{cases} x = \sqrt{41} \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ .

**Задача 9.** Задано рівняння еліпса  $9x^2 + 5y^2 = 45$ . Визначити координати його фокусів та ексцентриситет.

Відповідь:  $F_1(0;2)$ ,  $F_2(0;-2)$ ,  $\varepsilon = \frac{2}{3}$ .

## 2. Гіпербола.

Гіперболою називається геометричне місце точок, модуль різниці відстаней від яких до двох фіксованих точок, що називаються фокусами, є величина стала, дорівнює  $2a$  і менше відстані між фокусами  $2c$ .

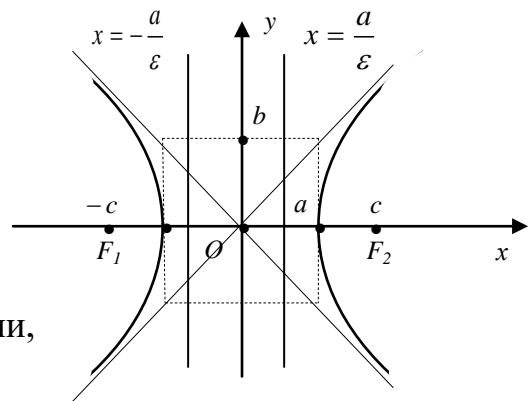
1)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  – канонічне рівняння гіперболи,  $a, b$  – дійсна і уявна піввісі;

$c^2 = a^2 + b^2$ ,  $c$  – фокусна відстань;  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  – ексцентриситет;

$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$  – рівняння директрис;  $y = \pm \frac{b}{a}x$  – рівняння асимптот гіперболи.

2)  $\begin{cases} x = 0,5a(t + 1/t) \\ y = 0,5b(t - 1/t) \end{cases} \quad (-\infty \leq t \leq +\infty)$  – параметричні рівняння гіперболи.

Зауваження:  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$  – гіпербола з центром в точці  $C(x_0; y_0)$ .



**Задача 10.** Визначити тип лiнii  $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ .

*Вiдповiдь:* гiпербола.

**Задача 11.** Скласти рiвняння гiперболи, якщо її уявна пiввiсь дорiвнює 4, а один з фокусiв має координати  $F(-11;0)$ .

*Вiдповiдь:*  $\frac{x^2}{105} - \frac{y^2}{16} = 1$ .

**Задача 12.** Скласти канонiчне рiвняння гiперболи, велика вiсь якої дорiвнює 8, а рiвняння асимптот  $y = \pm 0,75x$ .

*Вiдповiдь:*  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

**Задача 13.** Знайти кут мiж асимптотами гiперболи, якщо її ексцентриситет дорiвнює двом.

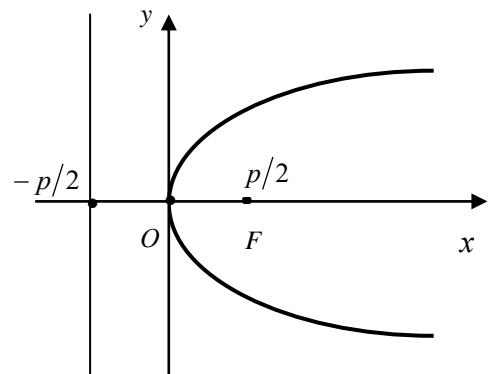
*Вiдповiдь:*  $120^\circ$ .

**Задача 14.** Скласти рiвняння кола, що проходить крiзь праву вершину гiперболи  $3x^2 - 25y^2 = 75$  з центром в точцi  $A(-5;-2)$ .

*Вiдповiдь:*  $(x + 5)^2 + (y + 2)^2 = 104$ .

### 3. Парабола.

Параболою називається геометричне мiсце точок, якi знаходяться на однаковiй вiдстанi вiд фiксованої точки, що називається фокусом, i вiд заданої прямої, що називається директрисою i не проходить через фокус.



1)  $y^2 = 2px$  – канонiчне рiвняння параболи,  $p$  – параметр параболи;

$c = \frac{p}{2}$ ,  $c$  – фокусна вiдстань,  $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ ;  $x = -\frac{p}{2}$  – рiвняння директриси;  $\varepsilon = 0$

2)  $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases} \quad (-\infty \leq t \leq +\infty)$  – параметричнi рiвняння параболи.

Зауваження 1. Рівняння  $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$  визначає параболу з центром в точці  $C(x_0; y_0)$ .

Зауваження 2. Рівняння  $x^2 = 2py$  визначає параболу, симетричну відносно осі  $Oy$ .

**Задача 15.** Скласти канонічне і параметричне рівняння параболи, якщо координати її фокуса  $F(4;0)$ .

*Відповідь:*  $y^2 = 16x$ .

**Задача 16.** Скласти рівняння параболи, якщо рівняння її директриси  $x = 13$ .

*Відповідь:*  $y^2 = -52x$ .

**Задача 17.** Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі  $Oy$ , з центром в точці  $M(1;2)$  і параметром 3.

*Відповідь:*  $(x - 1)^2 = 6(y - 2)$ .

## 5. Криві другого порядку в полярній системі координат.

Введемо полярну систему координат так, щоб її полюс збігався з фокусом кривої, а полярна вісь була перпендикулярною до директриси і напрямлена в бік, протилежний від неї.

Тоді рівняння кривої в полярній системі координат має вигляд

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi},$$

де  $p$  – половина довжини хорди, що проходить через фокус паралельно директрисі,  $\varepsilon$  – ексцентриситет кривої.

При  $\varepsilon < 1$  – рівняння визначає еліпс, при  $\varepsilon > 1$  – праву гілку гіперболи, а при  $\varepsilon = 1$  – параболу.

Для еліпса і гіперболи параметр  $p = \frac{b^2}{a}$ , для параболи  $p$  – параметр параболи.

**Задача 18.** Переписати в полярній системі координат рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

*Розв'язання:*

З рівняння отримуємо, що піввісі еліпса дорівнюють  $a = 5$  і  $b = 4$ .

Знайдемо фокусну відстань:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3.$$

Тоді ексцентриситет дорівнює  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} < 1$ .

Тепер знайдемо параметр полярного рівняння  $p = \frac{b^2}{a} = \frac{16}{5}$ .

Полярне рівняння еліпса матиме вигляд:

$$\rho = \frac{16/5}{1 - 3 \cos \varphi / 5} \Rightarrow \rho = \frac{16}{5 - 3 \cos \varphi}.$$

Відповідь:  $\rho = \frac{16}{5 - 3 \cos \varphi}$ .

**Задача 19.** З'ясувати, які лінії визначено наступними полярними рівняннями:

$$1) \rho = \frac{6}{1 - 0,5 \cos \varphi}; \quad 2) \rho = \frac{4}{1 - \cos \varphi}; \quad 3) \rho = \frac{10}{1 - 1,5 \cos \varphi}; \quad 4) \rho = \frac{1}{3 - 3 \cos \varphi}.$$

Відповідь: 1) еліпс; 2) парабола; 3) гілка гіперболи; 4) парабола.

**Задача 20.** Записати полярне рівняння кривої:

$$1) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1; \quad 2) y^2 = 6x.$$

Відповідь: 1)  $\rho = \pm \frac{9}{4 - 5 \cos \varphi}$  – гіпербола; 2)  $\rho = \frac{3}{1 - \cos \varphi}$  – парабола.

**Задача 21.** Встановити, яку лінію визначає рівняння і знайти її піввісі:

$$1) \rho = \frac{144}{13 - 5 \cos \varphi}; \quad 2) \rho = \frac{18}{4 - 5 \cos \varphi}.$$

Відповідь: 1) еліпс,  $a = 13$ ,  $b = 12$ ; 2) гілка гіперболи,  $a = 8$ ,  $b = 6$ .

**Домашнє завдання**

**Задача 1.** Визначити тип лінії  $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 65 = 0$ .

**Задача 2.** Визначити тип лінії  $x^2 - 4x - 8y + 28 = 0$ .

**Задача 3.** Скласти канонічне і параметричні рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі  $Oy$  і відстань між ними дорівнює 6, а велика вісь дорівнює 10.

**Задача 4.** Скласти рівняння кола, що проходить крізь початок координат, з центром у правому фокусі гіперболи  $9x^2 - 4y^2 = 36$ .

**Задача 5.** Записати рівняння гіперболи з вершинами у фокусах, а фокусами – у вершинах еліпса  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

**Задача 6.** Скласти рівняння параболи, якщо рівняння її директриси  $y = -3$ .

**Задача 7.** Меридіан земної кулі має форму еліпса з відношенням осей  $299/300$ . Визначити ексцентриситет земного меридіана.

**Задача 8.** Записати рівняння еліпса, що проходить крізь точки  $M(2;0)$  і  $N(1;3)$ . Знайти його ексцентриситет.

**Задача 9.** З'ясувати, які лінії визначено наступними полярними рівняннями:

$$1) \rho = \frac{1}{1 - 0,2 \cos \varphi}; \quad 2) \rho = \frac{5}{2 - \cos \varphi}; \quad 3) \rho = \frac{12}{3 - 4 \cos \varphi}; \quad 4) \rho = \frac{1}{1 - \cos \varphi}.$$

**Задача 10.** Записати полярне рівняння кривої:

$$1) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad 2) y^2 = 8x.$$