Практичне заняття № 2.3

ПЛОЩИНА І ПРЯМА У ПРОСТОРІ

1. **Рівняння площини у просторі.**
2. **Рівняння прямої у просторі.**
3. **Взаємне розташування прямих і площин у просторі.**

1. Рівняння площини у просторі.

1) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – рівняння площини, що проходить через точку $M(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=\{A,B,C\}$;

2) $Ax+By+Cz+D=0$ – загальне рівняння площини, $\overline{N}=\{A,B,C\}$ – нормальний вектор;

3) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ – рівняння площини у відрізках, де a,b,c – відрізки, що їх відтинає площина на осях Ox,Oy,Oz відповідно;

4) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ або $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$ – рівняння площини,

що проходить через три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$.

Задача 1. Записати загальне рівняння площини, що проходить через точку $M(9;-1;3)$ паралельно до площини $x+4y+5z+1=0$ та знайти точки її перетину з координатними осями.

Розв'язання:

Якщо шукана площина паралельна до площини $x+4y+5z+1=0$, то вектор $\overline{N}=\{1;4;5\}$ є нормальним вектором для обох площин.

Рівняння площини, що проходить через задану точку з заданим нормальним вектором має вигляд (1):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

За умовою задачі $A=1;\ B=4;\ C=5;\ x_0=9;\ y_0=-1;\ z_0=3$.

Отже шукане рівняння площини має вигляд:

$$1(x-9)+4(y+1)+5(z-3)=0.$$

Перепишемо його в загальному вигляді (2) :

$$x+4y+5z-20=0.$$

Тепер запишемо рівняння у відрізках (3):

$$x+4y+5z-20=0 \quad \Rightarrow \quad x+4y+5z=20 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{20}+\frac{y}{5}+\frac{z}{4}=1.$$

Отже точки перетину площини з координатними осями такі:
$A(20;0;0)$, $B(0;5;0)$, $C(0;0;4)$.

Відповідь: $x+4y+5z-20=0$; $A(20;0;0)$, $B(0;5;0)$, $C(0;0;4)$.

Задача 2. Записати загальне рівняння площини, що проходить через точку $M(2;2;-2)$ паралельно до площини $x-2y-3z+1=0$.

Відповідь: $x-2y-3z-4=0$.

Задача 3. Знайти точки перетину площини $2x-y+3z-6=0$ з осями координат.

Відповідь: $A(3;0;0)$, $B(0;-6;0)$, $C(0;0;2)$.

Задача 4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(3;-2;0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=\{1;2;-5\}$.

Відповідь: $x+2y-5z+1=0$.

Задача 5. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(0;0;-1)$, $B(1;0;-4)$ та $C(1;1;-2)$.

Відповідь: $3x-2y+z+1=0$.

Задача 6. Знайти точку перетину площин $x-y+z-6=0$, $2x+2y-z+1=0$ і $x+2y-z+3=0$.

Відповідь: $A(2;-1;3)$.

2. Рівняння прямої у просторі.

1) $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ – канонічне рівняння, $\overline{l}=\{l;m;n\}$ – напрямний вектор;

2) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$;

3) $\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$ – параметричні рівняння прямої;

4) $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ – пряма як перетин двох площин.

Задача 7. Записати канонічне рівняння прямої перетину площин $2x+3y-z+1=0$ та $4x-y+z+3=0$.

Розв'язання:

Для канонічного рівняння прямої у просторі нам необхідно знати координати однієї її точки та напрямного вектора $\overline{l}=\{l;m;n\}$.
Знайдемо координати однієї точки прямої (спільної точки площин):

$$\begin{cases} 2x+3y-z+1=0 \\ 4x-y+z+3=0 \end{cases}.$$

Одну з координат можна вибрати довільно. Наприклад, $x=0$.

Тоді маємо: $\begin{cases} 3y-z+1=0 \\ -y+z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_0=0;\ y_0=-2;\ z_0=-5.$

Напрямний вектор $\overline{l}=\{l;m;n\}$ спільної прямої площин є перпендикулярним до обох нормальних векторів $\overline{N}_1=\{2;3;-1\}$, $\overline{N}_2=\{4;-1;1\}$, отже в якості напрямного вектора можна взяти їх векторний добуток:

$$\overline{l}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\overline{i}-6\overline{j}-14\overline{k} \quad \Rightarrow \quad \overline{l}=\{2;-6;-14\}.$$

Тоді рівняння шуканої прямої матиме вигляд: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z+5}{-14}$.

Відповідь: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z+5}{-14}$.

Задача 8. Знайти точку перетину прямої $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}$ та площини $3x-2y-z-1=0$.

Вказівка: Записати рівняння прямої в параметричному вигляді.

Відповідь: $A(2;4;-3)$.

3. Взаємне розташування прямих і площин у просторі.

Кут між прямими у просторі: $\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$;

Кут між площинами у просторі: $\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$;

Умова паралельності: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ або $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$;

Умова перпендикулярності: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ або $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$;

Кут між прямою та площиною: $\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$.

Задача 9. Чи належить пряма $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+3}{5}$ площині $3x+y-z-4=0$?

Розв'язання:

Пряма буде паралельною до площини, якщо її напрямний вектор $\bar{l}=\{2;-1;5\}$ буде перпендикулярним до нормалі площини $\overline{N}=\{3;1;-1\}$:

$$\bar{l}\cdot\overline{N}=2\cdot3-1\cdot1+5\cdot(-1)=0 \quad\Rightarrow\quad \bar{l}\perp\overline{N}.$$

Перевіримо, чи належить єдина відома нам точка прямої $M_0(1;-2;-3)$ площині. Для цього підставимо її координати у рівняння площини $3x+y-z-4=0$ і отримаємо $3\cdot1-2+3-4=0 \quad\Rightarrow\quad 0\equiv0$.

Пряма паралельна площині і має спільну точку, тому вона належить площині.

Відповідь: так, пряма належить площині.

Задача 10. Знайти відстань від точки $M(1;1;1)$ до площини $x+2y+2z-8=0$.

Відповідь: 1.

Задача 11. Знайти кут між площинами $2x+3y-4z-8=0$ і $x-2y-z+1=0$.

Відповідь: $\varphi=\pi/2$.

Задача 12. Знайти площину, що проходить через точку $M(1;2;3)$ и прямую $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{-1}$.

Відповідь: $2x-5y+z+11=0$.

Задача 13. Записати загальне рівняння площини, що проходить через точку $A(1;1;-1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$.

Відповідь: $2x+3y+z-4=0$.

Домашнє завдання

Задача 1. Записати рівняння у відрізках площини, що проходить через точку $M(1;-1;1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=\{2;-1;3\}$.

Задача 2. Знайти точки перетину площини $x-5y+2z+20=0$ з осями координат.

Задача 3. Знайти площину, що проходить через точки $A(1;2;0)$, $B(1;-1;2)$ і $C(3;0;-1)$.

Задача 4. Чи є паралельними площини $x+2y+2z-5=0$ і $x+2y+2z-8=0$? Знайти відстань між ними.

Задача 5. Знайти пряму перетину площин $x-y+2z-1=0$ і $2x+y-z+3=0$.

Задача 6. Записати рівняння прямої у просторі, що проходить через точку $A(1;2;-3)$ паралельно векторному добутку векторов $\bar{a}=\{2;-1;0\}$ і $\bar{b}=\{4;1;-1\}$.

Задача 7. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ і площини $2x+y+z-6=0$.

Задача 8. Чи належить пряма $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{4}$ площині $2x+y-z+3=0$?

Задача 9. Знайти кут між прямою $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{-2}$ і площиною $x+y+z+10=0$.