Практичне заняття № 4.7

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВА ЇЇ ГРАФІКА

Схема дослідження функції та побудова її графіка:

1. Знайти область визначень та область значень функції, де вона неперервна; знайти точки розриву функції та односторонні границі функції у цих точках.
2. Перевірити парність, непарність, періодичність функції.
3. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат *Ox* (y=0) і *Oy* (x=0).
4. Побудувати інтервали знакосталості функції; в область визначення функції вносимо точки, одержані при розв'язанні рівняння y=0.
5. Дослідити функцію на екстремуми:
   а) знайти критичні точки;
   б) побудувати інтервали монотонності;
   в) знайти координати точок максимуму і мінімуму функції.
6. Дослідити функцію на опуклість і вгнутість:
   а) знайти критичні точки другого роду;
   б) побудувати інтервали опуклості та вгнутості;
   в) знайти координати точок перегину.
7. Визначити вертикальні та похилі асимптоти графіка функції.
8. Побудувати графік. У разі потреби обчислити додаткові точки графіка.

Задача 1. За даним графіком (рис.1) записати властивості функції: $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

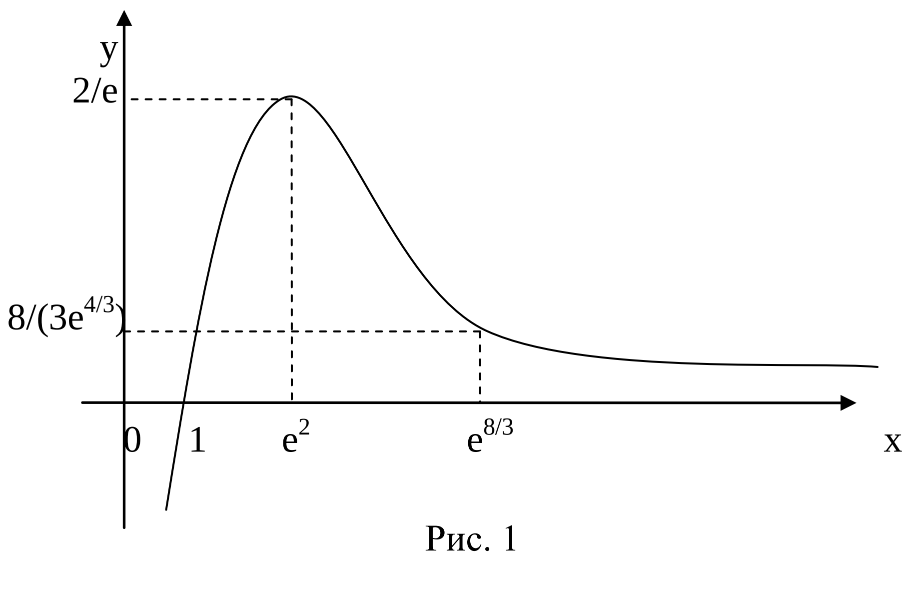


Рис. 1

Розв'язання:

1. $D(y)=(0;\infty)$; $E(y)=R$.
2. $y(-x)\neq y(x)$, $y(-x)\neq -y(x)$ - функція ні парна ні непарна.
   $y(x+T)\neq y(x)$ для будь-яких $T\neq 0$ - функція неперіодична.
3. (0,1) – точка перетину з віссю Ox.
4. $(0;1)$ - функція лежить нижче осі *Ox*; $(1;\infty)$ - функція лежить вище осі *Ox*.
   $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$ точка максимуму.
5. $(-\infty;-3)\cup(-1;\infty)$ - функція зростає; $(-3;-1)$ - функція спадає.
   $\left(-3,-\frac{27}{8}\right)$ - точка максимуму.
6. $\left(0; e^{\frac{8}{3}}\right)$- функція опукла; $\left(e^{\frac{8}{3}};\infty\right)$ функція вгнута; $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{8}{3e^{\frac{4}{3}}}\right)$ точка перегину.
7. $x=0$ - вертикальна асимптота; $y=0$ - горизонтальна асимптота.

Задача 2. За заданими графіками записати властивості функцій:

1) $y=3\sqrt[3]{x}-x$ (рис. 2), 2) $y=\frac{3-2x}{(x-2)^2}$ (рис. 3), 3) $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$ (рис. 4).

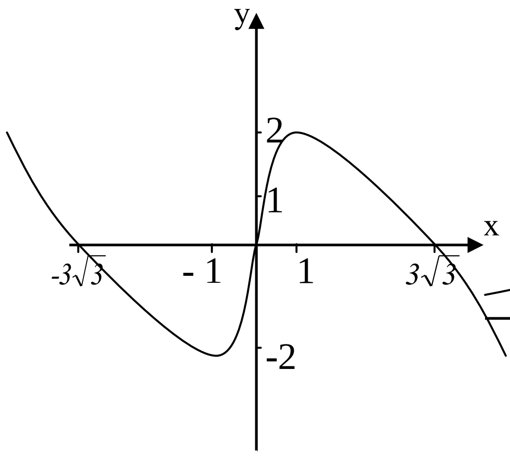


Рис. 2

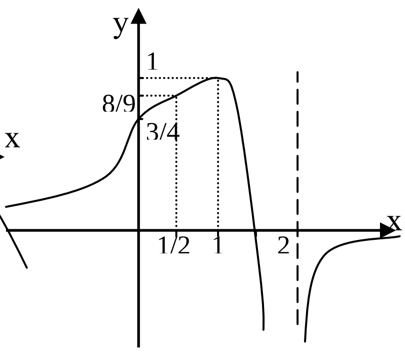


Рис. 3

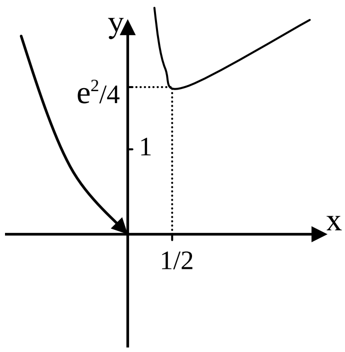


Рис. 4

Задача 3. Дослідити функцію $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 2}$ і побудувати її графік .

Розв'язання:

1. Знайдемо область визначень та область значень функції: $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$, оскільки $x\text{-}2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$;
   $E(y) = R$.

Знайдемо точки розриву та дослідимо їх.
Функція не існує тільки в точці $x = 2$, отже існує тільки одна точка розриву. Маємо

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2-0} \frac{(x\text{-}3)(x + 2)}{x - 2} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2+0} \frac{(x\text{-}3)(x + 2)}{x - 2} = -\infty;$$

Отже $x = 2$ є точка розриву другого роду.
Дослідимо поведінку функції при $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} = -\infty; \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2} = +\infty.$$

2. Перевіримо функцію на парність та непарність:

$y(\text{-}x) = \dfrac{(\text{-}x)^2 - (\text{-}x) - 6}{(\text{-}x) - 2} = \dfrac{x^2 + x - 6}{-x - 2}$. Як бачимо, умова парності $y(\text{-}x) \neq y(x)$ та умова непарності $y(\text{-}x) \neq \text{-}y(x)$ не виконуються. Отже функція ні парна, ні непарна.
Функція не є періодичною.

3. Знайдемо точки перетину з осями координат.
   Нехай $x = 0$, тоді $y = 3$, точка перетину з віссю *Oy (0, 3)*.
   Нехай $y = 0$, тоді $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 2} = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = \text{-}2$, точка перетину з віссю Ох (3, 0), (-2, 0).

4. Побудуємо інтервали знакосталості функції.
При $x \in (-\infty; -3)$ - функція $f(x) < 0$, при $x \in (-3; 2) \cup (2; \infty)$ - функція $f(x) > 0$.

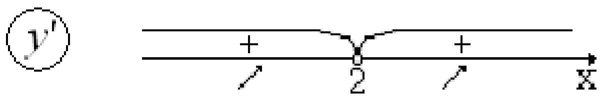
5. Дослідити функцію на екстремуми.
Знайдемо критичні точки:

$$y' = \frac{(2x-1)(x-2)-\left(x^2-x-6\right)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x+8}{(x-2)^2} \Rightarrow \frac{2x^2-4x+8}{(x-2)^2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2x^4 - 4x + 8 = 0 \ \Rightarrow x^4 - 2x + 4 = 0 \ \Rightarrow \ D = 16 - 32 = -16 < 0.$$

Рівняння не має дійсних коренів.

Точка x=2 не належить області визначення. Інтервали знакосталості першої похідної показано на схемі:

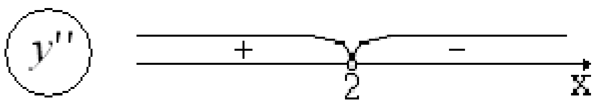


Отже, функція точок максимуму та мінімуму не має.

6. Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції, точки перегину:

$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2\left(x^2-4x+8\right)(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{-8}{(x-2)^3} \Rightarrow \quad \frac{-8}{(x-2)^3} \neq 0,$$

$x \neq 2$. Як видно функція не має точок перегину. Визначимо інтервали опуклості та вгнутості. Інтервали знакосталості другої похідної показано на схемі:



Отже на інтервалі (-∞; 2) – функція вгнута; на інтервалі (2; ∞) – опукла;

7. Знайдемо асимптоти графіка функції. З пункту 1 випливає, що x = 2 є вертикальна асимптота.

Похилу асимптоту будемо шукати у вигляді: $y = kx + b$. Маємо

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-x-6}{(x-2)x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{x^2-x-6}{(x-2)} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-x-6-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-6}{x-2} = 1.$$

Отже рівняння асимптоти має вигляд: $y = x + 1$.

8. Побудуємо графік функції (рис.5).

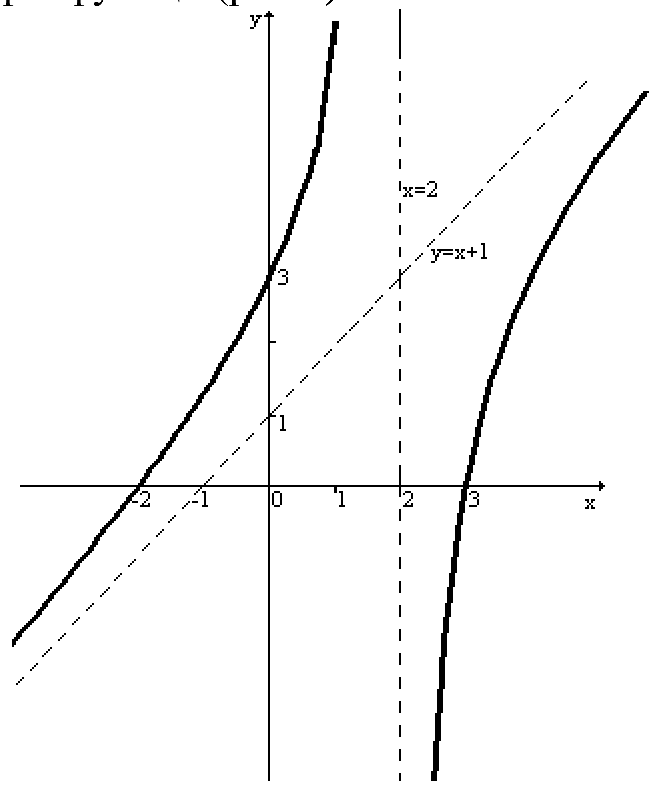


Рис. 5

Задача 4. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1) $y = \frac{(x^2-4)^2}{16}$; 2) $y = \frac{x^2}{2(x-1)}$; 3) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$; 4) $y = \frac{5x}{x^2-4}$;

5) $y = \ln(x^2 + 2x)$; 6) $y = x - e^{\frac{1}{x-1}}$; 7) $y = \frac{1}{x}\ln x$.

Домашнє завдання

Задача 1. Дослідити функцію і побудувати її графік:

1) $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$; 2) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$; 3) $y = \frac{x^2-4}{x^2+4}$; 4) $y = \frac{x^2}{2} + \ln x$;

5) $y = x - \cos x$; 6) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.