Практичне заняття № 4.6

ОПУКЛІСТЬ І ВГНУТІСТЬ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ АСИМПТОТИ

1. **Опуклість і вгнутість кривої. Точки перегину.**
2. **Асимптоти графіка функції.**

1. Опуклість та вгнутість кривої. Точки перегину.

Крива $y = f(x)$ називається <u>опуклою</u> (<u>вгнутою</u>) на інтервалі $(a,\ b)$, якщо при $a < x < b$ дуга кривої міститься нижче (вище) дотичної, яка проведена до будь-якої точки інтервалу $(a,\ b)$ (рис. 1, 2)

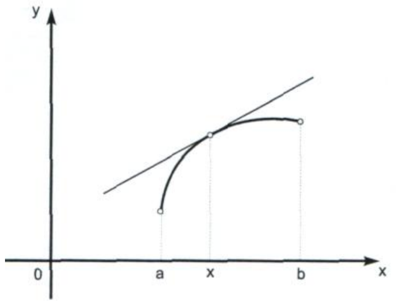

Рис. 1

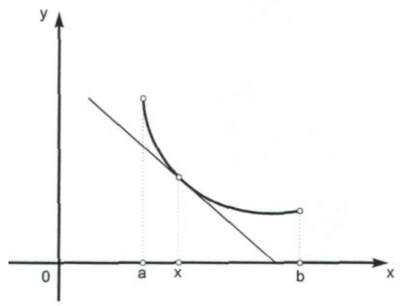

Рис. 2

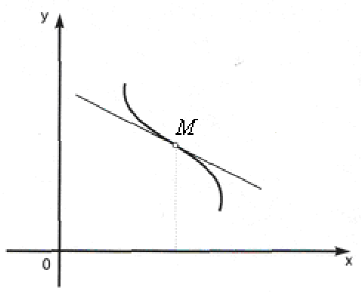

Рис. 3

<u>Необхідні та достатні умови вгнутості (опуклості)</u> функції $f(x)$ в інтервалі $(a,\ b)$

1) функція $f(x)$ двічі диференційована в інтервалі $(a,\ b)$;

2) $f''(x) > 0$ $\quad (f''(x) < 0)$ у всіх інтервалу $(a,\ b)$.

Точки, які відокремлюють опуклу частину неперервної кривої від вгнутої, називаються <u>точками перегину</u> кривої (рис. 3)

Правило відшукання точок перегину:

1) знайти область визначення функції $f(x)$;

2) знайти $f''(x)$;

3) знайти точки в яких $f''(x) = 0$ або $f''(x)$ не існує;

4) розділити область визначення отриманими точками на інтервали;

5) в кожному з отриманих інтервалів визначити знак похідної;

6) на інтервалі, де $f''(x) > 0$, функція $f(x)$ вгнута, а де $f''(x) < 0$, функція $f(x)$ - опукла; точки, що належать області визначення і при переході через які з ліва на право, відбувається зміна знаку другої похідної, будуть точками перегину кривої.

Задача 1. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину графіка функції: 1) $y = 2x^3 - x^4 + 36x^2 - 100$.

Розв'язання: Знайдемо першу похідну для функції: $y' = 6x^2 - 4x^3 + 72x$.

Знайдемо другу похідну та значення *x*, при яких друга похідна дорівнює нулю:

$$y'' = 12x\text{-}12x^2 + 72 = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x\text{-}12x^2 + 72 = 0 \quad \Rightarrow \quad 12(x\text{-}x^2 + 6) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2; \quad x_2 = 3$$

Перевіримо, чи змінює друга похідна знак при переході через отримані аргументи x_1, x_2.

Розглянемо інтервали:

$x \in (-\infty; -2)$ нехай $x = -3$ тоді

$y''(-3) = 12 \cdot (-3) - 12 \cdot (-3)^2 + 72 = -36 < 0$;

$x \in (-2; 3)$ нехай $x = 0$ тоді $y''(0) = 12 \cdot (0) - 12 \cdot (0)^2 + 72 = 72 > 0$;

$x \in (3; \infty)$ нехай $x = 4$ тоді $y''(4) = 12 \cdot (4) - 12 \cdot (4)^2 + 72 = -72 < 0$.

На інтервалах $x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$ графік опуклий, на інтервалі $x \in (-2; 3)$ графік вгнутий.

Дві точки перегину A (- 2 ; 12) ; B (3 ; 197) .

Відповідь: $x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$ графік опуклий, $x \in (-2; 3)$ графік вгнутий, точки перегину $A(-2; 12); B(3; 197)$.

2) $y = \ln(4 + x^2)$.

Розв'язання: $D(y) = (-\infty; \infty)$, оскільки $4 + x^2 > 0$ для будь-якого x.

Знайдемо другу похідну та значення *x*, в яких друга похідна дорівнює нулю.

$$y' = \frac{1}{4 + x^2} \cdot 2x \; ; \; \Rightarrow y'' = \frac{2(4 + x^2)\text{-}2x \cdot 2x}{(4 + x^2)^2} \; ; \quad 4 + x^2 \neq 0 \; ;$$

$$y'' = 0 \; , \quad 8 + 2x^2 - 4x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 8 - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\, 2.$$

Маємо дві точки $x_1 = 2,\ \ x_2 = -2$. Перевіримо, чи змінює друга похідна знак при переході через отримані точки:

$x \in (-\infty; -2)$ нехай $x = -3$ тоді $y''(-3) = \dfrac{8-2(-3)^{\,2}}{\left(4+(-3)^2\right)^2} = \dfrac{-10}{559} < 0$;

$x \in (-2; 2)$ нехай $x = 0$ тоді $y''(0) = \dfrac{8-2\cdot 0^{\,2}}{\left(4+0^2\right)^2} = \dfrac{8}{16} > 0$;

$x \in (2; \infty)$ нехай $x = 3$ тоді $y''(3) = \dfrac{8-2(3)^{\,2}}{\left(4+(3)^2\right)^2} = \dfrac{-10}{559} < 0$.

На інтервалах $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ графік опуклий, на інтервалі $x \in (-2; 2)$ графік вгнутий.

Дві точки перегину $A(-2; \ln 8)$; $B(2; \ln 8)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ графік опуклий, $x \in (-2; 2)$ графік вгнутий, точки перегину $A(-2; \ln 8)$; $B(2; \ln 8)$.

Задача 2. При якому значенні a точка $A(1;\ 0)$ є точкою перегину лінії $y = ax^4 - 8x^3 + 6x^2 - x$? Чи існують інші точки перегину, при заданому значенні a ?

Розв'язання: Якщо точка $A(1;\ 0)$ є точкою перегину лінії, то друга похідна при x =1 дорівнює нулю. Знайдемо другу похідну:

$y' = 4ax^3 - 24x^2 + 12x - 1$; $y'' = 12ax^2 - 48x + 12$.

Маємо якщо $x = 1$ то $y'' = 0$ або $0 = 12a - 48 + 12 \;\Rightarrow\; a = 3$

Отже рівняння лінії буде мати вигляд: $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - x$. Перевіримо чи існують інші точки перегину. Для цього підставимо отримане значення в другу похідну та знайдемо всі корені рівняння $y'' = 0$.

$36x^2 - 48x + 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{3}$; $x_2 = 1$.

Перевіримо чи змінює друга похідна знак при переході через отримані аргументи. Розглянемо проміжки:

$x \in \left(-\infty;\ \dfrac{1}{3}\right)$ нехай $x = 0$ тоді $y''(0) = 1 > 0$;

$x \in \left(\dfrac{1}{3};\ 1\right)$ нехай $x = 0{,}5$ тоді $y''(0{,}5) = -0{,}25 < 0$

$x \in (1;\ \infty)$ нехай $x = 2$ тоді $y''(2) = 5 > 0$

Отже на інтервалах $x \in \left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right) \cup (1;\ \infty)$ графік вгнутий, а на $x \in \left(\frac{1}{3};\ 1\right)$ графік опуклий. Крім точки $A\,(1;\ 0)$ є ще точка перегину $B\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{27}\right)$.

Відповідь: $a = 3$, точка перегину $B\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{27}\right)$

Задача 3. Знайти інтервали опуклості і вгнутості графіка функцій та точки перегину.

1) $y = x^3 - 3x^2 + 6x$; 2) $y = 3 + \sqrt[3]{x+2}$;

3) $y = (x+1)e^{x+1}$; 4) $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

Відповідь: 1) $A(1, 4)$, $(-\infty;\ 0)$ – опуклий, $(0; +\infty)$ – вгнутий;

2) $A(-2; 3)$, $(-\infty; -2)$ – вгнутий, $(-2; +\infty)$ – опуклий;

3) $A\left(-2;\ \frac{2}{e^2}\right)$, $(-\infty; -3)$ – опуклий, $(-3;+\infty)$ – вгнутий;

4) $A\left(e^2;\ \frac{1}{2}e^2\right)$, $(0; 1)$, $(e^2; +\infty)$ – опуклий, $(1; e^2)$ – вгнутий.

2. Асимптоти графіка функції.

Пряма називається асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань від змінної точки M кривої до цієї прямої при віддаленні точки M у нескінченність прямує до нуля.

а) Вертикальна асимптота.

Асимптота називається вертикальною, якщо вона паралельна осі ординат *(Oy)*, тобто $x = a$.

Задача 4. Знайти вертикальні асимптоти графіка функції $y = -\dfrac{x}{x^2 - 1}$.

Розв'язання: Знайдемо область визначення даної функції: $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Маємо дві точки $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$, в яких функція може необмежено зростати за абсолютною величиною.

Дослідимо поведінку функції в околі цих точок:

$$\lim_{x\to -1-0}\left(-\frac{x}{x^2-1}\right)=+\infty; \qquad \lim_{x\to -1+0}\left(-\frac{x}{x^2-1}\right)=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 1-0}\left(-\frac{x}{x^2-1}\right)=+\infty; \qquad \lim_{x\to 1+0}\left(-\frac{x}{x^2-1}\right)=-\infty.$$

Отже, маємо дві вертикальні асимптоти $x=-1,\ x=1$.
Відповідь: $x=-1,\ x=1$.

б) Похила асимптота.

Рівняння <u>похилої</u> асимптоти має вигляд: $y=kx+b$, де $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$.

Якщо $k=0$, то маємо <u>горизонтальну</u> асимптоту виду: $y=b$

Якщо, хоча б одна з границь не існує, то крива похилих асимптот не має.

Задача 5. Знайти похилі асимптоти графіка функції $y=-\frac{x^2-x+1}{x}$.

Розв'язання:

Знайдемо область визначення даної функції $D(y)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0-0}\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)=-\infty$ і $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)=+\infty$, то пряма $x=0$ є рівнянням вертикальної асимптоти.

Знайдемо похилі асимптоти $y=kx+b$. Знайдемо параметри k і b

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=+1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x+1}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x}\left(\frac{-1+\frac{1}{x}}{1}\right)=-1$$

Отже рівняння асимптоти запишеться у вигляді $y=x-1$

Відповідь: $y=x-1$

Задача 6. Знайти асимптоти кривих:

1) $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$.

Розв'язання: Знайдемо область визначення даної функції: $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2;3) \cup (3;\infty)$

Перевіримо, як поводить себе функція поблизу точок $x = 2$ та $x = 3$.

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \infty; \qquad \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = -\infty; \qquad \lim_{x\to 3+0} \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \infty.$$

Отже маємо дві вертикальні асимптоти $x = 2$, $x = 3$

Знайдемо похилі асимптоти виду $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(x^2 - 5x + 6)x} = 0; \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = 0.$$

Горизонтальна асимптота $y = 0$.

Відповідь: дві вертикальні асимптоти $x = 2$, $x = 3$ та горизонтальна асимптота $y = 0$.

2) $y = \sqrt{\dfrac{x^3 - 1}{x + 2}}$.

Розв'язання: Знайдемо область визначення та значень даної функції:

$$D(y) = (-\infty; -2) \cup [1; \infty), \quad E(y) = [0; \infty)$$

Перевіримо, як поводить себе функція поблизу точок $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

$$\lim_{x\to -2-0} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 2}} = \infty \ ; \qquad \lim_{x\to 1+0} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 2}} = 0 \ ;$$

В точці $x = -2$ функція має розрив другого роду, а отже маємо вертикальну асимптоту $x = -2$.

Знайдемо похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.

Розглянемо випадок коли $x \to +\infty$:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{2}{x}\right)}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)\text{-}kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+2}}\text{-}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+2}}-x\right)\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+2}}+x\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+2}}+x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-1}{x+2}-x^2}{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+2}}+x\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-1-x^2-2x^2}{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+2}}+x\right)(x+2)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2-1}{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+2}}+x\right)(x+2)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2-1}{\left(x\sqrt{\frac{x\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}}+x\right)(x+2)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2-1}{(x\ +x)(x+2)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2-1}{2x\,(x+2)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)}{2x^2\ \left(1+\frac{2}{x}\right)} = -1$$

Розглянемо випадок коли x → - ∞. Виконавши аналогічні перетворення будемо мати:

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3-1}{x+2}} = -1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+2}}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+2}}+x\right)\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+2}}-x\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+2}}-x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2-1}{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+2}}-x\right)(x+2)} = 1.$$

Отримали дві похилі асимптоти $y = x - 1$ при $(x \to +\infty)$ та $y = -x + 1$ при $(x \to -\infty)$

Відповідь: вертикальна асимптота $x = -2$ та похилі асимптоти $y = x - 1$ при $(x \to +\infty)$ та $y = -x + 1$ при $(x \to -\infty)$.

Задача 7. Знайти асимптоти ліній та побудувати їх графіки.

1) $y = x + arcctgx$; 2) $y = xe^{\frac{2}{x^2}} + 2$; 3) $y = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} + 2x$;

4) $y = x - \ln x$; 5) $y = \frac{x^2}{x - 1}$.

Відповідь: 1) $y = x$, $y = x + \pi$; 2) $x = 0$, $y = x + 2$; 3) $x = \pm 1$, $y = 2x + 1$; 4) асимптот немає; 5) $x = 1$, $y = x$.

Домашнє завдання

Задача 1. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину графіків функції:

1) $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 2x - 1$; 2) $y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^5}$; 3) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Задача 2. При яких значеннях *a* лінія $y = 3ax^4 - x^3 - \frac{x^2}{2} + 2x$ скрізь опукла?

Задача 3. Знайти асимптоти ліній.

1) $y = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 5}$; 2) $y = xarctg2x$; 3) $y = 2x + \frac{\sin x}{x}$.