# Практичне заняття № 4.5

# ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ

1. **Стаціонарні та критичні точки.**
2. **Інтервали монотонності.**
3. **Дослідження функції на максимум та мінімум.**
4. **Найбільше та найменше значення функції на даному відрізку.**

## 1. Стаціонарні та критичні точки.

Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називаються стаціонарними точками.

***Правило:*** Щоб знайти стаціонарні точки функції $f(x)$, треба похідну $f'(x)$ прирівняти до нуля і розв'язати отримане рівняння. Дійсні корені цього рівняння $f'(x)=0$ будуть стаціонарними точками функції $f(x)$.

Точки, в яких похідна $f'(x)$ *дорівнює нулю*, або *не існує* називаються критичними точками функції $f(x)$.

**Задача 1.** Знайти критичні точки функцій:

1) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

*Розв'язання*: Знайдемо область визначення функції: $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, оскільки $x-1\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq 1$.

Для знаходження критичних точок, необхідно знайти точки в яких похідна дорівнює 0, або не існує. Знайдемо похідну функції

$$y'=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

Прирівняємо похідну до нуля: $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$. Отримаємо дві критичні точки: $x$=0, $x$=2, точка $x=1\notin(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

*Відповідь*: 0, 2.

2) $y=x^2\ln x$.

*Розв'язання*: Знайдемо область визначення функції: $D(y)=(0;\ \infty)$

Знайдемо першу похідну, прирівняємо її до нуля. $y' = 2x\ln x + \frac{x^2}{x} = 0$

$$\Rightarrow \quad 2x\ln x + \frac{x^2}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x^2 \ln x + x^2}{x} \Rightarrow x(2\ln x + 1) = 0 \ , \ (x \neq 0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = e^{\frac{-1}{2}} \in D(y)$$

Отже точка $x = e^{-\frac{1}{2}}$ є критичною.

*Відповідь:* $x = e^{-\frac{1}{2}}$.

**Задача 2.** Знайти критичні точки функцій:

1) $y = x^2 - 4x + 1$ ; 2) $y = 5x^5 - 3x - 4$ ; 3) $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ ;

4) $y = \frac{x}{4} - \sqrt[4]{x}$ ; 5) $y = 2tgx - tg^2 x$ ; 6) $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$.

*Відповіді:* 1) 0, $\pm\frac{3}{5}$; 2) 2; 3) 0, ±3; 4) 0, 1; 5) $\frac{\pi}{4} + \pi$ n , n $\in$ Z
6)-3, 1.

**2. Інтервали монотонності.**

Інтервали зростання (спадання) функції називаються інтервалами <u>монотонності</u>.

<u>Необхідною умовою зростання (спадання)</u> диференційованої функції $y = f(x)$ на інтервалі $(a, b)$ є $f'(x) \geq 0$ ( $f'(x) \geq 0$ ) на $(a, b)$, тобто похідна цієї функції в усіх точках цього інтервалу більше (менше) або дорівнює нулю.

<u>Достатньою умовою зростання (спадання)</u> функції або умова строгої монотонності є те, що сама функція на цьому інтервалі зростає (спадає), тобто функція $y = f(x)$ в кожній точці інтервалу $(a, b)$ має додатну (від'ємну) похідну.

Інтервали монотонності відокремлюватися один від одного стаціонарними або критичними точками.

Щоб знайти інтервали зростання (спадання) функції необхідно виконати наступні кроки:

1) знайти область визначення функції $f(x)$;
2) знайти похідну даної функції;

3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x)=0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує;
4) розділити область визначення функції критичними точками на інтервали;
5) в кожному із отриманих інтервалів визначити знак похідної;
6) на інтервалі, де $f'(x)>0$, функція $f(x)$ зростає ($f(x)\uparrow$), а де $f'(x)<0$, функція $f(x)$ спадає ($f(x)\downarrow$).

**Задача 3.** Знайти інтервали зростання та спадання функцій:

$$1)\ y=x(1+\sqrt{x});$$

*Розв'язання*: Область визначення $D(y)=[0;+\infty)$.
Знайдемо похідну:

$$y'=(1+\sqrt{x})+x\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=1+\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}=1+\frac{3}{2}\sqrt{x}\ .$$

Знайдемо критичні точки: $y'=0 \Rightarrow 1+\frac{3}{2}\sqrt{x}=0$ $\Rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{x}=-1$. Остання рівність неможлива для дійсних значень x, отже критичних точок немає.

На інтервалі $[0;+\infty)$ y'>0 і функція зростає.

*Відповідь*: На інтервалі $[0;+\infty)$ функція зростає.

2) $y=x-2\sin x$, якщо $0\le x\le 2\pi$.

*Розв'язання*: Знайдемо критичні точки:

$$y'=12\cos x=0 \Rightarrow 1-2\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+2\pi n.$$

Серед отриманих критичних точок знайдемо ті, які належать відрізку $[0; 2\pi]$.

При $n=0$ $x=\frac{\pi}{3}$, при $n=-1$ $x=\frac{5\pi}{3}$

Отже маємо інтервали $\left(0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right)$, взявши довільну точку з інтервалу та підставивши її значення в похідну, ми визначимо інтервали монотонності.

На інтервалах $\left(0;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3};2\pi\right)$ y' < 0 – функція спадає, на інтервалі $\left(\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right)$ y' > 0 – функція зростає.

*Відповідь*: На інтервалах $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{3};2\pi\right)$ – функція спадає, на інтервалі $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3}\right)$ – функція зростає.

**3. Дослідження функції на максимум та мінімум.**

Функція $y = f(x)$ має в точці $x_0$ максимум (мінімум), якщо існує такий окіл $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ точки $x_0$, де задана функція, що для всіх її точок виконується нерівність $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$.

Максимум і мінімум функції називаються екстремумами, а точка, в яких є екстремуми – точками екстремуму.

Необхідна умова екстремуму функції: Якщо функція $f(x)$ має екстремуму в точці $x_0$, а також похідну в цій точці, то $f'(x_0)=0$.

Перша достатня умова екстремуму функції: Якщо функція $f(x)$ диференційована в околі критичної точки $x_0$ і її похідна зліва від цієї точки додатна, а справа від'ємна, то в точці $x_0$ функція досягає свого максимуму. Якщо похідна зліва від критичної точки $x_0$ від'ємна, а справа - додатна, то в точці $x_0$ функція досягає мінімуму. Якщо похідна зліва і справа від критичної точки $x_0$ має однакові знаки, то в цій точці функція екстремумів не має.

Друга достатня умова екстремуму функції: Якщо в стаціонарній точці $x_0$ друга похідна відмінна від нуля, то в цій точці функція $f(x)$ має максимум при $f''(x_0)<0$ і мінімум при $f''(x_0)>0$.

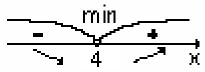
**Задача 4.** Знайти екстремуми та інтервали монотонності функції $y=(x-5)e^x$.

*Розв'язання.* Область визначення даної функції $D(y)=R$.

Знайдемо критичні точки:

$$y'=(x-5)e^x+e^x=e^x(x-4)=0 \Rightarrow \quad x-4=0 \Rightarrow x=4 \text{ оскільки } e^x \ne 0.$$

Застосуємо першу достатню умову екстремуму функції.




Знайдемо значення функції в точці $x=4$ $\quad y(4)=(4-5)e^4=-e^4$

*Відповідь:* На інтервалі $(-\infty;4)$ - функція зростає, на інтервалі $(4;\infty)$ - функція спадає, $y_{\min}(4)=-e^4$.

**Задача 5.** Дослідити на екстремуми функцію $y=\frac{x^4}{2}-4x^3+5x^2$.

*Розв'язання*: Область визначення даної функції $D(y)=R$.

Знайдемо критичні точки:

$$y'=\frac{4x^3}{2}-12x^2+10x=0\Rightarrow\quad 2x(x^2-6x+5)=0\Rightarrow x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=5.$$

Застосуємо другу достатню умова екстремуму функції. Тоді $y''=3x^2-12x+5$, $y''(0)=5>0$, $y''(1)=-4<0$, $y''(5)=20>0$. Отже $x_1=0$ - точка мінімуму, $x_2=1$ - точка максимуму, $x_3=5$- точка мінімуму.

*Відповідь*: $x_1=0$, $x_3=5$ - точки мінімуму, $x_2=1$ - точка максимуму.

**Задача 6.** Знайти екстремуми та інтервали монотонності функцій:

1) $y=x^3-3x+5$ ; 2) $y=1-\sqrt{x^2-6x+10}$; 3) $y=x\sqrt{1-x^2}$;

4) $y=x-\ln(x+2)$; 5) $y=\frac{x^3+4}{x^2}$; 6) $y=xe^{x^2-3x}$.

*Відповіді:* 1) $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$-зростає, $(-1;\ 1)$-спадає, $y_{\max}=y(-1)=7$, $y_{\min}=y(1)=3$; 2) $(-\infty;\ 3)$-зростає, $(3;\ \infty)$-спадає, $y_{\max}=y(3)=0$; 3) $\left(-\frac{1}{\sqrt2};\ \frac{1}{\sqrt2}\right)$-зростає, $\left(-1;\ -\frac{1}{\sqrt2}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt2};\ 1\right)$-спадає,

$y_{\max}=y(\frac{1}{\sqrt2})=\frac12$, $y_{\min}=y(-\frac{1}{\sqrt2})=-\frac12$;

4) $(-2;-1)$-спадає, $(-1;\infty)$-зростає, $y_{\min}=y(2)=0$; 5) $(-\infty;0)\cup(2;\infty)$-зростає, $(0;2)$-спадає, $y_{\min}=y(2)=3$; 6) $\left(-\infty;\frac12\right)\cup(1;\infty)$-зростає, $\left(\frac12;1\right)$-спадає, $y_{\max}=y(\frac12)=\frac{1}{2e^{5/4}}$, $y_{\min}=y(1)=\frac{1}{e^2}$.

**4. Найбільше і найменше значення функції на даному відрізку.**

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку [a; b] то на цьому відрізку вона досягає найбільшого значення M і найменшого значення m за теоремою Веєрштраса.

Для того, щоб знайти найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$ на заданому відрізку [a; b], де вона неперервна, необхідно:

1) знайти всі критичні точки, які належать інтервалу (a; b) і обчислити значення функції в цих точках (без дослідження їх на екстремум);
2) обчислити значення функції на кінцях відрізку $f(a)$ і $f(b)$;
3) порівняти отримані результати, та вибрати найбільше та найменше значення сере значень отриманих в пунктах 1 і 2.

**Задача 7.** Знайти найбільше і найменше значення даних функцій у заданих інтервалах.

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, \quad [-4;0].$

*Розв'язання*: Знайдемо стаціонарні точки для функції $f'(x_0) = 0$

$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow \quad 6(x^2 + x - 2) = 0$, знайдемо корні квадратного рівняння за теоремою Вієте $x_1 + x_2 = 1; \quad x_1 \cdot x_2 = -2$ тоді $x_1 = -2, \quad x_2 = 1.$

Перевіримо належність коренів заданому відрізку: $1 \notin [-4;0]$
$-2 \in [-4;0]$ .

Обчислимо значення функції на кінцях відрізка та в точці -2.

$$y(-4) = 2 \cdot (-4)^3 + 3 \cdot (-4)^2 - 12 \cdot (-4) + 1 = -37;$$

$$y(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 1 = 21;$$

$$y(0) = 1$$

Порівняємо між собою значення $y(-4), \quad y(-2) \quad y(0)$. Отримаємо $y_{найб}(-2) = 21, \quad y_{найм}(-4) = -37$ .

*Відповідь*: $y_{найб}(-2) = 21, \quad y_{найм}(-4) = -37$ ;

2) $y = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 + 2x + 5}$ , $[-1; 3]$ .

Знайдемо стаціонарні точки для функції:

$$y' = \frac{2x(x^2 + 2x + 5) - (2x + 2)(x^2 + 3)}{(x^2 + 2x + 5)^2} = \frac{2x^3 + 4x^2 + 10x - 2x^3 - 6x - 2x^2 - 6}{(x^2 + 2x + 5)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 4x - 6}{(x^2 + 2x + 5)^2} = \frac{2(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 + 2x + 5)^2}.$$

$y' = 0 \Rightarrow \ x^2 \ + 2x - 3 = 0; \qquad \left(x^2 + 2x + 5 \neq 0;\ D = 4 - 20 = -16 < 0\ \right)$

$x_1 + x_2 = -2; \quad x_1 \cdot x_2 = -3 \quad \Rightarrow \ x_1 = -3 \notin [-1;\ 3\ ]\ ; \ \ x_2 = 1 \notin [-1;\ 3]$

Обчислимо значення функції на кінцях відрізка та в точці $x = 1$.

$$y(-1) = \frac{1+3}{1-2+5} = \frac{4}{4} = 1; \ \ y(-1) = \frac{1+3}{1+2+5} = \frac{4}{8} = 0{,}5; \ \ y(3) = \frac{9+3}{9+6+5} = \frac{12}{20} = 0{,}6$$

Порівнявши між собою значення $y(-1), \quad y(1), \quad y(3)$.

Отримаємо $y_{найб}(-1) = 1, \quad y_{найм}(1) = 0{,}5$.

*Відповідь*: $\quad y_{найб}(-1) = 1, \quad y_{найм}(1) = 0{,}5$.

**Задача 8.** Знайти найбільше та найменше значення функцій в заданих інтервалах.

1) $y = x^4 - 2x^2 + 3, [-3;\ 2]$; 2) $y = \dfrac{x}{1+x^2}, [0;\ 2]$;

3) $y = x \ln x, [e^{-2}; 1]$; 4) $y = \dfrac{x^2}{e^{2x}}, [-1;\ 2]$;

5) $y = \sin 2x - x, \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$; 6) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$, $[0;\ 3]$.

*Відповіді:* 1) 2 і 66; 2) $\dfrac{1}{2}$ і 0; 3) $-\dfrac{2}{e^2}$ і 0; 4) $e^2$ і 0;

5) $\dfrac{\pi}{2}$ і $-\dfrac{\pi}{2}$; 6) $\sqrt[3]{9}$ і 0.

**Задача 9**. Число 48 розкласти на два доданки так, щоб їхній добуток був найбільшим.

*Розв'язання*: Позначимо через $a$ – перший доданок, $b$ – другий доданок, добуток чисел $a$ і $b$ позначимо $y$, тоді: $a + b = 48$, $y = a \cdot b$.

Виразимо з суми $b$, та підставимо в добуток , отримаємо: $b = 48 - a, \quad y = a \cdot (48 - a) = 48a - a^2; \quad y' = 48 - 2a$

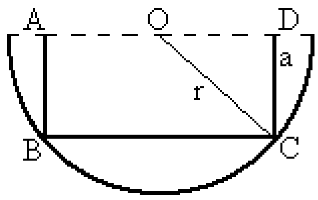
Прирівняємо похідну до нуля та знайдемо значення $a$ і $b$. Добуток отриманих чисел буде найбільшим.

$y' = 48 - 2a = 0 \Rightarrow \ a = 24$ тоді $b = 48 - 24 = 24$

*Відповідь*: $\quad a = 24, \ b = 24$.

**Задача 10.** Знайти сторони прямокутника найбільшого периметра, вписаного в півколо радіуса r .

*Розв'язання*:




Позначимо OK=r – радіус, P – периметр, AB = DC = *a* – менша сторона прямокутника, AD = BC = *b* – більша сторона прямокутника дивись (рис.1). Тоді $P = 2(a+b)$. З прямокутного трикутника ODA, використовуючи теорему Піфагора, виразимо сторону OD.

Рис. 1

$OD = \frac{b}{2} = \sqrt{r^2 - a^2}$, та підставимо отриманий вираз в формулу периметра, отримаємо: $P = 2\left(a + 2\sqrt{r^2 - a^2}\right)$. Знайдемо похідну від отриманої функції по a, та прирівнявши до нуля знайдемо сторону a.

$$P' = 2 + 4 \cdot \frac{1}{2}\left(r^2 - a^2\right)^{\frac{-1}{2}} \cdot (-2a) \Rightarrow 2 - \frac{4a}{\sqrt{r^2 - a^2}} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{r^2 - a^2} - 4a = 0$$

$$\left(r^2 - a^2 \neq 0, \quad r \neq a\right);$$

$$2\sqrt{r^2 - a^2} = 4a \Rightarrow r^2 - a^2 = 4a^2 \Rightarrow r^2 = 5a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{r^2}{5},$$

$$a = \sqrt{\frac{r^2}{5}} = \frac{r}{\sqrt{5}}, \quad \text{тоді} \quad b = 2\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{5}} = \frac{4r}{\sqrt{5}}.$$

*Відповідь*: Сторони прямокутника дорівнюють $\frac{r}{\sqrt{5}}$, $\frac{4r}{\sqrt{5}}$ відповідно.

**Задача 11.** Розв'язати задачі:

1) Число 16 розкласти на два доданки так, щоб сума їх квадратів була найменшою.
2) Знайти довжину сторін прямокутника з периметром 72 см, що має найбільшу площу.
3) Зі всіх прямокутників з діагоналлю 4 дм знайти той, площа якого найбільша.
4) Яким мають бути сторони прямокутної ділянки площею 1600 см$^2$, якщо на її огорожу витрачено найменшу кількість матеріалу?
5) Розкласти число 5 на два невід'ємні доданки так, щоб добуток квадрата першого доданка на другий доданок був найбільшим.

*Відповіді*: 1) $a = b = 8$; 2) $a = b = 18$; 3) $a = b = \sqrt{8}$; 4) $a = b = 40$;
5) 0 або 5

**Задача 12.** Необхідно зробити конічну лійку з твірною, що дорівнює 20 см. Якою має бути висота лійки, щоб об'єм був найбільшим?

*Розв'язання*: Позначимо SA = 20см, OA = R – радіус основи, OS = H – висота конуса (лійки) дивись (рис.2)

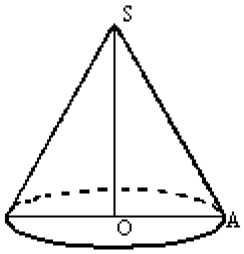


Рис.2

Об'єм конічної лійки можна обчислити, скориставшись формулою для об'єму конуса: $V = \frac{1}{3} S_{осн.} H$, площу основи конуса можна знайти за формулою $S_{осн.} = \pi R^2$ .

Виразимо радіус основи конуса з прямокутного трикутника SOA, використовуючи теорему Піфагора

$OA = \sqrt{SA^2 - OS^2} = \sqrt{400 - H^2}$

Підставимо отримані значення в формулу об'єму:

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} H = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{400 - H^2}\right)^2 H = \frac{1}{3}\pi H\left(400 - H^2\right) = \frac{1}{3}\pi 400 H - \frac{1}{3}\pi H^3$$

Знайдемо похідну від отриманої функції по $H$ та прирівнявши її до нуля знайдемо значення $H$.

$$V' = \frac{1}{3}\pi 400 - \frac{1}{3}\pi \cdot 3H^2 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi 400 - \frac{1}{3}\pi \cdot 3H^2 = 0 \Rightarrow H^2 = \frac{400}{3}.$$

*Відповідь*: $H = \frac{20}{\sqrt{3}} см$.

**Задача 13.** Знаючи, що об'єм відкритого басейну з квадратним дном дорівнює 32 м$^3$, визначити розміри басейну так, щоб на покриття його стін та дна було витрачено найменшу кількість матеріалу.

*Відповідь*: a = 4, h = 2.

## *Домашнє завдання*

**Задача 1.** Знайти екстремуми та інтервали монотонності функцій:

1) $y = x - \ln(x + 2)$; 2) $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1}$; 3) $y = 2\sin x + \cos 2x$.

**Задача 2.** Знайти найменше та найбільше значення функцій на відрізку:

1) $y = x - 4\sqrt{x} + 1, \quad [1; 9];$ 2) $y = 3x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 1, \quad [-1; 2];$

3) $y = x + \dfrac{4}{x^2}, \quad [1; 3].$

**Задача 3**. Число 30 розкласти на два доданки так, щоб сума їх кубів була найменшою.

**Задача 4**. Яким мають бути розміри ящика з кришкою місткістю V = 1764см$^3$, якщо сторони відносяться, як 3:4, щоб на його виготовлення пішло найменше матеріалу?

**Задача 5**. Довжина відкритого басейна об'ємом 288м$^2$ вдвічі більша за ширину. Якими мають бути розміри басейну, щоб на його облицювання пішло найменше матеріалу?

**Задача 6**. На сторінці книжки друкований текст повинен займати s см$^2$. Верхнє і нижнє поля мають бути по a см, праве і ліве – по b см. При яких розмірах сторінки на неї піде найменше паперу?

**Задача 7**. Із трьох дошок однакової ширини збивають жолоб. При якому нахилу бічних стінок площа поперечного перерізу жолоба буде найбільшою?