Практичне заняття №4.4

ФОРМУЛИ ТЕЙЛОРА ТА МАКЛОРЕНА. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ

1. Розклад деяких функцій в ряд Тейлора та Маклорена.
2. Застосування правила Лопіталя.

1. Розклад деяких функцій в ряд Тейлора та Маклорена.

Формула Тейлора: $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$

Формула Маклорена: $f(x)=f(0)+f'(0)\,x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$

(при $a=0$).

Задача 1. Розкласти за формулою Маклорена функцію $f(x)=\cos 5x$.

Розв'язання:

При $x=0$ значення функції $\cos 5x$ та її похідних будуть дорівнювати:

$f(x)=\cos 5x$,	$f(0)=\cos 0=1$;
$f'(x)=-5\sin\,5x$,	$f'(0)=-5\sin\,0=0$;
$f''(x)=-25\cos\,5x$,	$f''(0)=-25\cos\,0=-25$;
$f'''(x)=125\sin\,5x$,	$f'''(0)=125\sin\,0=0$;
$f^{IV}(x)=625\cos 5x$,	$f^{IV}(0)=625\cos 0=625$;
$f^{V}(x)=-3125\sin\,5x$,	$f^{V}(0)=-3125\sin\,0=0$;
$f^{VI}(x)=-15625\cos 5x$,	$f^{VI}(0)=-15625\cos 0=-15625$.

Підставимо отримані значення похідних в формулу Маклорена і отримаємо розклад функції по степеням x:

$$y=1-\frac{25}{2!}x^2+\frac{625}{4!}x^4-\frac{15625}{6!}x^6+R_6(x).$$

Відповідь: $y=1-\dfrac{25}{2!}x^2+\dfrac{625}{4!}x^4-\dfrac{15625}{6!}x^6+R_6(x)$.

Задача 2. Розкласти за формулою Маклорена функції:

1) $y = e^x$; 2) $y = \sin 2x$; 3) $y = \ln(1+x)$; 4) $y = \cos\sqrt{x}$.

Відповідь: 1) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x)$; 2) $2x - \frac{8}{3!}x^3 + \frac{32}{5!}x^5 - \frac{128}{7!}x^7 + R_7(x)$;

3) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + R_5(x)$; 4) $1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + R_3(x)$.

Задача 3. Розкласти за степенями $x+2$ функцію $y = x^3 + 6x^2 + 7x + 6$.

Відповідь: $(x+2)^3 - 5(x+2) + 8$.

Задача 4. Написати формулу Тейлора третього порядку для функції $y = x/(x+2)$ при $a = 1$.

Відповідь: $\frac{1}{3} + \frac{2}{9}(x-1) - \frac{2}{27}(x-1)^2 + \frac{2}{81}(x-1)^3 - R_3(x)$.

2. Правило Лопіталя.

Правило Лопіталя: Границя відношення двох нескінчено малих або двох нескінчено великих величин дорівнює границі відношення їх похідних, якщо вона існує:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Це правило застосовується для розкриття невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Невизначеності виду $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $\lfloor 1^\infty \rfloor$, $\lfloor 0^\infty \rfloor$, $\lfloor \infty^0 \rfloor$, $\lfloor 0^0 \rfloor$ зводяться до вище згаданих шляхом алгебраїчних перетворень.

Зауваження. Якщо відношення похідних теж буде дорівнювати $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то правило Лопіталя можна застосовувати повторно до отримання результату.

Задача 5. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin x}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x - \operatorname{cosec} x)$;

4) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{4}{x^2-1}}$; 5) $\lim\limits_{x \to 0} x^x$.

Розв’язання:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1}=0$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{3x}-1)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^{3x}}{\cos x}=3$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x-\operatorname{cosec} x)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-1)'}{\sin' x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{\cos x}=0$;

4) $a=\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{4}{x^2-1}}=\left[1^{\infty}\right]$.

Прологарифмуємо функцію за основою e :

$$\ln a=\ln\lim_{x\to 1}x^{\frac{4}{x^2-1}}$$

і знайдемо границю її логарифма

$\ln a=\ln\lim\limits_{x\to 1}\ln x^{\frac{4}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4\ln x}{x^2-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=4\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{2x}\right)=\dfrac{4}{2}=2.$ Звідси, $a=e^2$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}x^x=\left[0^0\right]=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln x^x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}}=$

$=e^{-\lim\limits_{x\to 0}x}=e^0=1$.

Відповідь: 1) 0; 2) 3; 3) 0, 4) e^2, 5) 1.

Задача 6. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2\ln x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{6x}-e^{2x}}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 6x}{\sin 3x}$; 6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\operatorname{arctg}(x+1)}$;

7) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\operatorname{tg} x\cdot\cos x$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-5x+6}{x^2-x^3-8}$; 9) $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$;

10) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x-\sec x)$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2}{e^{2x}}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3e^{-2x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}3x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0} 7x\operatorname{cosec} x$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg}2x}$; 17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 x}{e^{x^2}-x^2-1}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{x\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-x}$.

Відповідь: 1) ∞; 2) 1; 3) 4; 4) 4; 5) 2; 6) 3; 7) 0; 8) -2; 9) $\dfrac{4}{\pi}$; 10) 0; 11) 3; 12) 0; 13) e^{-2}; 14) 1; 15) 7; 16) 1; 17) 0; 18) 2.

Домашнє завдання

Задача 1. Розкласти за формулою Маклорена функції:

1) $y=\sin x^2$; 2) $y=e^{-x^2}$; 3) $y=\sqrt{x-1}$; 4) $y=\dfrac{1}{x}\sin x$.

Задача 2. Розкласти за степенями $x+1$ функцію $y=x^3+4x^2+2x+6$.

Задача 3. Розкласти за степенями $x-1$ функцію $y=x^3+x^2-x+2$.

Задача 4. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x}{x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\arcsin 3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{5x}}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{x^2+4}$; 6) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-4x-12}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 2^{-3x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{\ln 2x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x^3}{\sin(x-1)}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin x+1)}{e^x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x}{\ln(x+1)}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}(2x)^{3x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x^2+4x}{tg\, x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.