

### Практичне заняття №4.3

## ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ. ПОХІДНІ І ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

1. Диференціал функції.
2. Використання диференціала для наближених обчислень.
3. Похідні та диференціали вищих порядків.

### 1. Диференціал функції.

Диференціалом функції  $y = f(x)$  в точці  $x$  називається головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту аргументу  $\Delta x$ :

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \quad \text{або} \quad dy = f'(x) dx.$$

Властивості диференціалів: Нехай  $u(x)$  і  $v(x)$  – диференційовані функції, тоді

$$d(cu) = cdu \quad (c = \text{const}); \quad d(u \cdot v) = v du + u dv;$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv; \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

**Задача 1.** Знайти і порівняти значення приросту і диференціалу функції  $y = x^2$  в точці  $x = 3$  при  $\Delta x = 0,1$ .

*Розв'язання:*

Маємо

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x \Delta x + (\Delta x)^2.$$

В нашому випадку  $\Delta y = 2 \cdot 3 \cdot 0,1 + 0,01 = 0,61$ .

Диференціал  $dy = f'(x) \Delta x = (x^2)' \Delta x = 2x \Delta x \Rightarrow dy = 2 \cdot 3 \cdot 0,1 = 0,6$ .

Різниця між приростом функції і її диференціалом складає величину  $\Delta y - dy = (\Delta x)^2 = 0,01$ .

*Відповідь:* 0,61; 0,6; 0,01.

**Задача 2.** Знайти приріст функції  $y = x^3$  в точці  $x = 2$ , що відповідає приросту незалежної змінної  $\Delta x = 0,2$ .

*Відповідь:* 2,648.

**Задача 3.** Пересвідчитись, що диференціал функції  $y = x$  дорівнює її приросту.

**Задача 4.** Знайти приріст об'єму кулі при зміні її радіуса з  $R = 5$  до  $R = 5,2$ .

*Відповідь:*  $62,432\pi/3$ .

**Задача 5.** Знайти диференціал функції  $y = \operatorname{tg}^3(2^x)$ .

*Розв'язання:*

$$dy = y' dx = 3\operatorname{tg}^2(2^x) \left( \frac{1}{\cos^2(2^x)} \right) 2^x \ln 2 dx = \frac{3 \cdot 2^x \ln 2 \operatorname{tg}^2(2^x)}{\cos^2(2^x)} dx.$$

*Відповідь:*  $\frac{3 \cdot 2^x \ln 2 \operatorname{tg}^2(2^x)}{\cos^2(2^x)} dx$ .

**Задача 6.** Знайти диференціали функцій:

1)  $y = \ln \sin 2x$ ;    2)  $y = x^3 e^{2x}$ ;    3)  $y = x^3 + 2x^2$ ;

4)  $y = \sqrt{x}$ ;    5)  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ ;    6)  $y = 5 \cos x - x^2 \sin x + 7$ ;

7)  $y = \lg \frac{\cos x}{1 + \operatorname{tg} x}$ ;    8)  $y = 5^{\sin x \cos 2x}$ ;    9)  $y = \frac{x}{2} \sqrt{16 - x^2} + 8 \operatorname{arcsin} \frac{x}{4}$ .

*Відповідь:* 1)  $2 \operatorname{ctg} 2x dx$ ; 2)  $x^2 e^{2x} (3 + 2x) dx$ ; 3)  $(3x^2 + 4x) dx$ ; 4)  $dx/2\sqrt{x}$ ;  
5)  $0,5 dx$ ; 6)  $-(5 \sin x + 2x \sin x + x^2 \cos x) dx$ ; 7)  $\frac{3 dx}{(x+1)(2x+5) \ln 10}$ ;  
8)  $0,5(3 \cos 3x - \cos x) 5^{\sin x \cos 2x} \ln 5 dx$ ; 9)  $\sqrt{16 - x^2} dx$ .

**Задача 7.** Знайти значення диференціалів в точці:

1)  $y = \ln(x^2 - 1)$ ,  $x = 3$ ;    2)  $y = \sqrt{x} \cdot 2^{x^2+3}$ ,  $x = 1$ .

*Відповідь:* 1)  $0,75 dx$ ; 2)  $(8 + 32 \ln 2) dx$ .

## 2. Використання диференціала для наближених обчислень.

Наближене значення функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0 + \Delta x$ , яке близьке до точки  $x_0$  обчислюється за формулою:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Зауваження. Якщо значення точки  $x_0$  задано в градусах, то його необхідно перевести в радіани за формулою:  $\frac{\pi \cdot x_0}{180}$ .

**Задача 8.** Обчислити наближено: 1)  $(1,01)^{10}$ ; 2)  $\operatorname{tg} 46^\circ$ .

*Розв'язання:*

1) Розглянемо функцію  $f(x) = x^{10}$  в точці  $x_0 = 1$ .

Тоді значення величини  $(1,01)^{10}$  можна представити у вигляді

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^{10}, \text{ якщо } x_0 = 1 \text{ і } \Delta x = 0,01.$$

За формулою наближених обчислень маємо:

$$(x_0 + \Delta x)^{10} \approx (x_0)^{10} + 10(x_0)^9 \Delta x \Rightarrow (1,01)^{10} \approx 1^{10} + 10 \cdot 1^9 \cdot 0,01 = 1 + 0,1 = 1,1.$$

2) За умовами задачі  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ;  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ;  $\Delta x = \frac{\pi}{180}$ .

Зауваження: Якщо розглядаються тригонометричні функції, значення аргументу беруться в радіанах.

$$\operatorname{tg} 46^\circ = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180} \right) \approx \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2(\pi/4)} \cdot \frac{\pi}{180} = 1 + 2 \frac{\pi}{180} = 1 + \frac{\pi}{90} = 1,343$$

*Відповідь:* 1) 1,1; 2) 1,343.

**Задача 9.** Обчислити наближено:

- 1)  $\sqrt{1,08}$ ; 2)  $\sqrt{9,02}$ ; 3)  $\sqrt[3]{30}$ ; 4)  $\sqrt[4]{90}$ ; 5)  $\sqrt[5]{33}$ ;  
 6)  $\sqrt{80}$ ; 7)  $\cos 61^\circ$ ; 8)  $\lg 0,9$ ; 9)  $\operatorname{arctg} 1,05$ ; 10)  $\operatorname{arcsin} 0,51$ .

*Відповідь:* 1) 1,04; 2) 3,0033; 3) 3,111; 4) 3,083; 5) 2,011; 6) 8,889;  
 7) 0,485; 8) -0,046; 9) 0,811; 10) 0,513.

**3. Похідні та диференціали вищих порядків.**

Похідною другого порядку функції  $y = f(x)$  називається похідна від першої похідної:

$$y'' = (y')' = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

У випадку, коли функція задана параметрично  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ), друга похідна обчислюється таким чином:

$$y''_{xx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} \right) = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Похідною  $n$ -го порядку називається похідна від похідної  $(n-1)$ -го порядку:

$$y^{(n)} = \left( y^{(n-1)} \right)' = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Диференціалом другого порядку називається диференціал від першого диференціала:

$$d^2 y = d(dy) = f''(x) dx^2.$$

Диференціалом  $n$ -го порядку називається диференціал від диференціала  $(n-1)$ -го порядку:

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x) dx^n.$$

**Задача 10.** Знайти похідні другого та третього порядків функції  $y = x^3 + 5x^2 + 4x + 3$ .

*Розв'язання:*

$$y' = (x^3 + 5x^2 + 4x + 3)' = 3x^2 + 10x + 4;$$

$$y'' = (3x^2 + 10x + 4)' = 6x + 10;$$

$$y''' = (6x + 10)' = 6.$$

*Відповідь:*  $6x + 10$ ;  $6$ .

**Задача 11.** Знайти похідні другого порядку функцій:

$$1) y = e^{-5x^2}; \quad 2) y = \operatorname{tg} 2x; \quad 3) y = x \ln x; \quad 4) y = x(x+1)^2 / (x-2).$$

*Відповідь:* 1)  $10e^{-5x^2} (10x - 1)$ ; 2)  $\frac{8 \sin 2x}{\cos^3 2x}$ ; 3)  $\frac{1}{x}$ ;

$$4) \frac{x(x+1)^2}{x-2} \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2} \right) \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} \right).$$

**Задача 12.** Знайти похідні четвертого порядку функцій:

$$1) y = x^5 - 7x^2 + x - 1; \quad 2) y = \sin 2x; \quad 3) y = 2e^{3x}.$$

*Відповідь:* 1)  $120x$ ; 2)  $16\sin 2x$ ; 3)  $162e^{3x}$ .

**Задача 13.** Знайти з яким прискоренням рухається точка в момент часу  $t = 10$  с, якщо  $S = t^3 - 10t^2 + t + 5$ .

*Відповідь:*  $a = 40 \text{ м/с}^2$ .

**Задача 14.** Знайти другі похідні функцій:

$$1) x^2 + y^3 - 1 = 0; \quad 2) \begin{cases} x = \ln t \\ y = \sin 3t \end{cases}.$$

*Розв'язання:*

$$1) \text{ Продиференціюємо рівняння по } x: \quad 2x + 3y^2 y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{2x}{3y^2}.$$

$$y'' = \left( -\frac{2x}{3y^2} \right)' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{y - 2xy'}{y^3} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{y - 2x \left( -\frac{2x}{3y^2} \right)}{y^3} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{3y^3 + 4x^2}{y^5} = -\frac{2(3 + x^2)}{9y^5}$$

$$2) \quad y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{3 \cos 3t}{1/t} = 3t \cos 3t \quad \Rightarrow$$

$$y''_{xx} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{3 \cos 3t - 9t \sin 3t}{1/t} = 3t(\cos 3t - 3t \sin 3t).$$

*Відповідь:* 1)  $-\frac{2(3+x^2)}{9y^5}$ ; 2)  $3t(\cos 3t - 3t \sin 3t)$ .

**Задача 15.** Знайти другі похідні функцій:

$$1) x^2 - y^2 - xy = 0; \quad 2) \begin{cases} x = 2t^5 \\ y = \ln t \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} x = t^2 - 3 \\ y = 2t^3 - 5t^2 - t \end{cases}.$$

*Відповідь:* 1)  $\frac{2(y-2x)(y+3x)}{(2y+x)^3}$ ; 2)  $-\frac{1}{20t^{10}}$ ; 3)  $\frac{6t^2+1}{4t^3}$ .

**Задача 16.** Знайти диференціали другого порядку функцій:

$$1) y = 6x^2 - x + 7; \quad 2) y = \operatorname{tg} 2x.$$

Відповідь: 1)  $12dx^2$ ; 2)  $\frac{8 \sin 2x}{\cos^3 2x} dx^2$ .

### Домашнє завдання

**Задача 1.** Знайти диференціали функцій:

$$\begin{array}{lll} 1) y = \sin \sqrt{x}; & 2) y = \lg \frac{x+1}{2x+5}; & 3) y = \sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x}; \\ 4) y = \operatorname{arctg}^4 x^3; & 5) y = 5^{x^2} + 2x^5; & 6) y = \ln^2 \arcsin \sqrt{x}. \end{array}$$

**Задача 2.** Обчислити наближено:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt{146}; & 2) \sqrt[3]{63}; & 3) \ln 1,05; \\ 4) \sin 31^\circ; & 5) \operatorname{arctg} 0,93; & 6) \arccos 0,45. \end{array}$$

**Задача 3.** Знайти похідні другого та третього порядків функцій

$$1) y = x^3 + 5x^2 + 4x + 3; \quad 2) y = x^5 e^{-x}; \quad 3) y = \sin(2 \arcsin x).$$

**Задача 4.** Знайти другі похідні функцій:

$$1) x^2 + y^3 - x = 0; \quad 2) y = \sin(x + y); \quad 3) \begin{cases} x = \ln t \\ y = \sin 3t \end{cases}; \quad 4) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1 + t^2) \end{cases}.$$

**Задача 5.** Знайти диференціали другого порядку функцій:

$$1) y = 2x^4 - x^2 + 3; \quad 2) y = x^2 \ln 2x.$$