Практичне заняття №4.2

ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ СКЛАДЕНИХ, НЕЯВНИХ І ПАРАМЕТРИЧНО ЗАДАНИХ ФУНКЦІЙ.

1. Похідна від складеної функції.
2. Похідна від параметрично заданої функції.
3. Похідна від неявної функції.
4. Логарифмичне диференціювання.

1. Похідна від складеної функції.

Похідна складеної функції $y = f(\varphi(x))$ дорівнює добутку її похідної за проміжним аргументом на похідну цього аргумента за незалежною змінною:

$$y'_x = f'_\varphi \cdot \varphi'_x.$$

Задача 1. Знайти похідну складеної функції $y = \ln \sin^3(7x-1)$.

Розв'язання:

$$y' = (\ln\sin^3 7x)' = \frac{1}{\sin^3 7x}(\sin^3 7x)' = \frac{1}{\sin^3 7x}\cdot 3\sin^2 7x \cdot (\sin 7x)' =$$

$$= \frac{1}{\sin^3 7x}\cdot 3\sin^2 7x\cdot\cos 7x\cdot(7x)' = \frac{1}{\sin^3 7x}\cdot 3\sin^2 7x\cdot\cos 7x\cdot 7 = \frac{21\sin^2 7x\cdot\cos 7x}{\sin^3 7x} = 21\operatorname{ctg} 7x$$

Відповідь: $21\operatorname{ctg} 7x$.

Задача 2. Знайти похідну складеної функції:

1) $y = \ln\sin x$;
2) $y = e^{x^2-3x+1}$;
3) $y = \arcsin(\operatorname{tg} 3x)$;
4) $y = \sqrt{x^2+4}$;
5) $y = 3\sin^4 5x$;
6) $y = \ln\operatorname{tg}\frac{e^x}{x}$;
7) $y = (2x+1)^3\sin 3x$;
8) $y = \ln\sqrt{e^{3x}}$;
9) $y = \ln\operatorname{tg} 5x^2$;
10) $y = \ln\cos^2 3x$;
11) $y = 2^{\sqrt{\cos 5x}}$;
12) $y = \cos^3 x\cdot\sin 2x$.

Відповідь: 1) $\operatorname{ctg} x$; 2) $e^{x^2-3x+1}(2x-3)$; 3) $\dfrac{3}{\cos^2 3x\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 3x}}$; 4) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$;

5) $60\sin^3 5x\cos 5x$; 6) $\dfrac{e^x(x-1)}{x^2\sin^2(e^x/x)}$; 7) $6(2x+1)^2\sin 3x+3(2x+1)^3\cos 3x$;

8) $\dfrac{3}{2}$; 9) $\dfrac{15x^2}{\sin 5x^3\cos 5x^3}$; 10) $-2\operatorname{tg}3x$; 11) $-\dfrac{5\ln 2\cdot 2^{\sqrt{\cos 5x}}\sin 5x}{2\sqrt{\cos 5x}}$;

12) $2\cos^3 x(\cos 2x-3\sin^2 x)$.

2. Похідна від параметрично заданої функції.

Похідна параметрично заданої функції $\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ за незалежною змінною x дорівнює відношенню похідних від y та x за параметром t:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Задача 3. Знайти похідну параметрично заданої функції $\begin{cases} x=2\sin t-1\\ y=t^2+2t\end{cases}$.

Розв'язання:

$$y'_x=\frac{\left(t^2+2t\right)'}{\left(2\sin 3t-1\right)'}=\frac{2t+2}{6\cos 3t}=\frac{t+1}{3\cos 3t}.$$

Відповідь: $\dfrac{t+1}{3\cos 3x}$.

Задача 4. Знайти похідні параметрично заданих функцій:

1) $\begin{cases} x=3\sin t\\ y=\cos 2t\end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=2t-1\\ y=t^4+2t\end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=\ln t\\ y=\sin^2 4t\end{cases}$.

Відповідь: 1) $-\dfrac{2\sin 2t}{\cos t}$; 2) $2t^3+1$; 3) $4t\sin 8t$.

3. Похідна від неявної функції.

Якщо y є неявною функцією від x, тобто задана рівнянням $F(x,y)=0$, не розв'язаним відносно y, то для знаходження похідної $\frac{dy}{dx}$ необхідно продиференціювати обидві частини рівності , пам'ятаючи, що y є функцією від x, а потім розвязати отриману рівність відносно шуканої похідної y'. Ця похідна буде залежати в загальному випадку від x та y.

Задача 5. Знайти похідну неявно заданої функції $x^3+y^3=3xy$.

Розв'язання:

$$\left(x^3+y^3\right)'=\left(3xy\right)' \quad\Rightarrow\quad 3x^2+3y^2y'=3x'y+3xy' \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2y'=y+xy' \quad\Rightarrow$$

$$y^2y'-xy'=y-x^2 \quad\Rightarrow\quad y'\left(y^2-x\right)=y-x^2 \qquad\Rightarrow\quad y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}.$$

Відповідь: $y'=\dfrac{y-x^2}{y^2-x}$.

Задача 6. Знайти похідні неявно заданих функцій:

1) $3^x+\ln y=y\sin x$; 2) $x^2+xy^2+3=0$; 3) $x^5+x^2+y^3-xy=0$.

Відповідь: 1) $y'=\dfrac{y\cos x-3^x\ln 3}{1/y-\sin x}$; 2) $y'=\dfrac{2x+y^2}{2xy}$; 3) $\dfrac{5x^2+2x-y}{x-3y^2}$.

4. Логарифмічне диференціювання.

Логарифмічне диференціювання застосовується у випадках, коли задана функція містить операції множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня, а також для знаходження похідної від показниково-степеневої функції $y=u^v$, де u та v – функції від x.

Для застосування логарифмічного диференціювання до функції $y=f(x)$ необхідно:

1) прологарифмувати обидві частини рівняння за основою e

$$\ln y=\ln f(x)=\varphi(x),$$

2) продиференціювати обидві частини цієї рівності, пам'ятаючи, що $\ln y$ є складеною функцією від x

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x),$$

3) замінити y його виразом через x і визначити y'

$$y' = y \cdot \varphi'(x) = f(x) \cdot \varphi'(x).$$

Задача 7. Знайти похідні: 1) $y = x^{3\cos x}$; 2) $y = \dfrac{x^3(7x-1)}{\sqrt{2x+3}(5x-1)}$.

Розв'язання:

1) Прологарифмуємо дану функцію $\ln y = \ln x^{3\cos x} \Rightarrow \ln y = 3\cos x \ln x$.

Візьмемо похідну $\ln' y = 3(\cos x \ln x)' \Rightarrow \dfrac{1}{y} y' = 3(\cos' x \ln x + \cos x \ln' x)$

$$\Rightarrow \quad y' = 3y\left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}\right) = 3x^{3\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x\right).$$

2) Прологарифмуємо дану функцію $\ln y = \ln \dfrac{x^3(7x-1)}{\sqrt{2x+3}(5x-1)} \Rightarrow$

$$\ln y = \ln x^3 + \ln(7x-1) - \ln\sqrt{2x+3} - \ln(5x-1) \Rightarrow$$

$$\ln y = 3\ln x + \ln(7x-1) - \frac{1}{2}\ln(2x+3) - \ln(5x-1).$$

Продиференціюємо як неявну функцію:

$$\frac{y'}{y} = 3\ln' x + \ln'(7x-1) - \frac{1}{2}\ln'(2x+3) - \ln'(5x-1) \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x} + \frac{7}{7x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x+3} - \frac{5}{5x-1} \Rightarrow$$

$$y' = y\left(\frac{3}{x} + \frac{7}{7x-1} - \frac{1}{2x+3} - \frac{5}{5x-1}\right) = \frac{x^3(7x-1)}{\sqrt{2x+3}(5x-1)}\left(\frac{3}{x} + \frac{7}{7x-1} - \frac{1}{2x+3} - \frac{5}{5x-1}\right)$$

Відповідь: 1) $3x^{3\cos x}\left(\dfrac{\cos x}{x} - \sin x \ln x\right)$;

2) $\dfrac{x^3(7x-1)}{\sqrt{2x+3}(5x-1)}\left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{7}{7x-1} - \dfrac{1}{2x+3} - \dfrac{5}{5x-1}\right)$.

Задача 8. Знайти похідні: 1) $y=(x^2+5)^{\arcsin x}$; 2) $y=\dfrac{x^2\sqrt{2x+1}}{(3x-1)^4\sin 2x}$.

Відповідь: 1) $(x^2+5)^{\arcsin x}\left(\dfrac{\ln(x^2+5)}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{2x\arcsin x}{x^2+5}\right)$;

2) $\dfrac{x^2\sqrt{2x+1}}{(3x-1)^4\sin 2x}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{12}{3x-1}-\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}\right)$.

Домашнє завдання

Задача 1. Знайти похідні:

1) $y=7x^5+\mathrm{tg}2\,x-2\sin^2 x$;

2) $y=x\cdot(4x+1)^3$;

3) $y=(3x^2+1)\big/\sqrt{2x}$;

4) $y=\ln\sqrt{x^3+3x}$;

5) $y=e^{5x^3-x^2-1}$;

6) $y=\arcsin e^{\sqrt{x}}$;

7) $y=\ln\sqrt{\sin x}$;

8) $y=e^{\sin(2x-9)}$;

9) $\begin{cases} x=5t-1 \\ y=t^2-4t \end{cases}$;

10) $y=e^{2x-1}\sin^3\dfrac{x^2}{2}$;

11) $x-5x^2y+y-7=0$;

12) $x^2-xy+\sin y-1=0$;

13) $x^3-x^2y+y^3=25$;

14) $y=\log_{x+1}2$;

15) $\begin{cases} x=5t-1 \\ y=\mathrm{arctg}\,t \end{cases}$;

16) $y=x^{\cos x}$;

17) $y=(\sin x)^{\ln x}$;

18) $y=\dfrac{x\sqrt{x-2}}{(3x-1)^4(x+1)^2}$.