Розділ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Практичне заняття № 4.1

ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

1. **Знаходження похідної за означенням.**
2. **Знаходження похідних за таблицею та правилами диференціювання.**
3. **Фізичний та геометричний зміст похідної.**

1. Знаходження похідної за означенням.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ називається границя відношення приросту функції $\Delta f(x)$ до приросту аргументу Δx при $\Delta x \to 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Задача 1. Знайти похідну функції $y = 5x$ за означенням.

Розв'язання:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(x + \Delta x) - 5x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x + 5\Delta x - 5x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x} = 5.$$

Відповідь: 5.

Задача 2. Знайти похідну за означенням:

1) $y = x^2 + 1$; 2) $y = 2^x$.

Відповідь:1) $2x$; 2) $2^x \ln 2$.

2. Знаходження похідних за таблицею та правилами диференціювання.

Таблиця похідних:

	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
1	C	0
2	x	1
3	x^n	nx^{n-1}
4	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5	a^x	$a^x \ln a$
6	e^x	e^x
7	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
8	$\ln x$	$\frac{1}{x}$

	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
9	$\sin x$	$\cos x$
10	$\cos x$	$-\sin x$
11	$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
12	$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
16	$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання: 1) $(Cu)' = Cu'$; 3) $(uv)' = u'v + uv'$;

2) $(u+v)' = u' + v'$; 4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Задача 3. Знайти похідну функції $y = \sin x \cdot \mathrm{tg} x + 2x$.

Розв'язання:

$$y' = (\sin x \cdot \mathrm{tg} x)' + (2x)' = (\sin x)' \mathrm{tg} x + \sin x (\mathrm{tg} x)' + 2 = \cos x \cdot \mathrm{tg} x + \sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 2 =$$

$$= \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} + 2$$

Відповідь: $\sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} + 2$.

Задача 4. Знайти похідні функцій:

1) $y = 5x^3 - 3x^2 + x - 1$; 2) $y = x^4 + 2x^2 - x$; 3) $y = -2x^2 - 7x + 2$;

4) $y = 5 + x^3 + 3x^2 + + \sin x + \cos x + 2\,\mathrm{tg}x - 3\,\mathrm{ctg}x + \log_2 x + 3\ln x + e^x$;

5) $y = \dfrac{3}{x^3}$; 6) $y = 4x\sqrt{x}$; 7) $y = x\ln x$;

8) $y = \dfrac{5x^3 - 1}{x^2 + 1}$; 9) $y = \dfrac{\sin x}{x}$; 10) $y = \dfrac{x\sin x}{\ln x}$;

11) $y = \left(x^2 + 7x - 4\right)\mathrm{arctg}\ x$; 12) $y = x^{-3}\arcsin x$.

Відповідь: 1) $15x^2 - 6x + 8$; 2) $y = 4x^3 + 4x - 1$; 3) $y = -4x - 7$;

4) $3x^2 + 6x + \cos x - \sin x + \dfrac{2}{\cos^2 x} + \dfrac{3}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{x\ln 2} + \dfrac{3}{x} + e^x$; 5) $-\dfrac{9}{x^4}$; 6) $6\sqrt{x}$;

7) $\ln x + 1$; 8) $\dfrac{5x^4 + 15x^2 + 2x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$; 9) $\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$; 10) $\dfrac{(\sin x + x\cos x)\ln x - \sin x}{\ln^2 x}$;

11) $(2x + 7)\ \mathrm{arctg}\ x + \left(x^2 + 7x - 4\right)\dfrac{1}{1 + x^2}$; 12) $-\dfrac{3\arcsin x}{x^4} + \dfrac{1}{x^3\sqrt{1 - x^2}}$.

Задача 5. Знайти похідні функцій:

1) $y = \dfrac{5x^3}{2} - \dfrac{3x^2}{7} + \dfrac{x}{4} - 1$; 2) $y = x^3 + \dfrac{2x^2}{3} - \dfrac{x}{2}$; 3) $y = -\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{7x}{6} + 2$;

4) $y = \dfrac{4}{5}x\sqrt[4]{x}$; 5) $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}} - \dfrac{\sqrt[4]{x}}{3}$; 6) $y = \dfrac{1}{3}x^3\sin x$;

7) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$; 8) $y = x^3\,\mathrm{tg}\,x - 10x$; 9) $y = \mathrm{ctg}\,x - 2x + 3$;

10) $y = \dfrac{3x + 2}{\lg x}$; 11) $y = \dfrac{\mathrm{ctg}x}{\ln x}$; 12) $y = x\cos x + x^2\sin x$;

13) $y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$; 14) $y = 3^x\log_3 x - \dfrac{10}{x}$; 15) $y = x^2 5^x\,\mathrm{tg}\,x$.

Відповідь: 1) $\frac{15x^2}{2}-\frac{6x}{7}+\frac{1}{4}$; 2) $3x^2+\frac{4x}{3}-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{2x}{3}-\frac{7}{6}$; 4) $\sqrt[4]{x}$;

5) $-\frac{3}{5x\sqrt[5]{x^3}}-\frac{1}{12\sqrt[4]{x^3}}$; 6) $x^2\sin x+\frac{x^3}{3}\cos x$; 7) $\frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$;

8) $3x^2\operatorname{tg}x+\frac{x^3}{\cos^2 x}$; 9) $-\frac{1}{\sin^2 x}-2$; 10) $\frac{3x\lg x-3x-2}{x\lg^2 x}$;

11) $-\frac{x\ln x+\sin x\cos x}{x\sin^2 x\ln^2 x}$; 12) $x\sin x+(1+x^2)\cos x$; 13) $\frac{\arccos x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x}$;

14) $3^x\left(\ln 3\log_3 x+\frac{1}{x\ln x}\right)+\frac{10}{x^2}$; 15) $x5^x\operatorname{tg}x(2+x\ln 5)+\frac{x^2 5^x}{\cos^2 x}$.

3. Фізичний та геометричний зміст похідної.

Механічний зміст похідної: миттєва швидкість матеріальної точки – це похідна від пройденого шляху $S(t)$ за часом t: $v=S'(t)$.

Фізичний зміст похідної: якщо функція $y=f(x)$ описує деякий фізичний процес, то її похідна $y'=f'(x)$ – швидкість зміни цього процесу.

Геометричний зміст похідної: похідна функції $y=f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної $y=kx+b$ до графіка функції: $k=\operatorname{tg}\varphi=y'(x_0)$.

$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$ – рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці $(x_0; y_0)$.

$y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$ – рівняння нормалі до графіка функції $y=f(x)$ в точці $(x_0; y_0)$.

Задача 6. Точка рухається прямолінійно за законом $S=t^4-t^3+2t+2$, де час t виражається в секундах, а відстань S – у сантиметрах. Знайти швидкість і прискорення в кінці третьої секунди.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} v=S'=4t^3-3t^2+2 \\ a=v'=S''=12t^2-6t \end{aligned} \;\Rightarrow\; \begin{aligned} v(3)=4\cdot 3^3-3\cdot 3^2+2=83\,см/с; \\ a(3)=12\cdot 3^2-6\cdot 3=90\,см/с^2. \end{aligned}$$

Відповідь: $v=83\,см/с$; $a=90см/с^2$.

Задача 7. Тіло масою 6 кг рухається прямолінійно за законом $S = t^3/3 - t^2 + 2t$, де t вимірюється в секундах, а S – у сантиметрах. Знайти кінетичну енергію $K = \frac{mv^2}{2}$ тіла через 2 секунди.

Відповідь: $12000\,\text{ерг}$.

Задача 8. Кількість електрики, що протікає через провідник, задається законом $Q = 3t^2 + 2t + 3$ (кулонів). Знайти силу струму $I = Q'(t)$ в кінці десятої секунди.

Відповідь: $I = 62A$.

Задача 9. Знайти кут нахилу дотичної до графіку функції $y = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$ в точці $x_0 = 1$.

Розв'язання:

Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної $k = \text{tg}\alpha = y'(x_0)$.

$$y'(x) = \left(\frac{x^2\sqrt{3}}{2}\right)' = x\sqrt{3}.$$

Тоді $y'(1) = \sqrt{3}$, $\text{tg}\,\alpha = k = \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Відповідь: $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Задача 10. Знайти кут нахилу дотичної до графіку функції $y = x^2 \ln x$ в точці $x_0 = 1$.

Відповідь: $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Задача 11. Скласти рівняння дотичної і нормалі до графіку функції $y = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ в точці $x_0 = 2$.

Відповідь: $6x + y - 5 = 0$; $x - 6y - 44 = 0$.

Задача 12. Скласти рівняння дотичної до графіку функції $y=(x^3+1)/3$ в точці його перетину з віссю абсцис.

Відповідь: $x+y+1=0$.

Задача 13. В якій точці дотична до параболи $y=x^2-2x$ буде паралельна

1) осі Ox? 2) прямій $y=2x-1$?

Відповідь: 1) $M(1;-1)$; 2) $N(2;0)$.

Домашнє завдання

Задача 1. Знайти похідні функцій:

1) $y=5x^3-3x^2+x-1$; 2) $y=x^4+2x^2-x$; 3) $y=-2x^2-7x+2$;

4) $y=x-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{3x^3}$; 5) $y=\frac{1}{2}x\sqrt[3]{x}$; 6) $y=7x^5+\operatorname{tg}x-2x-1$;

7) $y=(2x-1)\cdot x^3$; 8) $y=\frac{1}{\sqrt{x^3}}-3\sqrt[3]{x}$; 9) $y=\log_2 x-2x^3-\frac{1}{x}$;

10) $y=(x^2+1)/\sqrt{x}$; 11) $y=x^2\sin x-2x^3+9$; 12) $y=x\log_2 x-\sin x$;

13) $y=\frac{\arcsin x}{\lg x}$; 14) $y=2^x\log_5 x+\frac{1}{x}$; 15) $y=x^2\sin x\cos x$.

Задача 2. Кількість теплоти, потрібної для нагрівання 1гр води від 0^0 до t, визначається за законом $W=t+0{,}00002\,t^2+0{,}0000003\,t^3$. Обчислити теплоємність води $Q=W'(t)$ для $t=30^0C$.

Задача 3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3$ в точці $A(2;8)$. Знайти точку перетину дотичної з віссю Ox.

Задача 4. Скласти рівняння нормалі до параболи $y=x^2-x+1$, перпендикулярної до прямої $6x-2y-5=0$.

Задача 5. Скласти рівняння дотичної до параболи $y^2=2x-4$, яка буде паралельною до прямої $4x-y+5=0$.

Задача 6. Скласти рівняння дотичної до кривої $y=\sqrt{2x-4}$, яка буде паралельною до прямої $x-y+1=0$.

Задача 7. В якій точці дотична до параболи $y=x^2+x$ буде паралельна: 1) осі Ox? 2) прямій $y=2x$?

Задача 8. Знайти кути між кривими $y=x^2$ та $y=x^3$ в точці їх перетину.