

## Розділ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

### Практичне заняття № 4.1

## ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

1. Знаходження похідної за означенням.
2. Знаходження похідних за таблицею та правилами диференціювання.
3. Фізичний та геометричний зміст похідної.

#### 1. Знаходження похідної за означенням.

Похідною функції  $y = f(x)$  в точці  $x = x_0$  називається границя відношення приросту функції  $\Delta f(x)$  до приросту аргументу  $\Delta x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

**Задача 1.** Знайти похідну функції  $y = 5x$  за означенням.

*Розв'язання:*

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5(x + \Delta x) - 5x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5x + 5\Delta x - 5x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x} = 5. \end{aligned}$$

*Відповідь:* 5.

**Задача 2.** Знайти похідну за означенням:

$$1) y = x^2 + 1; \quad 2) y = 2^x.$$

*Відповідь:* 1)  $2x$ ; 2)  $2^x \ln 2$ .

## 2. Знаходження похідних за таблицею та правилами диференціювання.

Таблиця похідних:

	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
1	$C$	0
2	$x$	1
3	$x^n$	$nx^{n-1}$
4	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5	$a^x$	$a^x \ln a$
6	$e^x$	$e^x$
7	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
8	$\ln x$	$\frac{1}{x}$

	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
9	$\sin x$	$\cos x$
10	$\cos x$	$-\sin x$
11	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
12	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
16	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання:

1)  $(Cu)' = Cu'$ ;                      3)  $(uv)' = u'v + uv'$ ;  
 2)  $(u+v)' = u' + v'$ ;                4)  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ .

**Задача 3.** Знайти похідну функції  $y = \sin x \cdot \operatorname{tg} x + 2x$ .

*Розв'язання:*

$$y' = (\sin x \cdot \operatorname{tg} x)' + (2x)' = (\sin x)' \operatorname{tg} x + \sin x (\operatorname{tg} x)' + 2 = \cos x \cdot \operatorname{tg} x + \sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 2 =$$

$$= \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} + 2$$

*Відповідь:*  $\sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} + 2$ .

**Задача 4.** Знайти похідні функцій:

1)  $y = 5x^3 - 3x^2 + x - 1$ ; 2)  $y = x^4 + 2x^2 - x$ ; 3)  $y = -2x^2 - 7x + 2$ ;

4)  $y = 5 + x^3 + 3x^2 + \sin x + \cos x + 2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x + \log_2 x + 3 \ln x + e^x$ ;

5)  $y = \frac{3}{x^3}$ ;      6)  $y = 4x\sqrt{x}$ ;      7)  $y = x \ln x$ ;

8)  $y = \frac{5x^3 - 1}{x^2 + 1}$ ;      9)  $y = \frac{\sin x}{x}$ ;      10)  $y = \frac{x \sin x}{\ln x}$ ;

11)  $y = (x^2 + 7x - 4) \operatorname{arctg} x$ ;      12)  $y = x^{-3} \arcsin x$ .

*Відповідь:* 1)  $15x^2 - 6x + 8$ ;    2)  $y = 4x^3 + 4x - 1$ ;    3)  $y = -4x - 7$ ;

4)  $3x^2 + 6x + \cos x - \sin x + \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin^2 x} + \frac{1}{x \ln 2} + \frac{3}{x} + e^x$ ;    5)  $-\frac{9}{x^4}$ ;    6)  $6\sqrt{x}$ ;

7)  $\ln x + 1$ ; 8)  $\frac{5x^4 + 15x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2}$ ; 9)  $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ ; 10)  $\frac{(\sin x + x \cos x) \ln x - \sin x}{\ln^2 x}$ ;

11)  $(2x + 7) \operatorname{arctg} x + (x^2 + 7x - 4) \frac{1}{1 + x^2}$ ;    12)  $-\frac{3 \arcsin x}{x^4} + \frac{1}{x^3 \sqrt{1 - x^2}}$ .

**Задача 5.** Знайти похідні функцій:

1)  $y = \frac{5x^3}{2} - \frac{3x^2}{7} + \frac{x}{4} - 1$ ;    2)  $y = x^3 + \frac{2x^2}{3} - \frac{x}{2}$ ;    3)  $y = -\frac{x^2}{3} - \frac{7x}{6} + 2$ ;

4)  $y = \frac{4}{5} x \sqrt[4]{x}$ ;    5)  $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} - \frac{\sqrt[4]{x}}{3}$ ;    6)  $y = \frac{1}{3} x^3 \sin x$ ;

7)  $y = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$ ;    8)  $y = x^3 \operatorname{tg} x - 10x$ ;    9)  $y = \operatorname{ctg} x - 2x + 3$ ;

10)  $y = \frac{3x + 2}{\lg x}$ ;    11)  $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln x}$ ;    12)  $y = x \cos x + x^2 \sin x$ ;

13)  $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$ ;    14)  $y = 3^x \log_3 x - \frac{10}{x}$ ;    15)  $y = x^2 5^x \operatorname{tg} x$ .

*Відповідь:* 1)  $\frac{15x^2}{2} - \frac{6x}{7} + \frac{1}{4}$ ;    2)  $3x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{1}{2}$ ;    3)  $-\frac{2x}{3} - \frac{7}{6}$ ;    4)  $\sqrt[4]{x}$ ;

5)  $-\frac{3}{5x\sqrt[5]{x^3}} - \frac{1}{12\sqrt[4]{x^3}}$ ;    6)  $x^2 \sin x + \frac{x^3}{3} \cos x$ ;    7)  $\frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2}$ ;

8)  $3x^2 \operatorname{tg} x + \frac{x^3}{\cos^2 x}$ ;    9)  $-\frac{1}{\sin^2 x} - 2$ ;    10)  $\frac{3x \lg x - 3x - 2}{x \lg^2 x}$ ;

$$11) -\frac{x \ln x + \sin x \cos x}{x \sin^2 x \ln^2 x}; \quad 12) x \sin x + (1 + x^2) \cos x; \quad 13) \frac{\arccos x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2} \arccos^2 x};$$

$$14) 3^x \left( \ln 3 \log_3 x + \frac{1}{x \ln x} \right) + \frac{10}{x^2}; \quad 15) x 5^x \operatorname{tg} x (2 + x \ln 5) + \frac{x^2 5^x}{\cos^2 x}.$$

### 3. Фізичний та геометричний зміст похідної.

Механічний зміст похідної: миттєва швидкість матеріальної точки – це похідна від пройденого шляху  $S(t)$  за часом  $t$ :  $v = S'(t)$ .

Фізичний зміст похідної: якщо функція  $y = f(x)$  описує деякий фізичний процес, то її похідна  $y' = f'(x)$  – швидкість зміни цього процесу.

Геометричний зміст похідної: похідна функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної  $y = kx + b$  до графіка функції:  $k = \operatorname{tg} \varphi = y'(x_0)$ .

$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$  – рівняння дотичної до графіка функції  $y = f(x)$  в точці  $(x_0; y_0)$ .

$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$  – рівняння нормалі до графіка функції  $y = f(x)$  в точці  $(x_0; y_0)$ .

**Задача 6.** Точка рухається прямолінійно за законом  $S = t^4 - t^3 + 2t + 2$ , де час  $t$  виражається в секундах, а відстань  $S$  – у сантиметрах. Знайти швидкість і прискорення в кінці третьої секунди.

*Розв'язання:*

$$v = S' = 4t^3 - 3t^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad v(3) = 4 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 = 83 \text{ см/с};$$

$$a = v' = S'' = 12t^2 - 6t \quad \Rightarrow \quad a(3) = 12 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 90 \text{ см/с}^2.$$

*Відповідь:*  $v = 83 \text{ см/с}; a = 90 \text{ см/с}^2$ .

**Задача 7.** Тіло масою 6 кг рухається прямолінійно за законом  $S = t^3/3 - t^2 + 2t$ , де  $t$  вимірюється в секундах, а  $S$  – у сантиметрах. Знайти кінетичну енергію  $K = \frac{mv^2}{2}$  тіла через 2 секунди.

*Відповідь:* 12000 ерг.

**Задача 8.** Кількість електрики, що протікає через провідник, задається законом  $Q = 3t^2 + 2t + 3$  (кулонів). Знайти силу струму  $I = Q'(t)$  в кінці десятої секунди.

*Відповідь:*  $I = 62A$ .

**Задача 9.** Знайти кут нахилу дотичної до графіку функції  $y = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$  в точці  $x_0 = 1$ .

*Розв'язання:*

Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної  $k = \operatorname{tg} \alpha = y'(x_0)$ .

$$y'(x) = \left( \frac{x^2\sqrt{3}}{2} \right)' = x\sqrt{3}.$$

$$\text{Тоді } y'(1) = \sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} \alpha = k = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

*Відповідь:*  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

**Задача 10.** Знайти кут нахилу дотичної до графіку функції  $y = x^2 \ln x$  в точці  $x_0 = 1$ .

*Відповідь:*  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

**Задача 11.** Скласти рівняння дотичної і нормалі до графіку функції  $y = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$  в точці  $x_0 = 2$ .

*Відповідь:*  $6x + y - 5 = 0$ ;  $x - 6y - 44 = 0$ .

**Задача 12.** Скласти рівняння дотичної до графіку функції  $y = (x^3 + 1)/3$  в точці його перетину з віссю абсцис.

*Відповідь:*  $x + y + 1 = 0$ .

**Задача 13.** В якій точці дотична до параболи  $y = x^2 - 2x$  буде паралельна

1) осі  $Ox$ ?    2) прямій  $y = 2x - 1$ ?

*Відповідь:* 1)  $M(1; -1)$ ;    2)  $N(2; 0)$ .

### Домашнє завдання

**Задача 1.** Знайти похідні функцій:

1)  $y = 5x^3 - 3x^2 + x - 1$ ;    2)  $y = x^4 + 2x^2 - x$ ;    3)  $y = -2x^2 - 7x + 2$ ;

4)  $y = x - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x^3}$ ;    5)  $y = \frac{1}{2}x^3\sqrt{x}$ ;    6)  $y = 7x^5 + \operatorname{tg} x - 2x - 1$ ;

7)  $y = (2x - 1) \cdot x^3$ ;    8)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}} - 3\sqrt[3]{x}$ ;    9)  $y = \log_2 x - 2x^3 - \frac{1}{x}$ ;

10)  $y = (x^2 + 1)/\sqrt{x}$ ;    11)  $y = x^2 \sin x - 2x^3 + 9$ ;    12)  $y = x \log_2 x - \sin x$ ;

13)  $y = \frac{\arcsin x}{\lg x}$ ;    14)  $y = 2^x \log_5 x + \frac{1}{x}$ ;    15)  $y = x^2 \sin x \cos x$ .

**Задача 2.** Кількість теплоти, потрібної для нагрівання 1 гр води від  $0^0$  до  $t$ , визначається за законом  $W = t + 0,00002t^2 + 0,0000003t^3$ . Обчислити теплоємність води  $Q = W'(t)$  для  $t = 30^0 \text{ C}$ .

**Задача 3.** Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої  $y = x^3$  в точці  $A(2;8)$ . Знайти точку перетину дотичної з віссю  $Ox$ .

**Задача 4.** Скласти рівняння нормалі до параболи  $y = x^2 - x + 1$ , перпендикулярної до прямої  $6x - 2y - 5 = 0$ .

**Задача 5.** Скласти рівняння дотичної до параболи  $y^2 = 2x - 4$ , яка буде паралельною до прямої  $4x - y + 5 = 0$ .

**Задача 6.** Скласти рівняння дотичної до кривої  $y = \sqrt{2x - 4}$ , яка буде паралельною до прямої  $x - y + 1 = 0$ .

**Задача 7.** В якій точці дотична до параболи  $y = x^2 + x$  буде паралельна: 1) осі  $Ox$ ? 2) прямій  $y = 2x$ ?

**Задача 8.** Знайти кути між кривими  $y = x^2$  та  $y = x^3$  в точці їх перетину.