Практичне заняття № 3.4

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ НА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

1. **Дослідження функції на неперервність.**
2. **Точки розриву та побудова графіків деяких розривних функцій.**

1. Дослідження функції на неперервність.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0,якщо існує границя в цій точці і вона дорівнює значенню функції в цій точці $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо для будь-якого ε>0 існує таке число $\delta(\varepsilon)$>0, що як тільки $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргумента відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Задача 1. Довести, що функція $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ є неперервною в точці $x = 2$.

Розв'язання:

Обчислимо границю цієї функції в точці $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$$

Отже, функція неперервна в точці $x = 2$, тому що $f(2) = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$ і $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

Задача 2. За допомогою “$\varepsilon - \delta$” довести неперервність функції $y = ax + b$ в довільній точці $x \in R$.

Розв'язання:

Візьмемо будь-яке ε>0. Тоді для будь-якого $x_0 \in R$ маємо

$$|f(x) - f(x_0)| = |ax + b - ax_0 - b| = |a||x - x_0| < \varepsilon.$$

Ця нерівність виконується, як тільки $|x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{|a|} = \delta(\varepsilon)$.

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що як тільки $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, тобто функція неперервна для будь-якого $x \in R$.

Задача 3. Довести, що функція $y = x^2$ неперервна в довільній точці x_0.

Розв'язання:

Дійсно, $y_0 = x_0^2$; $\quad y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2$;

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (2x \cdot \Delta x + \Delta x^2) = 2x_0 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x^2 = 0.$$

Задача 4. Показати, що функції неперервні у всій своїй області визначення:

1) $y = 2x^2 + 5$, 2) $y = \sqrt{x}$, 3) $y = tgx$.

2. Точки розриву та побудова графіків деяких розривних функцій.

Функція $y = f(x)$ називається розривною в точці x_0, якщо в ній не виконується умова неперервності $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$. Тоді точка x_0 називається точкою розриву.

Існує наступна класифікація точок розриву:

точки розриву I роду (усувні) – якщо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$;

точки розриву I роду (неусувні) – якщо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$;

точки розриву II роду – не існує хоча б одна з границь $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Функція $y = f(x)$ є неперервною на проміжку *X*, якщо вона неперервна у кожній точці цього проміжку.

Задача 5. Довизначити функцію $y = (x^2 - x)/x$ в точці розриву так, щоб вона стала неперервною.

Розв'язання:

Функція $y=(x^2-x)/x$ невизначена в точці $x=0$, але має в цій точці рівні односторонні границі:

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to 0-0}(x-1)=-1; \qquad \lim_{x\to 0+0}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to 0+0}(x-1)=-1.$$

Тому $x=0$ є точкою усувного розриву. Отже, досить покласти $f(0)=-1$, щоб функція стала неперервною.

Відповідь: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x}, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}.$

Задача 6. Довизначити функції в точці розриву, щоб вони стала неперервними:

1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$; 3) $y=\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Відповідь:1) $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$; 2) $y=\begin{cases}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}, & x\neq 2\\ \dfrac{8}{3}, & x=2\end{cases}$; 3) $y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x\neq 0\\ 0{,}5 & x=0\end{cases}$

Задача 7. Дослідити на неперервність та побудувати схематично графік функції $y=\begin{cases}x-2, & x\le 3\\ 6-x, & x>3\end{cases}$.

Розв'язання:

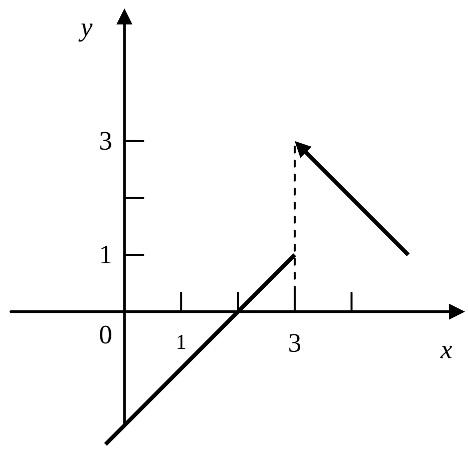
Функції $y_1=x-2$ та $y_2=6-x$ є неперервними на своїй області визначення як цілі функції. Отже функція $y=\begin{cases}x-2, & x\le 3\\ 6-x, & x>3\end{cases}$ неперервна на проміжках $(-\infty;3]$ і $(3;+\infty)$.

Перевіримо, чи виконуються умови неперервності в точці $x=3$:

1) $f(3)=3-2=1$ – функція визначена;

2) $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3-0}(x-2) = 1;$ $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3+0}(6-x) = 3$ − односторонні границі існують;

3) $f(3) = \lim\limits_{x\to 3-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3+0} f(x)$ − границі зліва і справа не співпадають.



Отже, функція має розрив в точці $x = 3$

Це точка розриву I роду.

Відповідь: $x = 3$ − точка розриву I роду.

Задача 8. Дослідити на неперервність та побудувати схематично графіки функцій:

1) $y = \begin{cases} x^2, & x \le 3 \\ x+6, & x > 3 \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} 4-x^2, & x < 2 \\ -1, & x \ge 2 \end{cases}$ 7) $y = \begin{cases} |x|, & x \in [-1;1] \\ 1, & x \notin [-1;1] \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} -x, & x \le -1 \\ x^2, & -1 < x \le 0 \\ x, & 0 < x < 2 \\ 2, & x \ge 2 \end{cases}$ 5) $y = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ (x-1)^2, & 0 < x \le 2 \\ 3-x, & x > 2 \end{cases}$ 8) $y = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ x^3, & -1 \le x \le 1 \\ 2-x^2, & x > 1 \end{cases}$

3) $y = 2 + \dfrac{1}{1-x}$ 6) $y = 5^{\frac{1}{x+3}}$ 9) $y = 2^{\frac{1}{|x-2|}} - 1$.

Відповідь: 1) неперервна; 2) неперервна; 3) $x = 1$ − розрив II роду; 4) $x = 2$ − розрив I роду; 5) $x = 0$ − розрив I роду; 6) $x = -3$ − розрив II роду; 7) неперервна; 8) $x = -1$ − розрив I роду; 9) $x = 2$ − усувний розрив.

Домашнє завдання

Задача 1. Показати, що функція неперервна у будь-якій точці x_0 з її області визначення:

1) $y = x^3 + 4$, 2) $y = e^{-2x}$, 3) $y = \sin x$, 4) $y = \ln(x-7)$.

Задача 2. Дослідити функції на неперервність в точках $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$:

1) $y = \dfrac{x^2 - x}{x}$; 2) $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$;

3) $y = 300^{\frac{1}{x}}$; 4) $y = 0{,}01^{\frac{5}{2-x}}$.

Задача 3. Дослідити на неперервність та побудувати схематично графіки функцій:

1) $y = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ x-3, & x > 0 \end{cases}$; 2) $y = \begin{cases} x^3, & x \le 0 \\ (x-1)^2, & 0 < x \le 3 \\ 7-x, & x > 3 \end{cases}$;

3) $y = 1 - \dfrac{1}{1-x^2}$; 4) $y = \begin{cases} \sin x, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 2 \\ 3-x, & x > 2 \end{cases}$;

5) $y = 8^{\frac{1}{x-3}} + 1$; 6) $y = 5^{\frac{1}{x+2}} - 5$.