

## Практичне заняття № 1.7

## ВЕКТОРНИЙ І МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

1. Векторний добуток векторів.

2. Мішаний добуток векторів.

1. Векторний добуток векторів.

Векторним добутком векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  називається такий вектор  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ , що:

$$1) |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi;$$

$$2) \vec{c} \perp \vec{a} \text{ і } \vec{c} \perp \vec{b};$$

3) вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  утворюють праву трійку (з кінця  $\vec{c}$  найкоротший поворот від  $\vec{a}$  до  $\vec{b}$  відбувається проти годинникової стрілки).

Якщо вектори задано їх координатами  $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ ,  $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ , то

$$\text{векторний добуток} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Властивості векторного добутку:

$$1) \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a};$$

$$2) \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ (умова колінеарності векторів);}$$

$$3) (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b});$$

$$4) \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c};$$

5) площа паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , як на сторонах дорівнює модулю їх векторного добутку  $S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$ .

Векторний добуток позначається також символом  $[\vec{a}, \vec{b}]$ .

**Задача 1.** Знайти векторний добуток  $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$  і  $\vec{b} = \{-4; 5; -6\}$  та його модуль.

*Розв'язання:*

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -27\bar{i} - 6\bar{j} + 13\bar{k} = \{-27; -6; 13\}.$$

Модуль векторного добутку дорівнює:

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{(-27)^2 + (-6)^2 + 13^2} = \sqrt{934} \approx 30,56.$$

Відповідь:  $\bar{a} \times \bar{b} = \{-27; -6; 13\}$ ;  $|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{934} \approx 30,56$ .

**Задача 2.** Знайти площу трикутника з вершинами в точках  $A(0; -1; 2)$ ,  $B(-1; -2; 7)$  і  $C(1; -2; 6)$ .

*Розв'язання:*

Знайдемо координати векторів  $\overline{AB}$  і  $\overline{AC}$ :

$$\overline{AB} = \{-1 - 0; -2 - (-1); 7 - 2\} = \{-1; -1; 5\}; \quad \overline{AC} = \{1 - 0; -2 - (-1); 6 - 2\} = \{1; -1; 4\}.$$

Площа трикутника  $ABC$  дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах  $\overline{AB}$  і  $\overline{AC}$ , як на сторонах, тобто

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|.$$

Обчислимо векторний добуток

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -\bar{i} + 7\bar{j} + 2\bar{k} = \{-1; 7; 2\}.$$

Тоді  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{54}$  кв.од.

Відповідь:  $\sqrt{54}/2$ .

**Задача 3.** Знайти векторний добуток векторів  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$ :

1)  $\bar{a} = \{1; 2; -2\}$ ,  $\bar{b} = \{8; 6; 4\}$ ;

2)  $\bar{a} = \{1; -5; 3\}$ ,  $\bar{b} = \{0; -1; -3\}$ ;

$$3) \bar{a} = 2\bar{i} + 11\bar{j} - 10\bar{k}, \quad \bar{b} = 3\bar{i} + 6\bar{j} - 2\bar{k};$$

$$4) \bar{a} = 7\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}, \quad \bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{k}.$$

Відповідь: 1)  $\{20; -20; -10\}$ ; 2)  $\{18; 3; -1\}$ ; 3)  $\{38; -26; -21\}$ ; 4)  $\{-12; 23; -8\}$ .

**Задача 4.** Обчислити  $|\bar{a} \times \bar{b}|$ , якщо  $|\bar{a}| = 10$ ,  $|\bar{b}| = 2$  і  $\bar{a} \cdot \bar{b} = 12$ .

Відповідь: 16.

**Задача 5.** Вектори  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  утворюють кут  $\varphi = 2\pi/3$ , а їх модулі  $|\bar{a}| = 1$ ,  $|\bar{b}| = 2$ . Обчислити:

$$1) \bar{a} \times \bar{a}; \quad 2) |\bar{a} \times \bar{b}|; \quad 3) (\bar{a} \times \bar{b})^2; \quad 4) ((\bar{a} + 3\bar{b}) \times (3\bar{a} - \bar{b}))^2.$$

Відповідь: 1) 0; 2)  $\sqrt{3}$ ; 3) 3; 4) 300.

**Задача 6.** Дано точки  $A(4; 1; 4)$ ,  $B(3; 4; 1)$ ,  $C(5; 4; 3)$ . Знайти:

$$1) \overline{AB} \times \overline{BC}; \quad 2) (\overline{BC} - 2\overline{CA}) \times \overline{CB}.$$

Відповідь: 1)  $\{6; -4; -6\}$ ; 2)  $\{-12; 8; 12\}$ .

**Задача 7.** Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах  $\bar{a} = 8\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}$  і  $\bar{b} = -2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$ , як на сторонах.

Відповідь:  $18\sqrt{2}$ .

**Задача 8.** Обчислити синус кута, утвореного векторами  $\bar{a} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$  і  $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 6\bar{k}$ .

Відповідь:  $\sin \varphi = 5\sqrt{17}/21$ .

**Задача 9.** Обчислити висоту  $h_a$  паралелограма, побудованого на векторах  $\bar{a} = 2\bar{j} + \bar{k}$  і  $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{k}$ .

Відповідь:  $\sqrt{21}/5$ .

## 2. Мішаний добуток векторів.

Мішаним добутком векторів  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  і  $\bar{c}$  називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора  $\bar{a}$  на векторний добуток  $\bar{b} \times \bar{c}$ , тобто

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}.$$

Якщо вектори задано своїми координатами  $\bar{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ ,  $\bar{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ ,  $\bar{c} = \{c_1; c_2; c_3\}$ , то мішаний добуток визначається формулою

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Вектори  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  і  $\bar{c}$  є компланарними (лінійно залежними), якщо мішаний добуток  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$ .

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  і  $\bar{c}$  як на сторонах дорівнює модулю їх мішаного добутку  $V = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$ .

**Задача 10.** Перевірити, чи є вектори  $\bar{a} = -\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$ ,  $\bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{j} - 4\bar{k}$  і  $\bar{c} = -3\bar{i} + 12\bar{j} + 6\bar{k}$  компланарними.

*Розв'язання:*

Вектори  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  і  $\bar{c}$  є компланарними тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю. Обчислимо мішаний добуток

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 36 + 48 - 18 - 36 - 48 = 0$$

Отже, вектори компланарні.

*Відповідь:* вектори компланарні.

**Задача 11.** Дано вектори  $\bar{a} = \{1; 2; 1\}$ ,  $\bar{b} = \{2; -1; 0\}$  і  $\bar{c} = \{1; 0; 1\}$ . Знайти  $\bar{c}(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})$ .

*Розв'язання:*

$$\bar{c}(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b}) = \bar{c}(\bar{a} \times \bar{a} - \bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{a} - \bar{b} \times \bar{b}) = \bar{c}(\bar{b} \times \bar{a} + \bar{b} \times \bar{a}) = 2\bar{c}\bar{b}\bar{a} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

*Відповідь:* 8.

**Задача 12.** Знайти мішаний добуток векторів  $\bar{a} = \{1; 2; 3\}$ ,  $\bar{b} = \{3; 1; 2\}$  та  $\bar{c} = \{2; 3; 1\}$ .

*Відповідь:* 18.

**Задача 13.** Встановити, чи утворюють вектори  $\bar{a} = \{3; -2; 1\}$ ,  $\bar{b} = \{2; 1; 2\}$  та  $\bar{c} = \{3; -1; -2\}$  базис у просторі.

*Відповідь:* так, вектори утворюють базис.

**Задача 14.** Чи належать точки  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(0; 1; 5)$ ,  $C(-1; 2; 1)$  і  $D(2; 1; 4)$  одній площині?

*Відповідь:* ні, не належать.

**Задача 15.** Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах  $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ ,  $\bar{b} = -3\bar{j} + \bar{k}$  і  $\bar{c} = 2\bar{j} + 5\bar{k}$ .

*Відповідь:* 51.

### Домашнє завдання

**Задача 1.** Дано вектори  $\bar{a} = \{3; -1; 2\}$  і  $\bar{b} = \{1; 2; -1\}$ . Знайти координати векторів:

1)  $\bar{a} \times \bar{b}$ ;      2)  $(2\bar{a} + \bar{b}) \times (2\bar{a} - \bar{b})$ .

**Задача 2.** Обчислити  $\bar{a} \cdot \bar{b}$ , якщо  $|\bar{a}| = 3$ ,  $|\bar{b}| = 26$  і  $|\bar{a} \times \bar{b}| = 72$ .

**Задача 3.** Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах  $\bar{a} = 3\bar{i} - 5\bar{j} - 2\bar{k}$  і  $\bar{b} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 10\bar{k}$ , як на сторонах.

**Задача 4.** Перевірити, чи є вектори  $\bar{a} = \{3; 2; 2\}$ ,  $\bar{b} = \{1; -1; 3\}$  та  $\bar{c} = \{1; 9; -11\}$  компланарними.

**Задача 5.** Дано вектори  $\bar{a} = \{1; -2; 2\}$  і  $\bar{b} = \{-3; 0; 4\}$ . Знайти вектор  $\bar{c}$ , якщо  $\bar{c} \parallel \bar{a} \times \bar{b}$  і  $|\bar{c}|^2 = 10 |\bar{b}|$ .

**Задача 6.** Знайти висоту  $AH$  трикутника з вершинами  $A(2; -1; 2)$ ,  $B(1; 2; -1)$  і  $C(3; 2; 1)$ .