

Практичне заняття № 1.6

СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

1. Скалярний добуток векторів. Властивості скалярного добутку.
2. Кут між векторами. Умова перпендикулярності векторів.
3. Проекція вектора на вектор. Робота сили.

1. Скалярний добуток векторів. Властивості скалярного добутку.

Скалярним добутком $\vec{a} \vec{b}$ векторів \vec{a} і \vec{b} називається число, яке дорівнює добутку їх модулів на косинус кута φ між ними:

$$\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Якщо вектори задано їх координатами $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$, то скалярний добуток дорівнює:

$$\vec{a} \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Властивості скалярного добутку:

- 1) $\vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$;
- 2) $(\lambda \vec{a}) \vec{b} = \vec{a} (\lambda \vec{b}) = \lambda \vec{a} \vec{b}$;
- 3) $\vec{a} (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \vec{b} + \vec{a} \vec{c}$;
- 4) $\vec{a} \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$;
- 5) $\vec{a} \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Скалярний добуток векторів позначається також символом (\vec{a}, \vec{b}) .

Задача 1. Кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює $\varphi = 2\pi/3$, а їх модулі $|\vec{a}| = 4$ і $|\vec{b}| = 3$. Знайти:

- 1) $\vec{a} \vec{b}$;
- 2) \vec{a}^2 ;
- 3) $(\vec{a} + \vec{b})^2$;
- 4) $(3\vec{b} - 2\vec{a})(2\vec{a} + \vec{b})$.

Розв'язання:

$$1) \bar{a} \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos \varphi = 4 \cdot 3 \cos \frac{2\pi}{3} = -6;$$

$$2) \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 = 4^2 = 16;$$

$$3) (\bar{a} + \bar{b})^2 = \bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2 = 4^2 + 2 \cdot (-6) + 3^2 = 13;$$

$$4) (3\bar{b} - 2\bar{a})(2\bar{a} + \bar{b}) = 6\bar{b}\bar{a} + 3\bar{b}^2 - 4\bar{a}^2 - 2\bar{a}\bar{b} = 4\bar{a}\bar{b} + 3\bar{b}^2 - 4\bar{a}^2 = \\ = 4 \cdot (-6) + 3 \cdot 9 - 4 \cdot 16 = -61.$$

Відповідь: 1) -6; 2) 16; 3) 13; 4) -61.

Задача 2. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a} = \{2; 3; 1\}$ і $\bar{b} = \{4; -1; 5\}$.

Розв'язання:

$$\bar{a}\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 = 8 - 3 + 5 = 10.$$

Відповідь: 10.

Задача 3. Дано вектори $\bar{a} = \{2; -1; 0\}$, $\bar{b} = \{3; 1; 7\}$. Знайти:

$$1) \bar{a}\bar{b}; \quad 2) (3\bar{a} - \bar{b})(\bar{a} + 2\bar{b}).$$

Відповідь: 1) 5; 2) -19.

Задача 4. Знайти скалярний добуток векторів \bar{a} і \bar{b} , якщо $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 6$ і вектори утворюють кут $\varphi = \pi/3$. Знайти \bar{b}^2 , $(\bar{b} - 3\bar{a})(2\bar{a} + \bar{b})$.

Відповідь: $\bar{a}\bar{b} = 15$; $\bar{b}^2 = 36$; $(\bar{b} - 3\bar{a})(2\bar{a} + \bar{b}) = -129$.

Задача 5. Модулі векторів \bar{a} і \bar{b} дорівнюють 5 і 6 відповідно, а кути їх нахилу до осі Ox складають $\varphi_1 = 4\pi/3$ і $\varphi_2 = \pi$. Обчислити:

$$1) \bar{a}\bar{b}; \quad 2) \bar{b}^2; \quad 3) (\bar{a} - \bar{b})^2; \quad 4) (\bar{a} - 3\bar{b})(5\bar{a} + 2\bar{b}).$$

Відповідь: 1) 15; 2) 36; 3) 31; 4) -286.

Задача 6. Обчислити скалярний добуток векторів \bar{a} і \bar{b} , якщо $\bar{a} = 3\bar{p} - 2\bar{q}$, а $\bar{b} = \bar{p} + 4\bar{q}$, де \bar{p} і \bar{q} - одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

Відповідь: -5.

Задача 7. Знайти довжину вектора $\bar{a} = 6\bar{m} - 8\bar{n}$, якщо \bar{m} і \bar{n} – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

Відповідь: 10.

Задача 8. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = 2\bar{m} + \bar{n}$ і $\bar{b} = \bar{m} - 2\bar{n}$, якщо \bar{m} і \bar{n} – одиничні вектори, кут між якими дорівнює 60° .

Відповідь: $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$.

Задача 9. Знайти вектор \bar{x} , який колінеарний вектору $\bar{a} = \{2; 1; -1\}$ і задовільняє умову $\bar{x} \cdot \bar{a} = 3$.

Відповідь: $(1; 1/2; -1/2)$.

2. Кут між векторами. Умова перпендикулярності векторів.

Кут між векторами \bar{a} і \bar{b} :
$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Вектори \bar{a} і \bar{b} є перпендикулярними, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю $\bar{a} \bar{b} = 0$.

Задача 10. Знайти кут між векторами $\bar{a} = \{1; 1; 0\}$, $\bar{b} = \{1; 0; 1\}$.

Розв'язання:

За означенням $\bar{a} \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos \varphi \Rightarrow$

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Отже $\cos \varphi = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$

Відповідь: $\varphi = \frac{\pi}{3}.$

Задача 11. Дано вектори $\bar{a} = m\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ і $\bar{b} = 4\bar{i} + m\bar{j} - 7\bar{k}$. При якому значенні m ці вектори будуть перпендикулярними?

Розв'язання:

За властивістю скалярного добутку

$$\bar{a} \perp \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \bar{b} = 0.$$

$$\text{Тоді} \quad \bar{a} \bar{b} = 4m + 3m - 28 = 7m - 28 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 4.$$

Відповідь: 4.

Задача 12. Знайти кут між векторами $\bar{a} = \{3; 0; 5\}$, $\bar{b} = \{0; -1; 0\}$.

$$\text{Відповідь: } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Задача 13. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$ і $\bar{b} = -2\bar{j} + \bar{k}$, як на сторонах.

$$\text{Відповідь: } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Задача 14. Відомо, що $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 5$. При якому значенні k вектори $\bar{a} + k\bar{b}$ та $\bar{a} - k\bar{b}$ будуть взаємно перпендикулярними?

$$\text{Відповідь: } k = \pm \frac{3}{5}.$$

Задача 15. Вектори \bar{a} і \bar{b} утворюють кут $\varphi = \pi/6$, а їх модулі $|\bar{a}| = \sqrt{3}$, $|\bar{b}| = 1$. Обчислити кут між векторами $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b}$ і $\bar{q} = \bar{a} - \bar{b}$.

$$\text{Відповідь: } \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Задача 16. Дано вершини трикутника $A(0; -1; 4)$, $B(-3; -1; 0)$ і $C(4; -2; 1)$. Визначити його внутрішній кут при вершині B .

$$\text{Відповідь: } \pi/4.$$

3. Проекція вектора на вектор. Робота сили.

Проекція вектора \vec{a} на вектор \vec{b} обчислюється за формулою: $pr_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

Робота сили \vec{F} при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора переміщення \vec{s} дорівнює їх скалярному добутку

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

Задача 17. Знайти проекцію вектора $\vec{b} = \{1; -3; 4\}$ на вектор $\vec{a} = \{4; 3; 0\}$.

Розв'язання:

В нашому випадку $pr_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{1 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot 0}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{-5}{5} = -1$.

Відповідь: -1 .

Задача 18. Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F} = \{2; -1; 4\}$ при прямолінійному переміщенні матеріальної точки з точки $A(-1; 0; 3)$ в точку $B(2; -3; 5)$.

Розв'язання:

Знайдемо вектор переміщення $\vec{s} = \overline{AB} = \{3; -3; 2\}$, тоді робота сили $\vec{F} = \{2; -1; 4\}$ при переміщенні матеріальної точки дорівнює

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-3) + 4 \cdot 2 = 17.$$

Відповідь: 17.

Задача 19. Дано точки $A(3; 3; -2)$, $B(0; -3; 4)$, $C(0; -3; 0)$ і $D(0; 2; -4)$. Знайти вектори $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{CD} = \vec{b}$ і $pr_{\vec{a}} \vec{b}$.

Відповідь: $\overline{AB} = \{-3; -6; 6\}$; $\overline{CD} = \{0; 5; -4\}$; $pr_{\vec{a}} \vec{b} = -6$.

Задача 20. Задані вектори $\vec{a} = \{2; 0; -2\}$ і $\vec{b} = \{-2; 1; 2\}$. Знайти проекцію вектора $2\vec{a} + \vec{b}$ на вектор \vec{b} .

Відповідь: $pr_{\vec{b}}(2\vec{a} + \vec{b}) = -7/3$.

Задача 21. Знайти роботу, яку виконує рівнодійна сил $\vec{F}_1 = \{1; -1; 2\}$ і $\vec{F}_2 = \{2; 1; -3\}$, прикладених до однієї точки, коли точка

прикладення, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(2;3;1)$ в точку $B(4; 1;-1)$.

Відповідь: 18.

Задача 22. Дано три сили $\vec{F}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{F}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{F}_3 = 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{F} = 2\vec{F}_1 + \vec{F}_2 - \vec{F}_3$, коли точка прикладення сил прямолінійно переміщується з початку координат точку $M(2;-1;-1)$.

Відповідь: 18.

Домашнє завдання

Задача 1. Модулі векторів \vec{a} і \vec{b} дорівнюють 3 і 8 відповідно, а кут між ними $\varphi = \pi/6$. Обчислити:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) \vec{a}^2 ; 3) $(2\vec{a} - \vec{b})^2$; 4) $(\vec{a} + \vec{b})(4\vec{a} - \vec{b})$.

Задача 2. Обчислити скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$, а $\vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, де \vec{p} і \vec{q} – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

Задача 3. Знайти довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $5\vec{m} + 2\vec{n}$ і $\vec{m} - 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 4\sqrt{2}$ і $|\vec{n}| = 6$ і $(\vec{m}, \vec{n}) = \pi/4$.

Задача 4. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ і $\vec{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Обчислити $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{c})$.

Задача 5. Дано вектори $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$. При якому значенні m ці вектори будуть перпендикулярними?

Задача 6. Обчислити кут між одиничними векторами \vec{m} і \vec{n} , якщо відомо, що вектори $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ і $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ взаємно перпендикулярні.

- Задача 7.** Дано вершини трикутника $A(3;2;-3)$, $B(5;1;-1)$, $C(1;-2;1)$. Знайти внутрішній кут при вершині A і зовнішній кут при вершині C .
- Задача 8.** Задані вектори $\bar{a} = \{3; -6; -1\}$, $\bar{b} = \{1; 4; -5\}$, $\bar{c} = \{3; -4; 12\}$. Знайти проекцію вектора $\bar{a} + \bar{b}$ на вектор \bar{c} .
- Задача 9.** Задані вектори $\bar{a} = \{1; 2; -2\}$, $\bar{b} = \{1; 6; 1\}$. Знайти проекцію вектора $\bar{a} + 2\bar{b}$ на вектор $\bar{a} - \bar{b}$.
- Задача 10.** Знайти роботу, яку виконує рівнодійна сил $\bar{F}_1 = \{1; 2; -2\}$ і $\bar{F}_2 = \{3; 1; -1\}$, прикладених до однієї точки, коли точка прикладення, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(4; 0; 1)$ в точку $B(1; 2; -1)$.
- Задача 11.** Знайти вектор \bar{x} , який колінеарний вектору $\bar{a} = \{2; -2; 1\}$ і задовільняє умову $\bar{x} \cdot \bar{a} = 3$.
- Задача 12.** Знайти вектор \bar{x} , який перпендикулярний до векторів $\bar{a} = \{3; 2; 2\}$ і $\bar{b} = \{18; -22; -5\}$, утворює з віссю Oy тупий кут і $|\bar{x}| = 14$.