Практичне заняття № 1.5

ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ З ВЕКТОРАМИ

1. **Поняття вектора. Лінійні операції з векторами.**
2. **Лінійна залежність і незалежність векторів. Базис. Декартова система координат. Розклад вектора за базисом.**
3. **Вектори в декартовій системі координат.**

1. Поняття вектора. Лінійні операції з векторами.

Вектором називається клас всіх рівних між собою напрямлених відрізків.

Довжиною вектора називається відстань між початком та кінцем вектора.

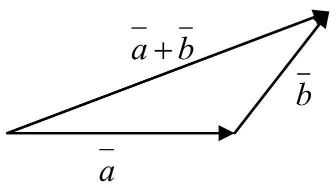
Колінеарними називаються вектори, що лежать на паралельних прямих або на одній прямій.

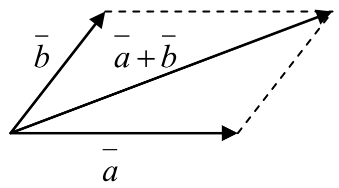
Компланарними називаються три вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, якщо, будучи відкладеними від однієї точки, вони лежать в одній площині.

Протилежним вектором $-\overline{a}$ до вектора $\overline{a}$ називається вектор, колінеарний $\overline{a}$, протилежно напрямлений і рівний йому за довжиною.

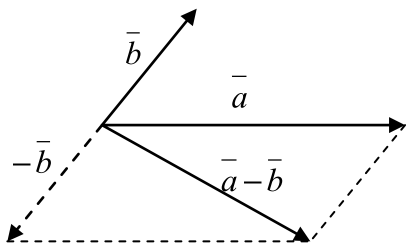
Лінійні операції з векторами:

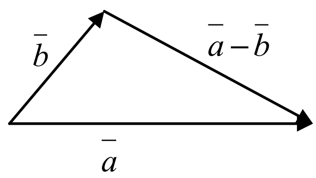
Сумою $\overline{a}+\overline{b}$ векторів $\overline{a}, \overline{b}$ називається вектор, напрямлений з початку вектора $\overline{a}$ в кінець вектора $\overline{b}$, якщо початок $\overline{b}$ збігається з кінцем вектора $\overline{a}$.





Різницею $\overline{a}-\overline{b}$ векторів $\overline{a}, \overline{b}$ називається вектор, що є сумою векторів $\overline{a}$ і $-\overline{b}$.



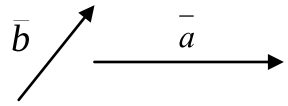


Добутком $k\overline{a}$ вектора $\overline{a}$ на число k називається вектор, довжина якого більше довжини $\overline{a}$ в k разів, а напрям збігається з напрямом $\overline{a}$ при $k>0$ і протилежний йому при $k<0$.

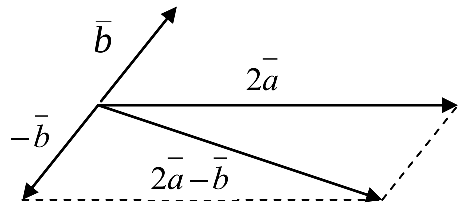
Задача 1. За даними векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ побудувати вектор $2\overline{a}-\overline{b}$.

Розв'язання:

Нехай дано два вектора $\overline{a}$ і $\overline{b}$:



Побудуємо вектор $2\overline{a}$, подовживши вектор $\overline{a}$ вдвічі. Від початку отриманого вектора відкладемо вектор $\overline{b}$, а потім протилежний йому вектор $-\overline{b}$. Додамо вектори $2\overline{a}$ і $-\overline{b}$ за правилом паралелограма:



Задача 2. За даними векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ побудувати вектори $\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{b}-\overline{a}$, $2\overline{a}$, $\overline{a}+2\overline{b}$, $-3\overline{b}$, $-\overline{a}-\overline{b}$ та $3\overline{a}-2\overline{b}$.

Задача 3. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ перпендикулярні, причому $|\overline{a}|=5$, а $|\overline{b}|=12$. Знайти $|\overline{a}+\overline{b}|$ та $|\overline{a}-\overline{b}|$.

Відповідь: $|\overline{a}+\overline{b}|=|\overline{a}-\overline{b}|=13$.

2. Лінійна залежність і незалежність векторів. Базис. Декартова система координат. Розклад вектора за базисом.

Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ називаються лінійно залежними, якщо існують числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ не всі одночасно рівні нулю і такі, що $\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\ldots+\lambda_n\overline{a}_n=0$.

Вектори називаються лінійно незалежними, якщо рівність $\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\ldots+\lambda_n\overline{a}_n=0$ виконується лише при умові $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$.

<u>Базисом на площині</u> називається впорядкована пара лінійно незалежних (неколінеарних) векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2$. Будь-який вектор $\overline{a}$ площини можна розкласти за базисом $\overline{e}_1, \overline{e}_2$:

$$\overline{a} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2.$$

Числа x, y називаються <u>координатами</u> вектора $\overline{a}$ у даному базисі.

<u>Базисом у просторі</u> називається впорядкована трійка лінійно незалежних (некомпланарних) векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$. Будь-який вектор $\overline{a}$ простору можна розкласти за базисом $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$:

$$\overline{a} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3.$$

Числа x, y, z називаються координатами вектора $\overline{a}$ у даному базисі.

<u>Прямокутною декартовою системою координат</u> у просторі називається сукупність точки O (початку координат) і базису $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ (одиничних взаємно-перпендикулярних векторів: $\overline{i} \perp \overline{j} \perp \overline{k}$, $|\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1$).

Будь-який вектор $\overline{a}$ простору можна розкласти за базисом $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$

$$\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}.$$

Числа x, y, z називаються <u>декартовими координатами</u> вектора $\overline{a}$.

Задача 4. Дано чотири вектори $\overline{a} = \{3;-5;2\}$; $\overline{b} = \{4;5;1\}$; $\overline{c} = \{-3;0;-4\}$; $\overline{d} = \{-4;5;-16\}$ в деякому базисі. Показати, що вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ самі утворюють базис і знайти координати вектора $\overline{d}$ в цьому базисі.

Розв'язання:

Перевіримо, чи є вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ лінійно залежними, тобто чи існують числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$(хоча б одне з яких не дорівнює 0) такі, що $\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} + \lambda_3\overline{c} = 0$.

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ -5\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Однорідна система має ненульові розв'язки лише якщо її визначник дорівнює нулю.

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&-5&2\\4&5&1\\-3&0&-4\end{vmatrix}=3\cdot5\cdot(-4)+4\cdot0\cdot2+(-5)\cdot1\cdot(-3)-2\cdot5\cdot(-3)-(-5)\cdot4\cdot(-4)-0\cdot1\cdot3=$$
$$=-95\neq0$$

Таким чином, вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ є лінійно незалежними і утворюють базис.

Якщо $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – базис у просторі, то будь-який інший вектор $\bar{d}$ можна єдиним чином представити як лінійну комбінацію цих векторів: $\bar{d}=x\cdot\bar{a}+y\cdot\bar{b}+z\cdot\bar{c}$, де x, y, z – координати вектора $\bar{d}$ у цьому базисі.

$$x\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}+z\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\5\\-16\end{pmatrix}\qquad\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}3x+4y-3z=-4\\-5x+5y=5\\2x+y-4z=-16\end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за правилом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&4&-3\\-5&5&0\\2&1&-4\end{vmatrix}=-60+15+30-80=-95;$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix}-4&4&-3\\5&5&0\\-16&1&-4\end{vmatrix}=80-15-240+80=-95;$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix}3&-4&-3\\-5&5&0\\2&-16&-4\end{vmatrix}=-60-240+30+80=-190;$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix}3&4&-4\\-5&5&5\\2&1&-16\end{vmatrix}=-575+100=-475.$$

За формулами Крамера:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-95}{-95}=1,\qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-190}{-95}=2,\qquad z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{-475}{-95}=5.$$

Перевірка: $\begin{cases}3\cdot1+4\cdot2-3\cdot5=-4\\-5\cdot1+5\cdot2=5\\2\cdot1+2-4\cdot5=-16\end{cases}$

Тоді вектор $\bar{d} = \bar{a} + 2\bar{b} + 5\bar{c}$, його координати $\bar{d} = \{1,2,5\}$.

Відповідь: $\bar{d} = \bar{a} + 2\bar{b} + 5\bar{c}$ або $\bar{d} = \{1,2,5\}$.

Задача 5. Перевірити, чи є вектори $\bar{a} = \{1; 4\}$, $\bar{b} = \{-2; -8\}$ лінійно незалежними.

Відповідь: ні, вектори є лінійно залежними.

Задача 6. Чи утворюють вектори $\bar{a}\{1; -2; 4\}$, $\bar{b}\{2; 3; 1\}$, $\bar{c}\{-1; 0; -5\}$ базис у просторі?

Відповідь: так, вектори утворюють базис.

Задача 7. Перевірити, чи утворюють вектори $\bar{a} = \{1; 2; 0\}$, $\bar{b} = \{3; 1; 2\}$, $\bar{c} = \{2; 0; 4\}$ базис у просторі і знайти координати вектора $\bar{d} = \{7; 8; 0\}$ в цьому базисі.

Відповідь: $\bar{d} = 3\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}$ або $\bar{d} = \{3; 2; -1\}$.

Задача 8. Перевірити, чи утворюють вектори $\bar{a} = \{2; 4; 6\}$, $\bar{b} = \{1; 3; 5\}$, $\bar{c} = \{0; -3; 7\}$ базис у просторі і знайти координати вектора $\bar{d} = \{3; 2; 52\}$ в цьому базисі.

Відповідь: $\bar{d} = -\frac{31}{13}\bar{a} + \frac{101}{13}\bar{b} + \frac{51}{13}\bar{c}$ або $\bar{d} = \left\{-\frac{31}{13}; \frac{101}{13}; \frac{51}{13}\right\}$.

3. Вектори в декартовій системі координат.

Координати вектора $\overline{AB}$ з початком в точці $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем в точці $B(x_2; y_2; z_2)$ обчислюються за формулами:

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1;\quad y_2 - y_1;\quad z_2 - z_1\}.$$

<u>Довжина (модуль)</u> вектора $\overline{AB} = \{x; y; z\}$ визначається за формулою:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

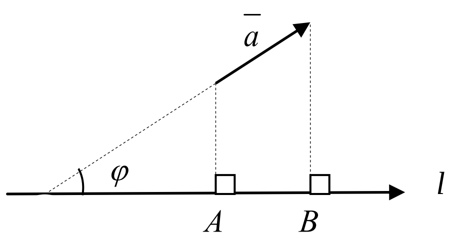
Якщо вектори задано в координатній формі $\bar{a} = \{a_1; a_2; a_3\}, \bar{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$, то сума, різниця та добуток вектора на число обчислюються за формулами:

$$\bar{a}+\bar{b}=\{a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3\},\qquad \bar{a}-\bar{b}=\{a_1-b_1;\ a_2-b_2;\ a_3-b_3\},$$
$$k\bar{a}=\{ka_1;\ ka_2;\ ka_3\}.$$

Координати колінеарних векторів пропорційні:

$$\bar{a}=\{a_1;a_2;a_3\}\parallel \bar{b}=\{b_1;b_2;b_3\}\qquad\Leftrightarrow\qquad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

Ортогональною проекцією вектора $\bar{a}$ на вісь l називається довжина відрізка AB, що розташований між основами перпендикулярів, опущених на вісь з початку і кінця вектора: $np_l\,\bar{a}=|\bar{a}|\cos\varphi$.



Зауваження. Координати вектора $\bar{a}$ є його проекціями на координатні вісі.

Напрямними косінусами вектора $\bar{a}$ називаються косінуси кутів α,β,γ, які утворює вектор $\bar{a}$ з координатними осями.

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\bar{a}|};\qquad \cos\beta=\frac{y}{|\bar{a}|};\qquad \cos\gamma=\frac{z}{|\bar{a}|}.$$

Для напрямних косінусів виконується рівність: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Задача 9. Дано точки $A(3;-1;2)$ і $B(-1;2;1)$. Знайти координати, модуль і напрямні косинуси вектора $\overline{AB}$. Чи є вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$ колінеарними?

Розв'язання:

Знайдемо координати вектора $\overline{AB}$:

$$x=-1-3=-4;\qquad y=2-(-1)=3;\qquad z=1-2=-1.$$

$$\overline{AB}=\{-4;3;-1\}\qquad\Rightarrow\qquad \left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(-4)^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{26}.$$

Напрямні косинуси дорівнюють:

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\bar{a}|}=\frac{-4}{\sqrt{26}};\qquad \cos\beta=\frac{y}{|\bar{a}|}=\frac{3}{\sqrt{26}};\qquad \cos\gamma=\frac{z}{|\bar{a}|}=\frac{-1}{\sqrt{26}}.$$

Вектор $\overline{BA}$ протилежний $\overline{AB}$, отже $\overline{BA}=-\overline{AB}\quad\Rightarrow\quad \overline{BA}=\{4;-3;1\}$.

Перевіримо умову колінеарності векторів $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$:

$$\frac{-4}{4}=\frac{3}{-3}=\frac{-1}{1}$$

Умова виконується, отже, вектори колінеарні.

Відповідь: $\overline{AB}=\{-4;3;-1\}$, $|\overline{AB}|=\sqrt{26}$, $\cos\alpha=\frac{-4}{\sqrt{26}}$, $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{26}}$, $\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{26}}$, $\overline{AB}\parallel\overline{BA}$.

Задача 10. Знайти проекції вектора $\overline{a}$ на координатні вісі, якщо $|\overline{a}|=2$, а кути нахилу вектора до осей дорівнюють відповідно $\alpha=45^0$, $\beta=60^0$ і $\gamma=120^0$.

Розв'язання:

Проекції вектора на координатні вісі – це його координати

$$x=np_{Ox}\overline{a}=|\overline{a}|\cos\alpha=2\cdot\cos 45^0=\sqrt{2};$$

$$y=np_{Oy}\overline{a}=|\overline{a}|\cos\beta=2\cdot\cos 60^0=1;$$

$$z=np_{Oz}\overline{a}=|\overline{a}|\cos\gamma=2\cdot\cos 120^0=-1.$$

Відповідь: $\overline{a}=\{\sqrt{2};1;-1\}$.

Задача 11. Знайти координати кінця вектора $\overline{AB}=\{3;-1;4\}$, якщо координати його початку $A(1;2;-3)$.

Відповідь: $B(4;1;1)$.

Задача 12. Відомо дві координати вектора $\overline{a}$: $x=4$, $y=-12$. Визначити його третю координату z ($z>0$) за умови, що $|\overline{a}|=13$.

Відповідь: 3.

Задача 13. Дано точки $A(1;2;3)$ і $B(3;5;9)$. Знайти координати вектора $\overline{AB}$, його модуль і напрямні косинуси (косинуси кутів нахилу вектора до координатних осей).

Відповідь: $\cos\alpha=\frac{2}{7}$; $\cos\beta=\frac{3}{7}$; $\cos\gamma=\frac{6}{7}$.

Задача 14. Знайти координати вектора $3\bar{a}-\frac{1}{2}\bar{b}$, якщо $\bar{a}=\{-1;2;4\}$, а $\bar{b}=\{4;0;-2\}$.

Відповідь: $\{-5;6;13\}$.

Задача 15. Знайти проекції на координатні вісі суми та різниці векторів $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}$ і $\bar{b}=-3\bar{i}+2\bar{j}+5\bar{k}$.

Відповідь: $\{-1;5;1\}$, $\{5;1;-9\}$.

Задача 16. Вектори $\bar{a}=\{3;-2;6\}$ і $\bar{b}=\{-2;1;0\}$. Знайти проекції на координатні вісі векторів $1)\,\bar{a}+\bar{b}$, $2)\,\bar{a}-\bar{b}$, $3)\,2\bar{a}+3\bar{b}$, $4)\,\frac{1}{3}\bar{a}-\bar{b}$.

Відповідь: 1) (1;–1;6); 2) (5;–3;6); 3) (0;–1;12); 4) (3;–5/3;2).

Задача 17. Визначити, при яких значеннях *α, β* вектори $\bar{a}=-2\bar{i}+3\bar{j}+\beta\bar{k}$ і $\bar{b}=\alpha\bar{i}-6\bar{j}+2\bar{k}$ є колінеарними.

Відповідь: $\alpha=4$; $\beta=-1$.

Задача 18. Вектор $\bar{a}$ складає з осями *Ox* і *Oz* кути $\alpha=120^0$ і $\gamma=45^0$. Який кут він складає з віссю *Oy*?

Відповідь: $\beta=60^0$ або $\beta=120^0$.

Задача 19. Знайти координати вектора $\bar{b}$, колінеарного вектору $\bar{a}=\{16;-15;12\}$ і протилежно до нього напрямленого, при умові, що $|\bar{b}|=75$.

Відповідь: $\{-48;45;-36\}$.

Домашнє завдання

Задача 1. За даними векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ побудувати вектори $2\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{a}-0{,}25\bar{b}$, $3\bar{b}-\bar{a}$ та $-2\bar{a}-2\bar{b}$.

Задача 2. Знайти координати початку вектора $\overline{AB}=\{2;-3;1\}$, якщо координати його кінця $B(1;2;-1)$.

Задача 3. Вектори $\overline{a}=\{4;2;2\}$ і $\overline{b}=\{-2;1;1\}$. Знайти проекції на координатні вісі наступних векторів $\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a}-\overline{b}$, $2\overline{a}-\overline{b}$ та $0{,}5\overline{a}+2\overline{b}$.

Задача 4. Дано два вектори $\overline{a}=-2\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$ і $\overline{b}=4\overline{i}-2\overline{j}+6\overline{k}$. Знайти координати векторів $\overline{c}=\overline{b}-2\overline{a}$ и $\overline{d}=3\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}$.

Задача 5. Знайти координати початка вектора $\overline{a}$, якщо координати його кінця $B(4;1;1)$, модуль 2, а кути нахилу до координатних осей рівні відповідно $\alpha=60^0$, $\beta=120^0$ і $\gamma=90^0$.

Задача 6. Визначити, при яких значеннях α, β вектори $\overline{a}=\{2;\alpha;3\}$ і $\overline{b}=\{\beta;-3;\ 9\}$ є колінеарними.

Задача 7. Дано точки $A(2;2;1)$ і $B(3;1;0)$. Знайти координати вектора $\overline{AB}$, його модуль і напрямні косинуси (косинуси кутів нахилу вектора до координатних осей).

Задача 8. Перевірити, чи є вектори $\overline{a}=\{1;4;2\}$, $\overline{b}=\{-2;-8;0\}$ лінійно незалежними.

Задача 9. Перевірити, чи утворюють вектори $\overline{a}=\{4;2;-1\}$, $\overline{b}=\{0;1;5\}$, $\overline{c}=\{2;1;4\}$ базис у просторі.

Задача 10. Перевірити, чи утворюють вектори $\overline{a}=\{2;1;1\}$, $\overline{b}=\{-1;3;1\}$, $\overline{c}=\{2;4;0\}$ базис у просторі і знайти координати вектора $\overline{d}=\{0;-2;6\}$ у цьому базисі.

Задача 11. Вектор $\overline{a}$ складає з осями *Ox* і *Oy* кути $\alpha=60^0$ і $\gamma=120^0$. Який кут він складає з віссю *Oz*?

Задача 12. Знайти проекції на координатні вісі суми та різниці векторів $\overline{a}=2\overline{i}+\overline{j}-3\overline{k}$ і $\overline{b}=3\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$.