Практичне заняття № 1.4

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ НА СУМІСНІСТЬ

1. **Ранг матриці.**
2. **Сумісність систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі.**
3. **Загальний розв'язок невизначеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.**
4. **Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.**

1. Ранг матриці.

Мінором k-го порядку матриці A називається будь-який визначник k-го порядку, складений з елементів матриці A після викреслення відповідного числа рядків і стовпців без перестановок залишившихся елементів.

Рангом $r(A)$ матриці A називається найбільший порядок мінора матриці, відмінного від нуля.

Теорема: Елементарні перетворення не змінюють ранг матриці.

Зауваження: Викреслення нульових рядків (стовпців) не змінює ранг матриці.

Задача 1. Знайти ранг матриць:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&5&7&2\\1&5&8&10\end{pmatrix};\qquad 2)\ A=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\2&1&3&2&1\\4&2&6&4&2\\5&3&6&5&2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

1) За допомогою елементарних перетворень будемо намагатись звести матрицю до трикутного вигляду. Для цього від другого рядка віднімемо перший, помножений на 2, потім від третього рядка віднімемо перший:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&5&7&2\\1&5&8&10\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}\text{II}p-2\cdot\text{I}p\\\text{III}p-\text{I}p\end{bmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-6\\0&3&5&6\end{pmatrix}\sim\left[\text{III}p-3\cdot\text{II}p\right]\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-6\\0&0&2&24\end{pmatrix}.$$

Видно, що мінор третього порядку, що стоїть в лівій частині даної матриці не дорівнює нулю. Мінора четвертого порядку не існує.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Отже, ранг матриці A дорівнює розміру отриманого ненульового мінора, тобто $r(A) = 3$.

2) Від третього рядка віднімемо подвоєний другий, потім від другого віднімемо подвоєний перший і від четвертого рядка віднімемо перший, помножений на 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} \text{III}p - 2\cdot\text{II}p \\ \text{II}p - 2\cdot\text{I}p \\ \text{IV}p - 5\cdot\text{I}p \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim [\text{IV}p - 2\cdot\text{I}p] \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Видно, що найбільший ненульовий мінор даної матриці – це визначник другого порядку, а всі визначники третього порядку рівні нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad r(A) = 2.$$

Відповідь: 1) 3;   2) 2.

Задача 2. Знайти ранг матриць:

$$1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad 6) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad 7) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: 1) 3;   2) 1;   3) 2;   4) 2;   5) 2;   6) 1;   7) 2.

2. Сумісність систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі.

Система називається <u>сумісною</u>, якщо вона має хоча б один розв'язок і <u>несумісною</u>, якщо не має розв'язків.

Сумісна система називається <u>визначеною</u>, якщо вона має лише один розв'зок і <u>невизначеною</u>, якщо розв'язків нескінчена кількість.

<u>Теорема Кронекера-Капеллі</u>. Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці A дорівнює рангу розширеної матриці $\widetilde{A}$ системи. У випадку сумісності система є визначеною, коли цей ранг дорівнює кількості невідомих n, і невизначеною, коли цей ранг менше n.

Задача 3. Дослідити систему $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+2z=3 \\ 3x+y+z=5 \end{cases}$ на сумісність.

Розв'язання:

Запишемо розширену матрицю системи і приведемо її до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \text{II}p - 2\cdot \text{I}p \\ \text{III}p - 3\cdot \text{I}p \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\text{III}p - \text{II}p\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ранг основної матриці $r(A)=2$, а розширеної $r(\widetilde{A})=3$, тому система несумісна.

Відповідь: система несумісна.

Задача 4. Дослідити системи на сумісність:

1) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x-y-z=3 \\ 3x+y+2z=5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y-4z=2 \\ 3x-y+z=2 \\ 2x-2y+5z=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4 \end{cases}$.

Відповідь: 1) несумісна; 2) сумісна, невизначена; 3) сумісна, визначена.

5. Загальний розв'язок невизначеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо невизначену систему лінійних алгебраїчних рівнянянь з n невідомими. Нехай ранг матриці системи $r(A) = r(\widetilde{A}) = k$, $k < n$.

Назвемо будь-які k невідомих системи <u>основними</u>, а решту $n-k$ <u>вільними</u>. Виразимо основні невідомі через вільні методом Гаусса. Отриманий розв'язок називається <u>загальним розв'язком системи.</u>

Задача 5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$.

Розв'язання:

Складемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до верхньої трикутної матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \text{II}p - 2\cdot\text{I}p \\ \text{III}p - \text{I}p \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim [\text{III}p - \text{II}p] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Як бачимо, ранг матриці A дорівнює рангу розширеної матриці $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$ і менше 3 (кількості невідомих), отже система має нескінчено багато розв'язків.

Перепишемо її у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ \quad -3x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}.$$

Будемо вважати невідомі x_1, x_2 основними, а невідому x_3 – вільною. Надамо вільній невідомій значення $x_3 = t$ $(t \in R)$.

Тоді $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4t = 1 \\ \quad -3x_2 + 3t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4t + 1 \\ \quad -3x_2 = -3 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t - 1 \\ x_2 = t + 1 \\ x_3 = t \end{cases}$

Остаточно маємо $x_1 = 2t - 1;\quad x_2 = t + 1;\quad x_3 = t,\quad t \in R$.

Відповідь: $\{2t - 1;\ t + 1;\ t \mid t \in R\}$.

Задача 6. Розв'язати системи рівнянь:

$$1)\ \begin{cases} x-y-2z=2 \\ 2x-y-5z=7 \\ x-2y-z=-1 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x+y-2z=2 \\ 2x-y-z=-8 \\ 3x+2y-5z=2 \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} -x+y+2z=1 \\ x+2y-z=2 \\ 2x+y-3z=1 \\ x+5y=5 \end{cases}.$$

Відповідь: 1) $\{3t+5;\ t+3; t \mid t \in R\}$; 2) $\{t-2;\ t+4; t \mid t \in R\}$;

3) $\{5t/3;\ 1-t/3;\ t \mid t \in R\}$.

4. Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Система з m лінійних рівнянь з n невідомими називається <u>однорідною</u>, якщо стовпець вільних членів дорівнює нулю, тобто система має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Однорідна система рівнянь завжди має тривіальний розв'язок ($x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$).

Якщо $\Delta \neq 0$, то система має тільки тривіальний розв'язок.

Якщо $\Delta = 0$, то система має нетривіальні розв'язки (нескінчену кількість).

Задача 7. Розв'язати системи рівнянь:

$$1)\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}; \qquad 2)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання:

1) Система рівнянь є однорідною, тому вона має тривіальний розв'язок $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

Щоб дізнатись, чи буде цей розв'язок єдиним, знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2+18-8-24-1+12 = -1 \neq 0.$$

Отже, система має єдиний розв'язок $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

2) Це однорідна система рівнянь, тому вона завжди має тривіальний розв’язок $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. Знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 0 - 4 + 3 - 0 + 2 = 0.$$

Отже, система має безліч розв’язків. Знайдемо їх методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \mathrm{II}p - 2\cdot \mathrm{I}p \\ \mathrm{III}p - 3\cdot \mathrm{I}p \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim [\mathrm{III}p - \mathrm{II}p] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Виберемо в якості вільної змінної x_3. Надамо їй значення $x_3 = t \ (t \in R)$.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \quad x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + t = 0 \\ \quad x_2 - 2t = 0 \\ \quad x_3 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = t \end{cases}$$

Відповідь: 1) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$; 2) $\{t;\ 2t;\ t \mid t \in R\}$.

Задача 8. Розв’язати системи рівнянь:

$$1)\ \begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 4x + y + z = 0 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 3x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

Відповідь: 1) $x = 0, y = 0, z = 0$; 2) $\{t/5;\ 2t/5;\ t \mid t \in R\}$.

Задача 9. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

Відповідь: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

Домашнє завдання

Задача 1. Знайти ранг матриць:

1) $A=\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$; 5) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 12 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 8) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; 9) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Дослідити системи на сумісність:

1) $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ x+4y+z=-3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-3y+4z=2 \\ 2x+y-z=1 \\ 11x-12y+18z=3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+3x_2+x_3=5 \\ x_1+x_2+5x_3=-7 \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14 \end{cases}$.

Задача 3. Розв’язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x+4y-3z=0 \\ 2x-5y+2z=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2 \\ -x_1+x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+x_2-3x_3=1 \\ x_1+5x_2=5 \end{cases}$.

Задача 4. Розв’язати системи однорідних рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ 3x+2y-z=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x-y+4z=0 \\ -x+3y-3z=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3+x_4=0 \\ x_1-2x_2-x_3+5x_4=0 \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+4x_3-2x_4=0 \end{cases}$.