Практичне заняття № 1.3

РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

1. **Правило Крамера.**
2. **Матричний метод.**
3. **Метод Гаусса.**

1. Правило Крамера.

Нехай маємо систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Введемо позначення $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, система має єдиний розв'язок, який знаходимо за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ldots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Задача 1. Розв'язати систему $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ за правилом Крамера.

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 2 - 4 - 6 - 1 + 4 = -2 \neq 0 .$$

Визначник системи не дорівнює нулю, тому система має єдиний розв'язок.

Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -16; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -26 .$$

За формулами Крамера маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-2} = 3; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-2} = 8; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-26}{-2} = 13 .$$

Перевірка: $\begin{cases} 3 + 8 - 13 = -2 \\ 4 \cdot 3 - 3 \cdot 8 + 13 = 1. \\ 2 \cdot 3 + 8 - 13 = 1 \end{cases}$

Відповідь: $(3;\ 8;\ 13)$.

Задача 2. Розв’язати систему рівнянь за правилом Крамера

1) $\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 4 \\ 4x + 2y - 3z = -4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ -2x - 3y + 4z = -1. \\ x - y + 3z = 3 \end{cases}$

Відповідь: 1) $(2;\ 3; -1)$; 2) $(0;\ 1;\ 2)$; 3) $(1;\ 1;\ 1)$.

2. Матричний метод.

Розглянемо систему (1) з n рівнянь з n невідомими, причому $\Delta \neq 0$.

Введемо позначення $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Тоді систему можна представити у вигляді матричного рівняння $AX = B$, звідки отримаємо розв’язок системи $X = A^{-1}B$.

Задача 3. Розв’язати систему матричним методом $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1. \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

Розв’язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 2 - 4 - 6 - 1 + 4 = -2 \neq 0.$$

Визначник системи не дорівнює нулю, тому система має єдиний розв'язок.

Введемо матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Запишемо систему рівнянь у вигляді матричного рівняння

$$A \cdot X = B \qquad \Rightarrow \qquad X = A^{-1} \cdot B.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$\begin{matrix} A_{11} = 2 & A_{21} = 0 & A_{31} = -2 \\ A_{12} = 6 & A_{22} = 1 & A_{32} = -5 \\ A_{13} = 10 & A_{23} = 1 & A_{33} = -7 \end{matrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -5 \\ 10 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Перевірка: $A^{-1}A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -5 \\ 10 & 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = E.$

Тоді

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -5 \\ 10 & 1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 6 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 - 5 \cdot 1 \\ 10 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 - 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \\ -26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Перевірка: $\begin{cases} 3 + 8 - 13 = -2 \\ 4 \cdot 3 - 3 \cdot 8 + 13 = 1. \\ 2 \cdot 3 + 8 - 13 = 1 \end{cases}$

Відповідь: $(3;\ 8;\ 13)$.

Задача 4. Розв'язати системи рівнянь матричним методом:

$$1)\ \begin{cases} x+3y-z=1 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x-2y+3z=9 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ x+y-z=0 \\ 4x-y+5z=3 \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} x+2y=3 \\ x-y-2z=-5 \\ 3x+z=-2 \end{cases}.$$

Відповідь: 1) $(2;\ 0;\ 1)$; 2) $(-1;\ 3;\ 2)$; 3) $(-1;\ 2;\ 1)$.

3. Метод Гаусса.

Розглянемо систему з m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2}$$

Елементарними перетвореннями матриці A називаються:

1) перестановка місцями (транспозиція) двох рядків (стовпців) матриці;
2) множення всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) на скаляр;
3) додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця).

Позначимо через $\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ розширену матрицю системи.

За допомогою елементарних перетворень з рядками розширеної матриці приведемо її до верхньої трикутної матриці і знову перепишемо у вигляді системи рівнянь, яка еквівалентна системі (2):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \ldots & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \ldots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \bar{a}_{nn} & \bar{b}_n \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \qquad \bar{a}_{22}x_2 + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n \end{cases}$$

Тепер послідовно знаходимо всі невідомі, починаючи з останнього рівняння.

Процес приведення вихідної розширеної матриці до трикутної називається прямим ходом методу, а процес знаходження невідомих $x_n, \ldots, x_2, x_1$ – оберненим ходом.

Задача 5. Розв'язати систему $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ методом Гаусса.

Розв'язання:

Запишемо розширену матрицю системи і приведемо її до трикутного вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \text{II}p - 4 \cdot \text{I}p \\ \text{III}p - 2 \cdot \text{I}p \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim [\text{II}p \leftrightarrow \text{III}p] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim [\text{III}p - 7 \cdot \text{II}p] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -26 \end{array}\right).$$

Перепишемо перетворену матрицю у вигляді системи:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ \quad -x_2 + x_3 = 5 \\ \qquad -2x_3 = -26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 8 \\ x_3 = 13 \end{cases}.$$

Відповідь: $(3;\ 8;\ 13)$.

Задача 6. Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

$$1)\ \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x + 3y - z = 4 \\ 2x - 5y + z = 6 \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 4y - z = 10 \\ 5x + 7y + 6z = 17 \end{cases}.$$

Відповідь: 1) $(1;\ 2;-2)$; 2) $(4;\ 1;\ 3)$; 3) $(2;\ 1;\ 0)$.

Задача 7. Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

$$1)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 13x_3 = -6 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}.$$

Відповідь: 1) $(2;\ 1;\ 1)$; 2) $(1;\ 2;-2)$.

Домашнє завдання

Задача 1. Розв'язати системи рівнянь за правилом Крамера:

$$1)\ \begin{cases} x_1+3x_2-x_3=1 \\ x_1-x_2+x_3=5 \\ 2x_1+2x_2+x_3=0 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x-y-z=-8 \\ 2x+y+z=5 \\ 3x+2y+3z=1 \end{cases}.$$

Задача 2. Розв'язати системи рівнянь матричним методом:

$$1)\ \begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3=0 \\ x_1+x_2-2x_3=1 \\ 3x_1+x_2+3x_3=5 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x+2y+3z=3 \\ 2x+3y+4z=3 \end{cases}.$$

Задача 3. Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

$$1)\ \begin{cases} x_1+2x_2-5x_3=7 \\ x_1-x_2+2x_3=-2 \\ 3x_1-x_2+x_3=0 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-2y-z=4 \\ 2x-3y+2z=1 \end{cases}.$$

Задача 4. Розв'язати системи рівнянь:

$$1)\ \begin{cases} 2x+y-2z=5 \\ 3x-2y+3z=4 \\ 2x-3y+5z=1 \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x+y-5z=-1 \\ 2x+3y-4z=3 \\ 3x+4y-7z=4 \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} x-y-z=2 \\ x+3y-2z=4 \\ 2x-4y-3z=0 \end{cases}.$$

Задача 5. Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

$$1)\ \begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3=7 \\ 2x_1-2x_2-x_3=1 \\ x_1-3x_2+2x_3=-1 \\ 3x_1+8x_2-11x_3=14 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x_1+x_2-5x_3=6 \\ x_1+2x_2+x_3=0 \\ 3x_1-x_2-x_3=4 \\ 2x_1+8x_2+3x_3=1 \end{cases}.$$