Практичне заняття № 1.2

ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

1. **Матриці та дії над ними.**
2. **Обернена матриця.**
3. **Матричні рівняння.**

1. Матриці та дії над ними.

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця з елементів a_{ij} $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$, розташованих в m рядках та n стовпцях:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \{a_{ij}\}$$

Одиничною називається квадратна матриця, в якої все елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а решта елементів – нулі.

Нульовою називається матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю.

Транспонованою матрицею A^{T} називається матриця, в якої рядки замінено стовпцями без зміни порядку їх слідування.

Дії над матрицями:

1) Сумою (або різницею) двох матриць однакового розміру A і B називається матриця C, кожен елемент якої c_{ij} дорівнює сумі (або різниці) відповідних елементів a_{ij} та b_{ij} матриць A і B, тобто $C = A \pm B = \{a_{ij} \pm b_{ij}\}$.

2) Добутком матриці A на число k (скаляр) називається матриця C, кожен елемент якої c_{ij} дорівнює добутку відповідного елемента a_{ij} матриці A на число k, тобто $C = kA = \{ka_{ij}\}$.

3) Добутком двох матриць A і B (кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B) називається матриця C, кожен елемент якої c_{ij} є сумою добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, тобто

$$C = AB = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right\}.$$

Задача 1. Знайти матрицю $3A-2B$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 5 & 4\end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$3A-2B=3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 9 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 10 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-(-2) & 6-0\\ 9-10 & -3-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 6\\ -1 & -11\end{pmatrix}$$

Відповідь: $\begin{pmatrix}5 & 6\\ -1 & -11\end{pmatrix}$.

Задача 2. Знайти добуток матриць $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 2\\ 2 & 2 & -3\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 6 & 7\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$AB=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 2\\ 2 & 2 & -3\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 6 & 7\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-1)+0\cdot 6+1\cdot 3 & 3\cdot 0+0\cdot 7+1\cdot 2\\ 5\cdot(-1)+1\cdot 6+2\cdot 3 & 5\cdot 0+1\cdot 7+2\cdot 2\\ 2\cdot(-1)+2\cdot 6+(-3)\cdot 3 & 2\cdot 0+2\cdot 7+(-3)\cdot 2\\ 4\cdot(-1)+1\cdot 6+(-1)\cdot 3 & 4\cdot 0+1\cdot 7+(-1)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 7 & 11\\ 1 & 8\\ -1 & 5\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 7 & 11\\ 1 & 8\\ -1 & 5\end{pmatrix}$.

Задача 3. Знайти суму і різницю матриць $A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & -4\\ -3 & 9\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 7\\ 8 & -11\end{pmatrix}$.

Відповідь: $A+B=\begin{pmatrix}-1 & 10\\ 5 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix}$; $A-B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -11\\ -11 & 20\end{pmatrix}$.

Задача 4. Знайти добуток матриці A на число k:

1) $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 7 & -1\end{pmatrix}$, $k=-2$; 2) $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -6 & 0\end{pmatrix}$, $k=\frac{1}{2}$.

Відповідь: 1) $\begin{pmatrix}-6 & 0\\ -14 & 2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\end{pmatrix}$.

Задача 5. Знайти матрицю $C = A + A^{\mathrm{T}}$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 5 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 6. Знайти добуток AB та BA матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Задача 7. Знайти добуток AB та BA матриць:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Відповідь: 1) $AB = \begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{pmatrix}$; 2) $AB = (17)$; $BA = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$.

Задача 8. Знайти $A^2 - 3B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 1 & 15 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

Задача 9. Знайти $A^2 - \frac{1}{2}BA$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$.

Задача 10. Задано матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти:

1) $2AB-B$; 2) $A+3BA$; 3) A^2-3B.

Відповідь: 1) $\begin{pmatrix} 12 & 9 & 21 \\ -2 & 7 & 5 \\ -1 & 10 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 11 & 6 & 9 \\ 44 & 22 & 17 \\ 4 & -3 & 16 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -1 & -5 & -5 \\ 15 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Задача 11. Знайти $f(A)$, якщо $f(x)=3x^3-2x^2+1$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Обернена матриця.

Матриця A^{-1} називається <u>оберненою</u> до матриці A, якщо $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A, а $\Delta=\det A$ – визначник матриці A.

Задача 12. Знайти обернену матрицю до матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Знайдемо спочатку визначник матриці A

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot1\cdot1+2\cdot2\cdot1+0\cdot0\cdot3-1\cdot1\cdot3-0\cdot2\cdot1-1\cdot2\cdot0=2.$$

Тепер знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$; $A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-2$; $A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1$;

$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2$; $A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2$; $A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2$;

$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1$; $A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=2$; $A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$;

Отже, $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1\\ 2 & -2 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2\\ 1 & -1 & -1\\ -1/2 & 1 & 1/2\end{pmatrix}$.

Перевірка: $AA^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2\\ 1 & -1 & -1\\ -1/2 & 1 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$.

Відповідь: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2\\ 1 & -1 & -1\\ -1/2 & 1 & 1/2\end{pmatrix}$.

Задача 13. Знайти A^{-1} та $A^{-1}A$, якщо $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Відповідь: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & -1/2\\ 3/4 & 1/4 & 1/2\\ -1/4 & 1/4 & 1/2\end{pmatrix}$; $A^{-1}A=E$.

Задача 14. Знайти A^{-1}: 1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, 2) $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Відповідь: 1) $\begin{pmatrix} 1/8 & -1/8 & 1/4\\ 3/8 & 5/8 & -1/4\\ -3/4 & -1/4 & 1/2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0\\ 7/2 & -13/2 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

Задача 15. Знайти A^{T}, A^{-1} і $A^{-1}A$, якщо $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Відповідь: $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$; $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3\\ 2/9 & 2/9 & -1/9\\ -1/9 & -1/9 & 5/9\end{pmatrix}$; $A^{-1}A=E$.

3. Матричні рівняння.

Матричне рівняння $A \cdot X = B$ розв'язується множенням на A^{-1} зліва, тоді
$$X = A^{-1} \cdot B;$$
Матричне рівняння $X \cdot A = B$ розв'язується множенням на A^{-1} справа, тоді
$$X = B \cdot A^{-1}.$$

Задача 16. Розв'язати матричне рівняння

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

1) Маємо матричне рівняння вигляду $AX = B$, домножимо його на A^{-1} зліва, тобто $A^{-1}AX = A^{-1}B$, звідки отримаємо $X = A^{-1}B$.

Спочатку знайдемо обернену матрицю A^{-1}:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -4.$$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot |2| = 2; \qquad A_{21} = (-1)^3 \cdot |2| = -2;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot |3| = -3; \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot |1| = 1.$$

Отримаємо $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Отже, $X = A^{-1}B = -\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}$.

Перевірка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$.

Маємо матричне рівняння вигляду $A \cdot X \cdot B = C$.

Спочатку домножимо його на A^{-1} зліва, потім на B^{-1} справа, звідки отримаємо $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

Знайдемо обернену матрицю A^{-1}: $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$;

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot 3 = 3; \qquad A_{21} = (-1)^3 \cdot 2 = -2;$$
$$A_{12} = (-1)^3 \cdot 0 = 0; \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot 1 = 1.$$

Отримаємо $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо обернену матрицю B^{-1}: $\Delta B = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$;

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot 1 = 1; \qquad A_{21} = (-1)^3 \cdot (-1) = 1;$$
$$A_{12} = (-1)^3 \cdot 2 = -2; \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot 0 = 0.$$

Отримаємо $B^{-1} = \dfrac{1}{\Delta B}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Тепер можна знайти X:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевірка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$.

Відповідь: 1) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 17. Розв'язати рівняння: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 18. Розв'язати рівняння: $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & 9 & 5 \\ 6 & 16 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Домашнє завдання

Задача 1. Дано матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти

1) $A+3B$; 2) $2A-B$; 3) $3A-2B$.

Задача 2. Знайти добуток двох матриць AB і BA, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Знайти $f(A)$, якщо $f(x)=x^2-2x+1$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Знайти матрицю $B=2A-A^{\mathrm{T}}$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Знайти обернені матриці до $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ tg\alpha & -tg\alpha \end{pmatrix}$.

Задача 6. Дано матриці $A=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти

1) AB, 2) BA, 3) A^{T}, 4) B^2+2A, 5) A^{-1}, 6) B^{-1}, 7) AA^{-1}, 8) $A^{-1}A$.

Задача 7. Розв'язати матричні рівняння:

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $X\cdot\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.