Тема 1

Лекція 1.3

План

В сучасній математиці комплексні числа вводяться як результат розширення поля дійсних чисел або геометрично. Для більшої наочності розглянемо геометричний спосіб введення комплексних чисел.

Комплексні числа – система точок **площини** $z_1 = (a;b), a,b \in R$ $z_2 = (c;d), c,d \in R$ для яких введено 2 арифметичні операції:

Додавання $z_1 + z_2 = (a;b) + (c;d) = (a+b;c+d)$ та

множення $z_1 \cdot z_2 = (a;b) \cdot (c;d) = (ac - bd; bc + ad)$.

Результатом цих операцій є комплексні числа. Множина комплексних чисел – числове **поле.**

Додавання та множення комплексних чисел підкорюються комутативному, асоціативному та дистрибутивному законам.

Число $(0;1) = i$ - уявна одиниця.

Покажемо, що в даній системі є число, квадрат якого дорівнює -1. Помножимо уявну одиницю на себе за правилом множення: $(0;1)\cdot(0;1) = (-1;0)$, $i^2 = -1$

IV Алгебраїчна форма комплексного числа.

$z = (a;b) = (a;0) + (0;b) = a + ib$

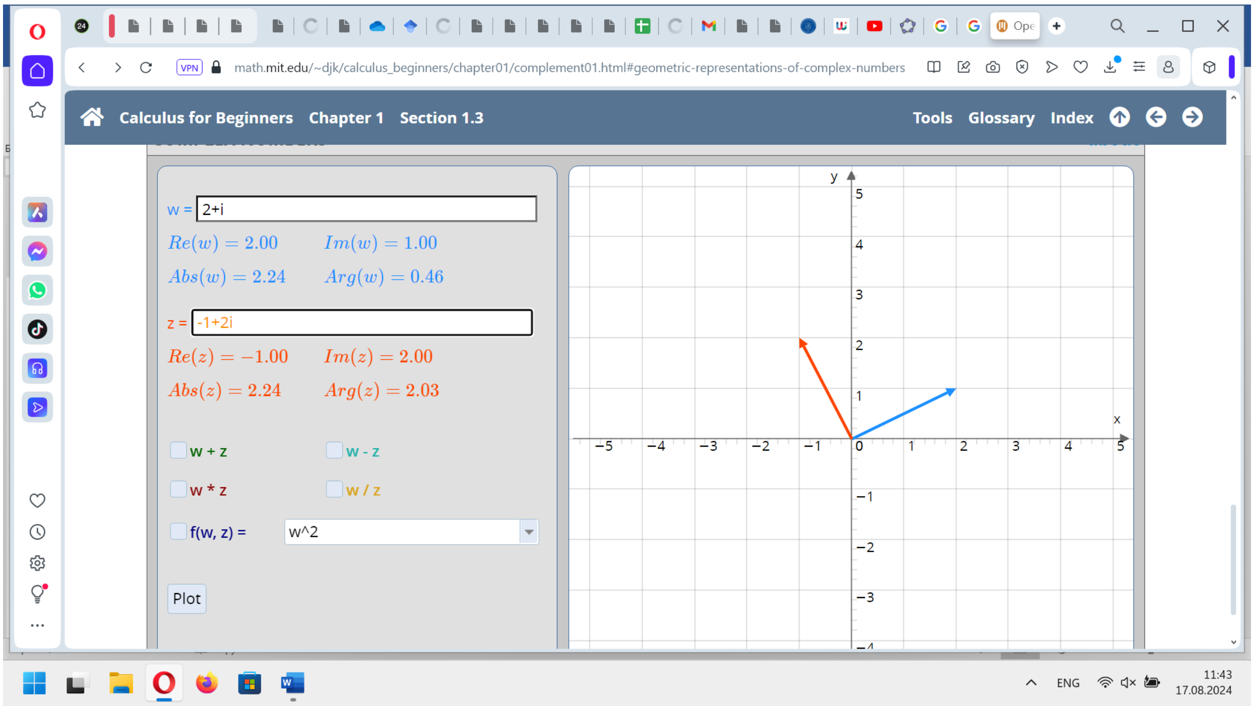
$z = a + bi$, де a,b - дійсні числа.

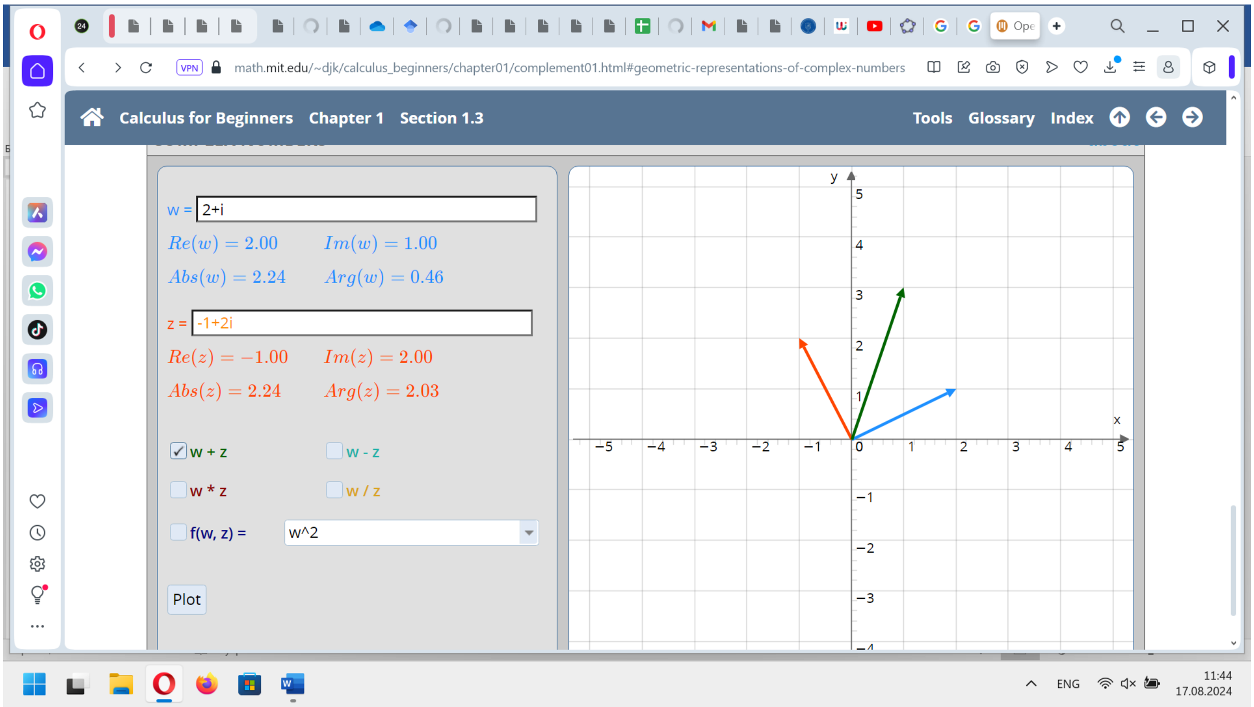
$\mathrm{Re}(a+bi) = a$ – дійсна частина комплексного числа.

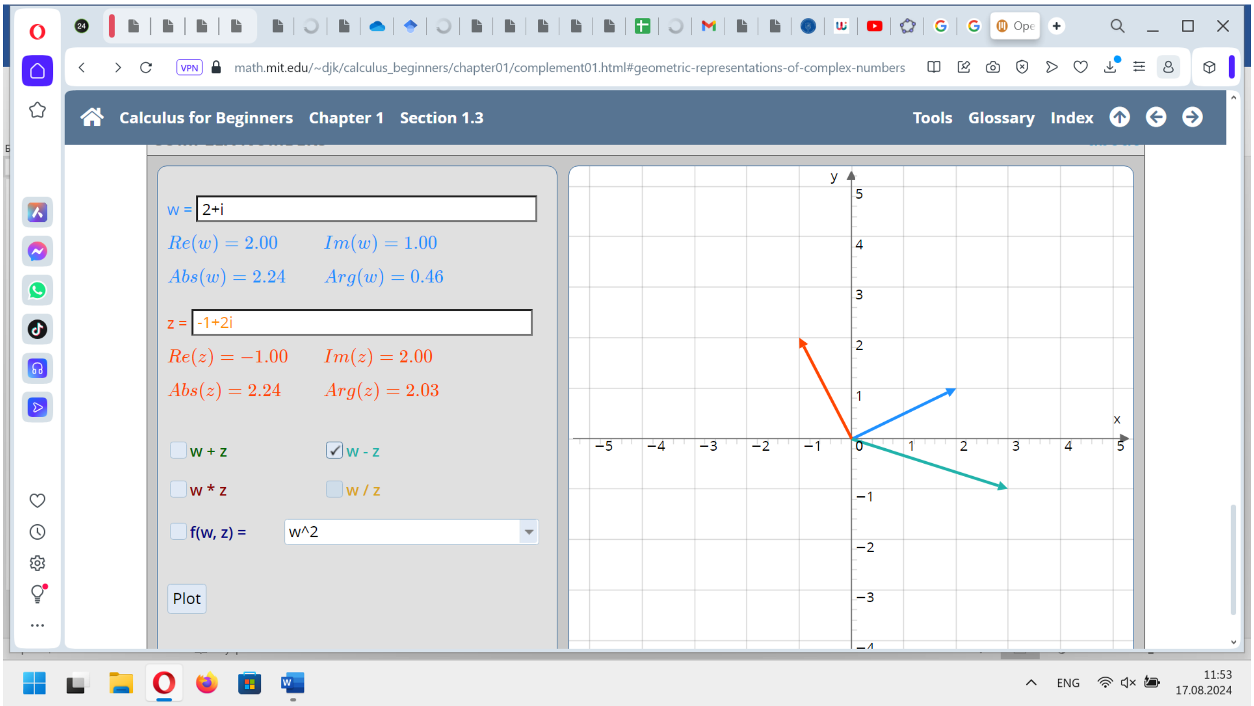
$\mathrm{Im}(a+bi) = b$ – уявна частина.

Два комплексних числа вважаються **рівними**, якщо рівні їх дійсні та уявні частини: $(a + bi = c + di) \Leftrightarrow (a = c, b = d)$

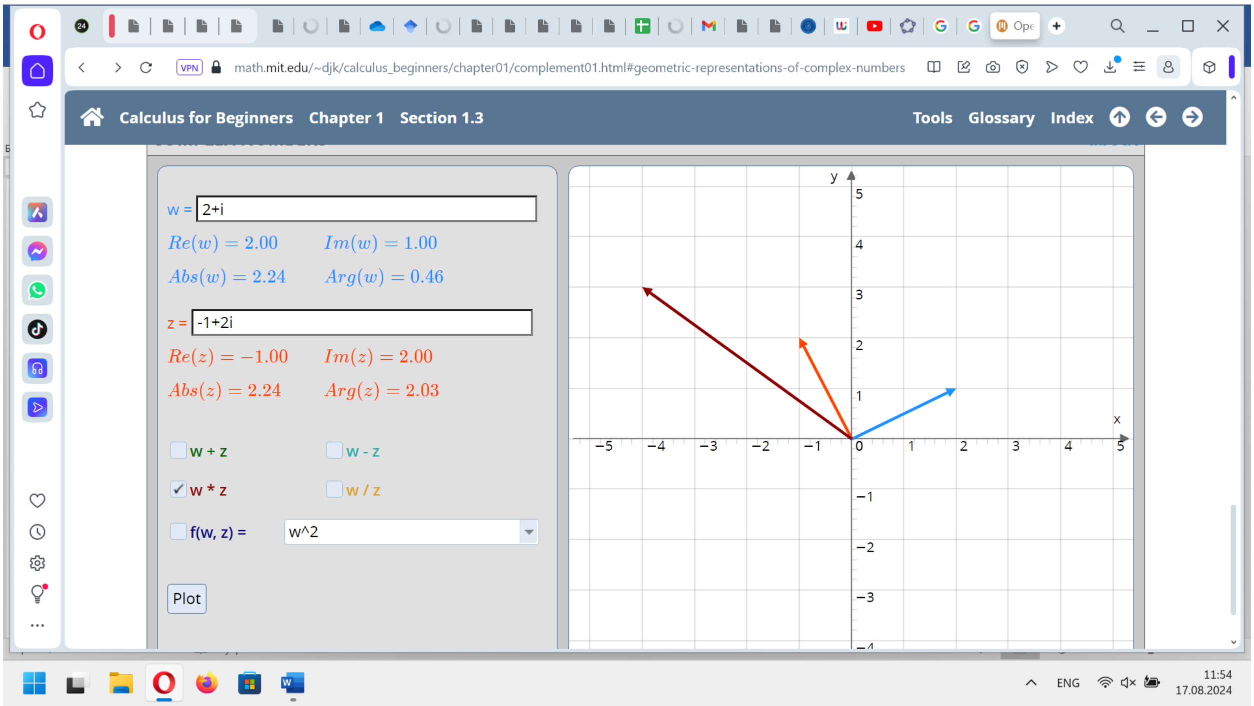
Операції над комплексними числами в алгебраїчній формі. При виконанні операцій бажано звернути увагу на такі питання: як виконати операцію? Чи завжди можлива операція? Що отримаємо в результаті?



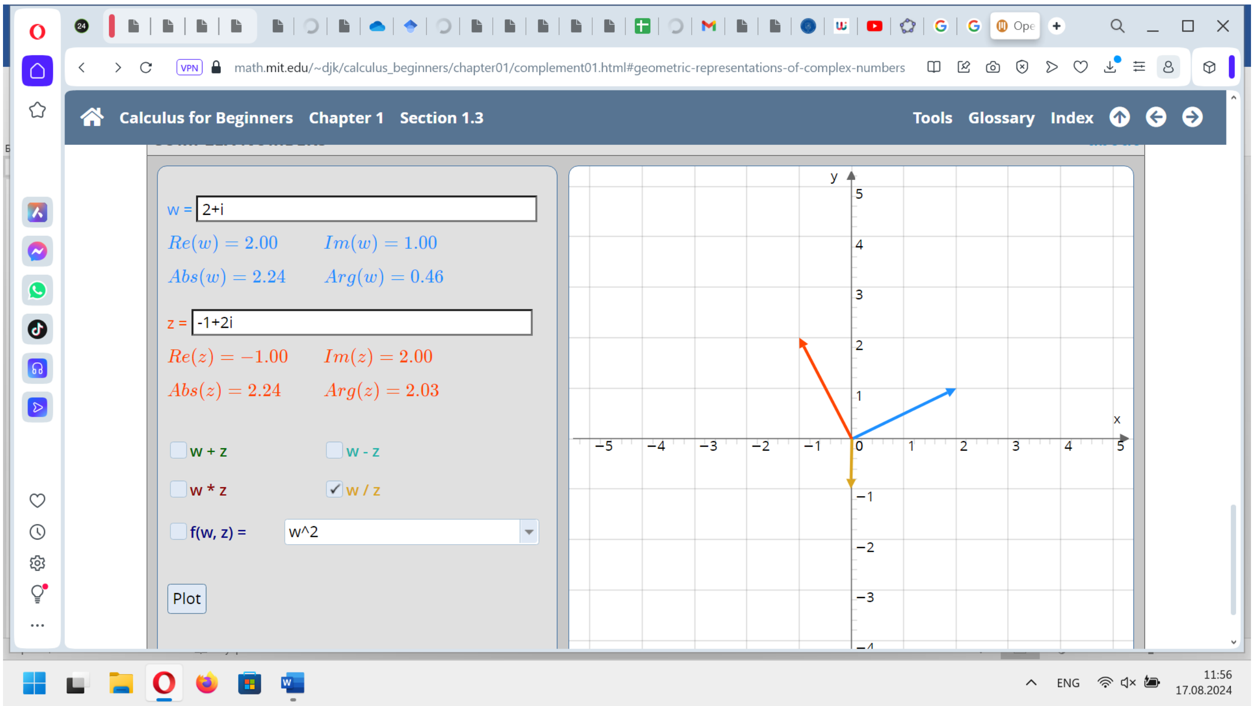


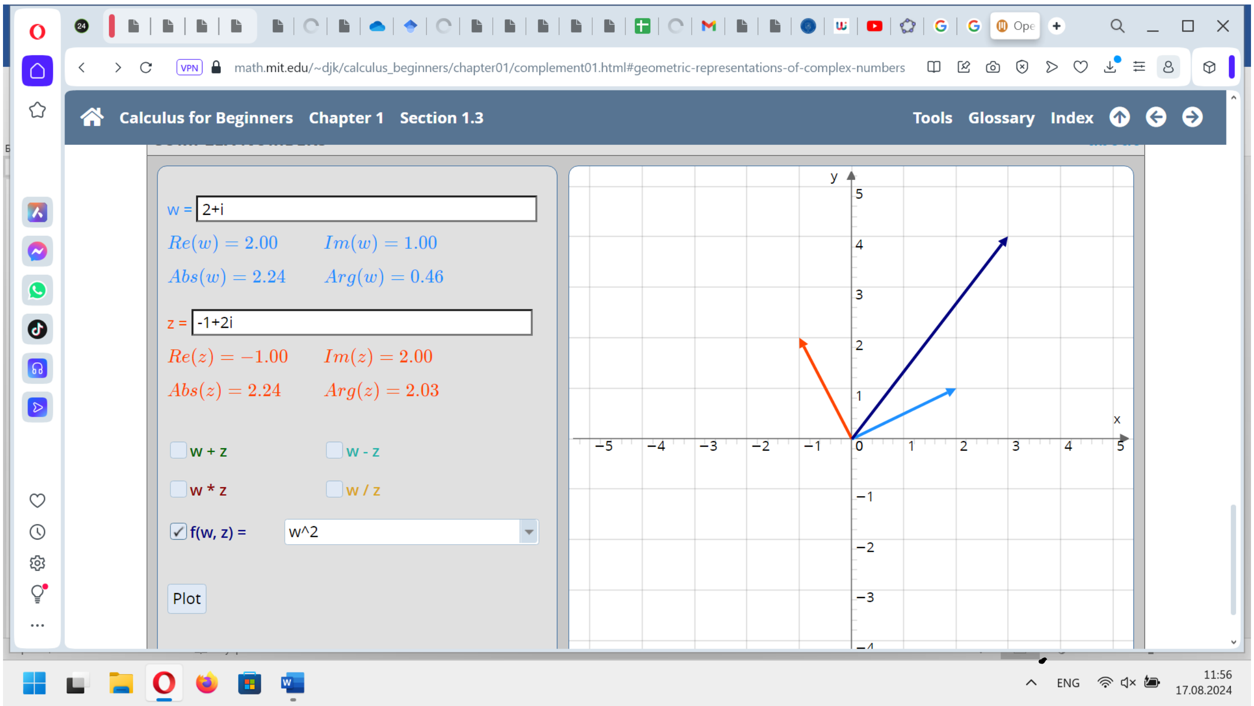


math.mit.edu/~djk/calculus_beginners/chapter01/complement01.html#geometric-representations-of-complex-numbers
Calculus for Beginners Chapter 1 Section 1.3
Tools Glossary Index
w = 2+i
Re(w) = 2.00 Im(w) = 1.00
Abs(w) = 2.24 Arg(w) = 0.46
z = -1+2i
Re(z) = −1.00 Im(z) = 2.00
Abs(z) = 2.24 Arg(z) = 2.03
w + z
w - z
w * z
w / z
f(w, z) =
w^2
Plot
ENG
11:53
17.08.2024



math.mit.edu/~djk/calculus_beginners/chapter01/complement01.html#geometric-representations-of-complex-numbers
Calculus for Beginners Chapter 1 Section 1.3
Tools Glossary Index
w = 2+i
Re(w) = 2.00 Im(w) = 1.00
Abs(w) = 2.24 Arg(w) = 0.46
z = -1+2i
Re(z) = −1.00 Im(z) = 2.00
Abs(z) = 2.24 Arg(z) = 2.03
w + z
w - z
w * z
w / z
f(w, z) =
w^2
Plot
ENG
11:54
17.08.2024





Вправа 1

Дано: $z_1 = 2 - i, z_2 = 3 + 2i$

Знайти: 1. $z_1 + z_2$

2. $2z_1 - 4z_2$

3. $z_1 \cdot z_2$

4. $\overline{z_1}$

Комплексні числа $z = a + bi$ и $\overline{z} = a - bi$ називаються **спряженими.** Перемноживши ці числа отримаємо формулу скороченого множення $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$. Перевірте самостійно та запам'ятайте.

5. $\dfrac{z_1}{z_2}$

6. z_1^2

Зобразити числа на комплексній площині, вказати дійсну та уявну частини комплексних чисел.

Повторіть формули скороченого множення та формули тригонометрії (довідник школяра).

Вправа 2. Виключити квадратний корінь з комплексного числа $z = -15 + 8i$.

$\sqrt{z} = \sqrt{-15 + 8i}$ - комплексне число. Запишемо його в алгебраїчній формі
$\sqrt{-15 + 8i} = x + iy, x, y \in R$

Піднесемо обидві частини рівності до квадрату і запишемо праву частину в алгебраїчній формі:

$$\left(\sqrt{-15 + 8i}\right)^2 = \left(x + iy\right)^2, x, y \in R$$

$$-15 + 8i = \left(x^2 - y^2\right) + \left(2xy\right)i.$$

Оскільки два комплексних числа рівні, то рівні їх дійсні та уявні частини:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -15, \\ 2xy = 8 \\ x \in R, y \in R \end{cases}$$

Розв'язками системи є дві пари $\left(x; y\right)$:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1,\\ y=-4\end{cases}\\ \begin{cases}x=1,\\ y=4\end{cases}\end{array}\right.$$

Отримали **2 квадратних кореня** з числа z: $w_1=-1-4i$, $w_2=1+4i$.

Самостійно. Виключити квадратні корені з чисел $z=-1$; $z=i$

V. Тригонометрична форма комплексного числа. Формула Муавра.

Запис числа в тригонометричній формі . Полярна система координат.

Модуль $\left(|z|=\rho\geq 0\right)$ і аргумент комплексного числа $\arg z=\varphi, 0\leq\varphi<2\pi$ $\left(-\pi\leq\varphi<\pi\right)$

$$z=a+bi=\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi=\rho\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$$

Вправа 3

Записати комплексне число в тригонометричній формі $z=\sqrt{3}-i$

1. Зобразимо число на комплексній площині.
2. Знайдемо модуль числа $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$
3. Знайдемо аргумент числа (кут повороту)
4. Підставимо у формулу $z=\rho\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$

Множення комплексних чисел в тригонометричній формі.

Розглянемо два комплексних числа $z_1=\rho_1\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)$ і $z_2=\rho_2\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)$.

$$z_1\cdot z_2=\rho_1\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)\rho_2\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)=$$
$$=\rho_1\rho_2\left(\underline{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}+i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\underline{i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2}\right)=$$
$$=\rho_1\rho_2\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right)$$

При спрощенні виразу скористались тим, що $i^2 = -1$, та формулами тригонометрії $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$,
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

Отже при множенні комплексних чисел в тригонометричній формі **модулі перемножуються, а аргументи додаються.**

Піднесемо число $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ до квадрату. Згідно правилу отримаємо: $z^2 = \rho^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$. Пригадайте формули $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha$.

Використовуючи метод математичної індукції отримуємо **формулу Муавра**:

$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), n \in N$.

Зауваження. При виконанні операцій над комплексними числами в тригонометричній формі маємо отримати комплексне число в тригонометричній формі.

Вправа. Чому даний запис не є тригонометричною формою комплексного числа? $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{3}\right)$,
$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Ділення комплексних чисел в тригонометричній формі проводимо за правилом: модулі діляться, аргументи віднімаються:
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$. Показати самостійно.

Виключення кореня з комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

$\sqrt[n]{z}, n \in N$. Результатом виключення кореня з комплексного числа буде комплексне число. Нехай $\sqrt[n]{z} = w, w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, тоді за означенням кореня n –го степеня (коренем степеня $n, n \in N$ з комплексного числа z називається число w, таке що $z = w^n$) маємо: $z = w^n$, тоді
$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$.

Із умови рівності комплексних чисел слідує: $\rho = r^n, r = \sqrt[n]{\rho}$, $\cos\varphi = \cos n\alpha$.

Звідси $n\alpha = \varphi + 2\pi k, k \in Z$, $\alpha = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, k = 0;1;2;...;n-1$. Отримуємо формулу для виключення кореня з комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\ k = 0;1;2;...;n-1.$$

Зауваження.

- Виключення кореня *n* –го степеня з комплексного числа завжди можливо і дає рівно *n* різних значень.
- Всі добуті корені мають однакові модулі, а аргументи відрізняються доданком, що є кратним $\dfrac{2\pi}{n}$.
- При геометричному зображенні всі корені є точки, які лежать на колі з радіусом рівним модулю і центром в точці $z = 0$. Ці точки ділять коло на рівні частини, тобто є вершинами правильного *n* –кутника.

VI. Показникова форма комплексного числа. Формула Ейлера.

Показникова форма комплексного числа є ще одним способом запису комплексного числа.

Формула Ейлера $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ дозволяє записати комплексне число у вигляді $z = \rho e^{i\alpha}$.

Леонард Ейлер прийшов до своєї видатної формули чисто інтуїтивно. Для її строгого доведення використовується теорія степеневих рядів, яку було побудовано значно пізніше.

VII. Розкладання многочленів на множники. Основна теорема алгебри. Розв’язання рівнянь.

Основна теорема алгебри.

Кожен многочлен з довільними числовими коефіцієнтами, степінь якого не менше одиниці, має хоча б один корінь, в загальному випадку комплексний.

Вперше цю теорему було доведено К.Ф. Гауссом, тому її часто називають теоремою Гаусса. Дана теорема є одним з найвидатніших досягнень математики і використовується в різних галузях науки. Звідси її назва: **основна теорема алгебри.**

Для доведення цієї теореми потрібні знання, що виходять за межі наших можливостей. Звернемо увагу на деякі її наслідки.

- Кожен многочлен з довільними числовими коефіцієнтами, степінь якого $n \geq 1$, розкладається на добуток n лінійних множників.
- Кожен многочлен з довільними числовими коефіцієнтами, степінь якого $n \geq 1$, має n коренів, якщо рахувати кожен корінь із урахуванням його кратності.

Література:

1. Лінійна алгебра: методичні вказівки та самостійні завдання з вищої математики / уклад. Бондаренко Н.В., Пастухова М.С.- К. :КНУБА, 2015
2. Комплексні числа і многочлени: Навч. Посібник./Ісакова Т.І., Пастухова М.С./.- К. :КНУБА, 2006.
3. Вища математика. Навч.посібник /Денисюк В.П.,Репета В.К./ Ч.2 К.НАУ, 2005 (с.63-74)

Запитання

1. Які числові множини вивчались у шкільному курсі математики?
2. Чому виникла необхідність у розширенні множини дійсних чисел?
3. Що таке уявна одиниця?
4. Які є форми запису комплексного числа?
5. Сформулюйте правила виконання алгебраїчних операцій над комплексними числами, записаними в кожній з можливих форм.
6. Сформулюйте властивості операцій.
7. Які комплексні числа називаються рівними (в залежності від форми)?
8. Геометрична інтерпретація комплексних чисел.
9. Що таке модуль та аргумент комплексного числа?
10. Чому дорівнює модуль та аргумент числа $z = 0$?
11. Формула Муавра.
12. Скільки коренів можна добути з комплексного числа?

13.В чому полягає основна теорема алгебри?