**Лекція 1.2**

**Лінійний простір. Елементи векторної алгебри.**

1. Лінійний простір.
2. Вектор – елемент лінійного простору.
3. Лінійно незалежна та лінійно залежна система векторів. Базис. Теорема про розклад вектора за базисом.
4. **Лінійний (векторний) простір**.

**Лінійним (векторним) простором** над множиною дійсних чисел називається множина об'єктів (у нашому випадку – векторів), для яких задані **операції додавання й множення на число**, тобто двом об'єктам ставиться у відповідність третій, названий їхньою сумою, і кожному числу та вектору ставиться у відповідність інший вектор, названий добутком числа на вектор, причому операції додавання й множення на число задовольняють таким умовам:

1)  для будь-яких векторів ;

2)  для будь-яких векторів ;

3) існує елемент  такий, що  для будь-якого вектора    
( називається нульовим елементом або нейтральним елементом щодо додавання);

4)  для будь-якого вектора ;

5)  для будь-якого вектора  і будь-яких чисел *x, y*;

6)  для будь-яких векторів , і будь-якого числа *х*;

7)  для будь-якого вектора  і будь-яких чисел *x, y*.

**Величини скалярні та векторні** (повторення)

У практичному житті ми часто зустрічаємося з вимірами: температура, тиск, маса, сила й напрямок вітру тощо. Для фіксації результатів вимірів використовують дійсні числа. Ті фізичні величини,   
для фіксації результатів вимірів яких досить лише одного числа, називають **скалярними (**від **лат. scalaris - ступінчастий**,- величина, яка повністю визначається своїм числовим значенням). Наприклад, об'єм, маса, температура, довжина, площа, об’єм.

Але існує й інший клас величин, для характеристики яких крім одного такого числа необхідно вказати ще й напрямок. Наприклад, характеризуючи таке природне явище як вітер, необхідно знати не тільки його швидкість, а й напрямок. Подібною величиною є й сила, – правда, крім величини й напрямку, для нас немаловажна і точка її прикладання. І таких прикладів можна привести досить багато. Такі величини, що характеризуються **величиною і напрямком**, називаються **векторними величинами (вектор –** від лат. **Vector** – той, що несе).

**Шляхи розвитку векторного числення**

Векторне числення, тобто числення з напрямленими відрізками, отримало сучасний вигляд лише в кінці XIX століття. Історично розвиток векторного числення йшло трьома шляхами: геометричним (числення відрізків), фізичним (дослідження векторних величин) і алгебраїчним (розширення поняття операції при створенні сучасної алгебри).

Вперше ідею створення геометричного числення, близького за змістом до сучасного векторного числення, висунув Лейбниц у 1679 році. Однак в фізиці ще Леонардо да Вінчі, Галілео Галілей та інші вчені користувались напрямленими відрізками для представлення сил. Проте до XIX століття поняття векторної величини ще не було чітко сформульованим, а ідея алгебраїчних операцій з напрямленими відрізками тільки зароджувалась.

Початки числення напрямлених відрізків вперше були сформульовані Каспаром Весселем (Норвегія) в 1799 році, який працював у Данській Академії наук на посаді “тригонометричного оператора”, тобто в якості геодезиста, картографа та землеміра. З метою полегшення роботи геодезиста-землеміра, виходячи з практичних задач, Вессель прагнув створити “геометричне числення”, в якому алгебраїчними методами можна було б знаходити відрізки **за величиною та напрямком**. Вессель писав: “Традиційний погляд на алгебраїчні операції дозволяє змінювати напрямок тільки на протилежний…Слід розширити означення алгебраїчних операцій…, так, щоб не було протиріччя зі старою теорією чисел…Таким чином, переходячи від арифметики до геометричного аналізу, тобто від операцій над абстрактними числами до операцій над відрізками прямої, …, ми побачимо, що геометричні операції будуть більш широкими, ніж арифметичні.”

Робота Весселя свідчить, що саме потреби прикладної геометрії привели до створення векторного числення. Свій метод числення напрямлених відрізків Вессель застосовує до виведення деяких формул тригонометрії, пов’язаних з практичними геодезичними задачами, зокрема з розв’язанням сферичних трикутників.

Нажаль робота Весселя не вплинула на розвиток векторного числення, можливо через те, що її було видано данською мовою. Також Вессель не був відомим серед вчених, а його ідеї випередили час. В історії математики роботу Весселя згадують як першу, в який надано геометричну інтерпретацію комплексних чисел.

У 1803 році виходить робота Л. Карно “Геометрія положення для тих, хто готується до вимірювання земель”. Хоча в ній відсутнє систематичне викладення векторного числення, вона зайняла більш відоме місце і стала основою для подальших розробок в роботах А. Мебіуса, Ж. Аргана, У. Гамільтона, Г. Грассмана. В роботах видатних фізиків розвивався природничий напрямок векторного числення.

Наприкінці XIX століття всі три напрямки формування векторного числення об’єднались і стали незалежним розділом математики “**Векторна алгебра**”.

Поруч з векторною алгеброю, яка вивчає властивості операцій над сталими векторами Гамільтон розробив і векторний аналіз, що вивчає змінні вектори – вектор-функції. Ми будемо вивчати вектор-функції в четвертому семестрі в розділі «Теорія поверхонь»

Отже для математичного описання величин, які характеризуються довжиною та напрямком ввели математичний об’єкт – **вектор –**якийє потужним інструментом математики.

**Операції над векторами (повторення)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Назва операції** | **Геометрична форма** | **Аналітична форма** |
| Визначення вектора | **Ris-1**  А – початок вектора, В – кінець вектора | Координати вектора |
| Довжина (модуль) | Довжина (модуль) вектора – довжина відрізка АВ, що задає вектор |  |
| Рівність векторів | Рівні вектори: однакові напрямки і однакові довжини | Вектори рівні, якщо рівні відповідні координати. |
| Додавання векторів | Правило паралелограма  Ris-6  Правило трикутника  Ris-7-1 |  |
| Множення вектора на число | Ris-9 |  |
| Скалярний добуток векторів | Ris-23 | *Властивості:* |

Векторний та мішаний добутки векторів

1. Будемо визначати вектор як елемент лінійного простору. Впорядкована система чисел  називається ***n* – вимірним вектором**, а самі числа –координатами (компонентами) вектора в обраному базисі.

**Лінійна залежність векторів.**

Найпростішим випадком лінійної залежності є пропорційність.





Узагальненням поняття пропорційності є поняття **лінійної комбінації** векторів.

Вектор  є лінійною комбінацією векторів , якщо знайдуться числа  (не всі дорівнюють нулю),такі, що виконується рівність .

Система векторів називається лінійно залежною, якщо хоч один з цих векторів є лінійною комбінацією інших. В іншому випадку – лінійно незалежною.

Часто дають інше (еквівалентне) означення лінійної залежності: Система векторів  називається лінійно залежною , якщо існують числа , хоча б одне з яких відмінне від нуля, такі, що виконується рівність .

Лінійно незалежну систему векторів  називають **максимальною,** якщо приєднання до цієї системи ще одного вектора відповідної розмірності робить її лінійно залежною.

**Базисом** векторного простору називається максимальна лінійно незалежна система векторів цього простору (якщо така існує). Кількість векторів в довільному базисі векторного простору називається **розмірністю** цього простору. В *n* – вимірному просторі будь-яка лінійно незалежна система *n* векторів буде максимальною.

Прикладом лінійного простору є арифметичний простір.

Теорема про розклад вектора за базисом\*\*(доведення не обов’язково)

**Теорема**. Нехай  − лінійний простір. Система векторів  є базисом простору  тоді і тільки тоді, коли довільний вектор  однозначно представляється як лінійна комбінація векторів :

, . (1)

**Доведення**. Необхідність. Нехай  − базис . Звідси  − система твірних , тобто довільний вектор  зображується у вигляді

 для деяких . (2)

Потрібно довести однозначність. Нехай існують  такі, що

. (3)

Віднімемо рівність (3) від (2)

.

Оскільки вектори  − лінійно незалежні, то



або

.

Достатність. Нехай довільний вектор  однозначно представляється як лінійна комбінація

.

Звідси випливає, що  − система твірних простору .

Залишилось довести, що  лінійно незалежні. Припустимо, що  − лінійно залежні. Тоді існують  не всі рівні нулю, що

.

Але нуль-вектор  можна записати . З однозначності розкладу випливає, що

.

Отже, вектори  − лінійно незалежні і  − базис . □

Однозначно визначений набір коефіцієнтів **R** розкладу (1) називається *координатами вектора*  в базисі .

**Запитання та завдання**

1. Що називається лінійним простором?
2. Як визначається розмірність лінійного простору?
3. Повторіть основні операції над векторами та їх властивості.
4. Які вектори називаються лінійно незалежними? Лінійно залежними?
5. Що таке базис лінійного простору?