**Тема 1**

**Лекція 1.1**

**План**

**Логічна будова математики. Поняття числа**. **Комплексні числа.**

**Математика –** дедуктивна наука. Дедукція (від латинського *deductio* – виводжу) – метод дослідження, який полягає в переході від загального до окремого; одна з форм умовиводу, при якій на основі загального правила з одних положень як істинних, виводиться нове істинне положення.

**І**. Основні поняття. Аксіоми.Теореми. Означення.

* Аксіоматична побудова будь-якої математичної теорії починається з переліку **основних** (не означуваних) **понять** (об’єктів та відношень).
* Формулюються аксіоми, в яких відображуються властивості основних понять. **Аксіома** – твердження певної теорії, що приймається без доведення як вихідне, таке, що є підставою для доведення інших тверджень (теорем) цієї теорії.
* За допомогою основних понять формулюються **означення** інших понять.
* На основі означень та аксіом доводяться **теореми**. Теорема (з грецького – розглядаю)– твердження, правильність якого встановлюють за допомогою спеціальних міркувань (доведень).

**ІІ. Число** – основне поняття математики. Поняття числа пройшло довгий шлях розвитку разом з розвитком математики. Практична діяльність людини, з одного боку,та внутрішні потреби математики як науки – з іншого, визначили цей розвиток.

В 19-му столітті було чітко поставлено задачу обґрунтування поняття числа як проблему обґрунтування математики. В результаті робіт Дж. Пеано (1891 р.), К. Вейєрштрасса (1878 р.), Г. Грассмана (1861 р.) було побудовано аксіоматичну теорію натуральних чисел.

Протягом 19 –го і початку 20-го століть в математиці проходять глибокі зміни. Формується аксіоматичний метод побудови математики на теоретико-множинній основі (Г. Кантор). Згідно з цим, будь-яка математична теорія вивчає певну алгебраїчну систему (**множину** з виділеними в ній відношеннями). Відповідно до властивостей множин їх визначають як **кільця та поля**. Вводиться поняття **розширення** алгебраїчної системи.

Числова система є алгебраїчною системою.

В шкільному курсі математики вивчались числа:

**Натуральні** 

**Цілі**  натуральні, їм протилежні та число **0.**

**Раціональні** Q числа, які можна записати у вигляді звичайного дробу виду  . Будь яке раціональне число можна подати у вигляді нескінченого десяткового **періодичного** дробу.

**Ірраціональні** не можна подати у вигляді звичайного дробу. Можна подати у вигляді нескінченого десяткового **неперіодичного** дробу.

**Дійсні R**

****

Систему натуральних чисел визначають як мінімальне **півкільце** відносно операцій додавання і множення з нейтральним елементом множення. Система цілих чисел – мінімальне **кільце**. Раціональні та дійсні – **числові** **поля.**

**Для запису** чисел ми використовуємо *десяткову* *позиційну систему*.

**Геометрична інтерпретація** дійсних чисел – точки на числовій прямій.

**Знак і модуль (абсолютна величина) дійсного числа.**

**Відношення** 

**Арифметичні операції над числами. Властивості операцій.**

Комутативність 

Асоціативність 

Дистрибутивність 





**ІІІ. Розширення** множини дійсних чисел (R) пов’язано з необхідністю розв’язання рівняння , тобто виключення квадратного кореня з від’ємного числа. Проблему було вирішено за допомогою комплексних чисел.

Комплексні числа – результат наступного розширення:

Комплексні (уявні) числа вперше з’явились в роботах Дж. Кардано

«Велике мистецтво» (1545).

Р. Бомбеллі (1572 р.) показав, що дійсні корені рівняння , можуть виражатися через квадратні корені з від’ємних величин і визначив арифметичні операції над такими величинами.

Назву «уявні числа» запропонував Р. Декарт (1637 р.), а символ ***і*** - Л. Ейлер у 1777р. як першу букву французького слова *imaginaire* (уявний) для позначення числа  (уявної одиниці, ).

В 17-18 століттях багато математиків (А. Муавр, Л. Ейлер, Ж. Д'Аламбер, К. Гаусс) займались дослідженням властивостей уявних величин та їх застосуванням (наприклад, в картографії), однак комплексні числа довгий час викликали недовіру в математиків до появи їх геометричної інтерпретації. Г. Вессель, Ж. Арган, К. Гаусс незалежно один від одного запропонували зображувати комплексне число  точкою  на координатній площині. Пізніше з’ясувалось, що зручніше це робити за допомогою радіус-вектора точки .

В сучасній математиці комплексні числа вводяться як результат розширення поля дійсних чисел або геометрично. Для більшої наочності розглянемо геометричний спосіб введення комплексних чисел.

Комплексні числа – система точок **площини**  для яких введено 2 арифметичні операції:

Додавання  та

множення .

Результатом цих операцій є комплексні числа. Множина комплексних чисел – числове **поле.**

Додавання та множення комплексних чисел підкорюються комутативному, асоціативному та дистрибутивному законам.

Число  - уявна одиниця.

Покажемо, що в даній системі є число, квадрат якого дорівнює -1. Помножимо уявну одиницю на себе за правилом множення:  , 

**IV Алгебраїчна форма комплексного числа**.



, де  - дійсні числа.

 – дійсна частина комплексного числа.

 – уявна частина.

Два комплексних числа вважаються **рівними**, якщо рівні їх дійсні та уявні частини: 

**Операції** над комплексними числами в алгебраїчній формі. При виконанні операцій бажано звернути увагу на такі питання: як виконати операцію? Чи завжди можлива операція? Що отримаємо в результаті?

**Вправа 1**

Дано: 

Знайти: 1.

2. 

3. 

4. 

Комплексні числа  и  називаються **спряженими.** Перемноживши ці числа отримаємо формулу скороченого множення . Перевірте самостійно та запам’ятайте.

5. 

6. 

Зобразити числа на комплексній площині, вказати дійсну та уявну частини комплексних чисел.

Повторіть формули скороченого множення та формули тригонометрії (довідник школяра).

**Вправа 2.** Виключити квадратний корінь з комплексного числа .

- комплексне число. Запишемо його в алгебраїчній формі 

Піднесемо обидві частини рівності до квадрату і запишемо праву частину в алгебраїчній формі:



.

Оскільки два комплексних числа рівні, то рівні їх дійсні та уявні частини: 

Розв’язками системи є дві пари :



Отримали **2 квадратних кореня** з числа z: , .

**Самостійно.** Виключити квадратні корені з чисел ; 

**V.** **Тригонометрична форма комплексного числа.** Формула Муавра.

Запис числа в тригонометричній формі . Полярна система координат.

Модуль  і аргумент комплексного числа  



**Вправа 3**

Записати комплексне число в тригонометричній формі 

1. Зобразимо число на комплексній площині.
2. Знайдемо модуль числа 
3. Знайдемо аргумент числа (кут повороту)
4. Підставимо у формулу 

**Множення комплексних чисел** в тригонометричній формі.

Розглянемо два комплексних числа  і .



При спрощенні виразу скористались тим, що , та формулами тригонометрії , .

Отже при множенні комплексних чисел в тригонометричній формі **модулі перемножуються, а аргументи додаються.**

Піднесемо число  до квадрату. Згідно правилу отримаємо:. Пригадайте формули .

Використовуючи метод математичної індукції отримуємо **формулу Муавра**:

.

**Зауваження.** При виконанні операцій над комплексними числами в тригонометричній формі маємо отримати комплексне число в тригонометричній формі.

**Вправа.** Чому даний запис не є тригонометричною формою комплексного числа? , , , , .

**Ділення** комплексних чисел в тригонометричній формі проводимо за правилом: модулі діляться, аргументи віднімаються: . Показати самостійно.

**Виключення кореня** з комплексного числа .

. Результатом виключення кореня з комплексного числа буде комплексне число. Нехай , тоді за означенням кореня *n* –го степеня ( коренем степеня  з комплексного числа z називається число *w*, таке що ) маємо: , тоді .

Із умови рівності комплексних чисел слідує: , .

Звідси , . Отримуємо формулу для виключення кореня з комплексного числа:

 .

**Зауваження.**

* Виключення кореня *n* –го степеня з комплексного числа завжди можливо і дає рівно *n* різних значень.
* Всі добуті корені мають однакові модулі, а аргументи відрізняються доданком, що є кратним .
* При геометричному зображенні всі корені є точки, які лежать на колі з радіусом рівним модулю і центром в точці . Ці точки ділять коло на рівні частини, тобто є вершинами правильного *n* –кутника.

**VI.** Показникова форма комплексного числа. Формула Ейлера.

Показникова форма комплексного числа є ще одним способом запису комплексного числа.

**Формула Ейлера**  дозволяє записати комплексне число у вигляді .

Леонард Ейлер прийшов до своєї видатної формули чисто інтуїтивно. Для її строгого доведення використовується теорія степеневих рядів, яку було побудовано значно пізніше.

**VII.** Розкладання многочленів на множники. Основна теорема алгебри. Розв’язання рівнянь.

**Основна теорема алгебри.**

Кожен многочлен з довільними числовими коефіцієнтами, степінь якого не менше одиниці, має хоча б один корінь, в загальному випадку комплексний.

Вперше цю теорему було доведено К.Ф. Гауссом, тому її часто називають теоремою Гаусса. Дана теорема є одним з найвидатніших досягнень математики і використовується в різних галузях науки. Звідси її назва: **основна теорема алгебри.**

Для доведення цієї теореми потрібні знання, що виходять за межі наших можливостей. Звернемо увагу на деякі її наслідки.

* Кожен многочлен з довільними числовими коефіцієнтами, степінь якого , розкладається на добуток лінійних множників.
* Кожен многочлен з довільними числовими коефіцієнтами, степінь якого , має *n* коренів, якщо рахувати кожен корінь із урахуванням його кратності.

**Література:**

1. Лінійна алгебра: методичні вказівки та самостійні завдання з вищої математики / уклад. Бондаренко Н.В., Пастухова М.С.- К. :КНУБА, 2015
2. Комплексні числа і многочлени: Навч. Посібник./Ісакова Т.І., Пастухова М.С./.- К. :КНУБА, 2006.
3. Вища математика. Навч.посібник /Денисюк В.П.,Репета В.К./ Ч.2 К.НАУ, 2005 ( с.63-74)

**Запитання**

1. Які числові множини вивчались у шкільному курсі математики?
2. Чому виникла необхідність у розширенні множини дійсних чисел?
3. Що таке уявна одиниця?
4. Які є форми запису комплексного числа?
5. Сформулюйте правила виконання алгебраїчних операцій над комплексними числами, записаними в кожній з можливих форм.
6. Сформулюйте властивості операцій.
7. Які комплексні числа називаються рівними (в залежності від форми)?
8. Геометрична інтерпретація комплексних чисел.
9. Що таке модуль та аргумент комплексного числа?
10. Чому дорівнює модуль та аргумент числа ?
11. Формула Муавра.
12. Скільки коренів можна добути з комплексного числа?
13. В чому полягає основна теорема алгебри?