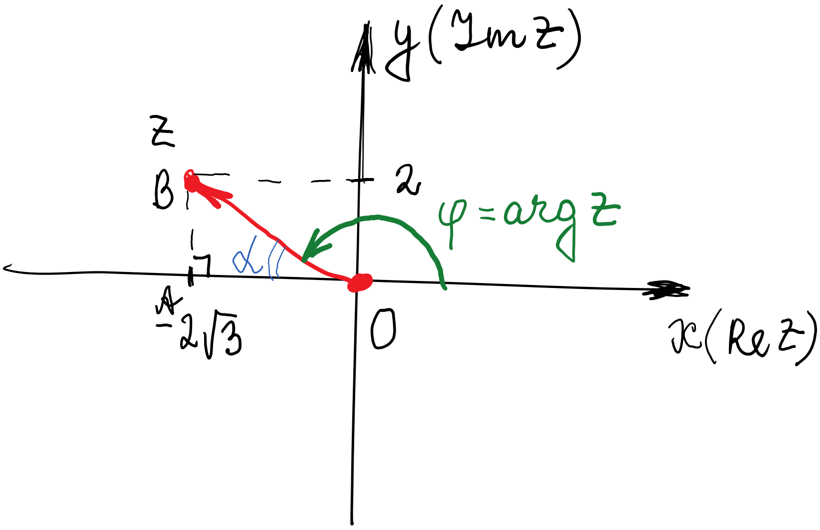
Зразки виконання вправ

Вправа 1. Дано: комплексне число $z = -2\sqrt{3} + 2i$

Знайти: $z^8; \sqrt[4]{z}$

Розв'язання.

1. Зобразимо число в комплексній площині (схематично).



2. Запишемо число в тригонометричній формі. Для цього знайдемо його **модуль**

$$|z| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = 4$$

і аргумент

з ΔOAB знайдемо допоміжний кут α:

$tg\,\alpha = \frac{AB}{AO} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (з таблиці значень тригонометричних функцій)

$\varphi = \pi - \alpha = \frac{5\pi}{6}$ – кут повороту

$\arg z = \frac{5\pi}{6}$

$$z = -2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

можна перевірити оберненою дією

3. Застосуємо формулу **Муавра** $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), n \in N$

$$z^8 = 4^8\left(\cos\frac{8\cdot 5\pi}{6} + i\sin\frac{8\cdot 5\pi}{6}\right)$$

Даний запис не є тригонометричною формою комплексного числа. Чому?

$$\frac{40\pi}{6} = \frac{20\pi}{3} = 6\pi + \frac{2\pi}{3}$$

Враховуючи періодичність тригонометричних функцій, отримуємо

$$z^8 = 4^8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

Якщо є можливість, можна повернутись до алгебраїчної форми.

4. Знайдемо $\sqrt[4]{z}$. Застосуємо формулу

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0;1;\ldots;n-1$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{4}\right),\ k = 0;1;2;3$$

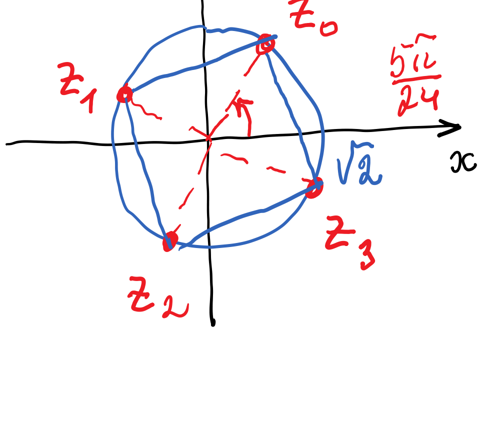
$k=0$ $\quad z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24}\right)$

$k=1$ $\quad z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{24} + i\sin\frac{17\pi}{24}\right)$

$k=2$ $\quad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{29\pi}{24} + i\sin\frac{29\pi}{24}\right)$

$k=3$ $\quad z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{41\pi}{24} + i\sin\frac{41\pi}{24}\right)$

Зобразимо отримані числа на комплексній площині:



Всі корені лежать на колі радіуса $\sqrt{2}$ і є вершинами правильного чотирикутника.

Вправа 2

Розв'язати рівняння $x^2-4x+5=0$

Оскільки дане рівняння є рівнянням другого степеня, то згідно основної теореми алгебри завжди має два розв'язки.

$D>0$ два дійсних різних

$D=0$ два дійсних співпадаючих

$D<0$ два комплексно спряжених.

В нашому випадку $D=16-20=-4$

$$x_{1,2}=\frac{4-\sqrt{-4}}{2}=\frac{4\pm 2i}{2}=2\pm i$$

Нагадую, що $\sqrt{-1}=\pm i$

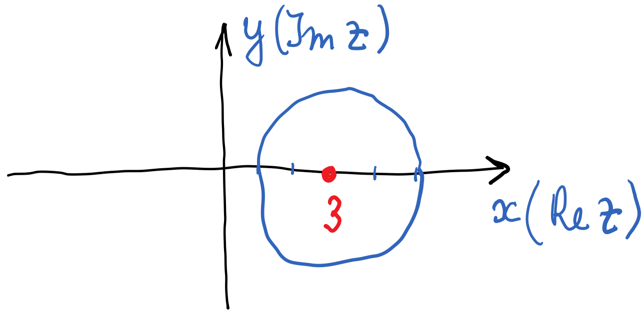
Вправа 3

Зобразити на комплексній площині числа, що задовольняють умовам

$a)\left|z-3\right|=2$

Перший спосіб (геометричний). Пригадайте, що геометричний зміст модуля – відстань. $AB=\left|a-b\right|, A(a), B(b)$.

Рівняння можна прочитати так: відстань від точки $z=3$ до шуканої точки $Z(z)$ дорівнює 2 на комплексній площині. Очевидно, що точки, які задовольняють умову лежать на колі радіуса 2 з центром $z=3$



2-й спосіб:

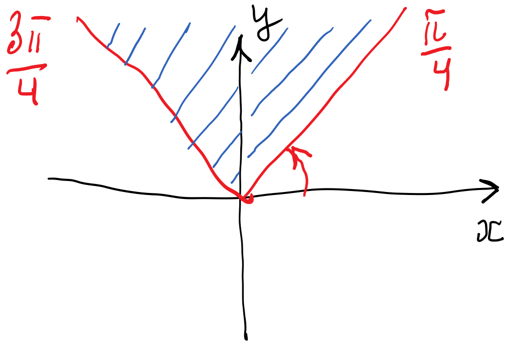
$z = x + iy \ (x, y \in R)$

$|z-3| = |(x-3)+iy| = \sqrt{(x-3)^2+y^2} = 2, \quad \uparrow 2$

комплексне число

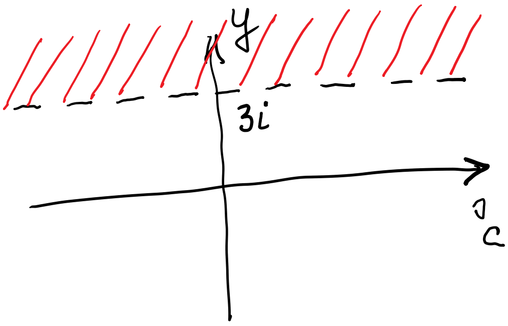
$(x-3)^2+y^2=4$ – рівняння кола з центром $(3;0)$ радіусом 2

$b)\ \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{3\pi}{4}$



$c)\ \operatorname{Im} z > 3$

$z = x + iy, \quad \operatorname{Im} z = y, \quad y > 3$



Рекомендую посібник, де ви зможете знайти додаткові вправи та приклади розв’язання. Посібник має бути в електронній бібліотеці КНУБА

Комплексні числа і многочлени: Навч. Посібник./Ісакова Т.І., Пастухова М.С./.- К. :КНУБА, 2006.