Заняття12

Інтегрування частинами. Приклади рішень

Сьогодні на занятті ми навчимося інтегрувати частинами. Метод інтегрування частинами– це один з каменів інтегрального числення. Для ефективного вивчення теми **необхідно** добре орієнтуватися в матеріалах двох попередніх занять. Як завжди, під рукою повинні бути: *Таблиця інтегралів* і *Таблиця похідних*. Яку задачу вирішує метод інтегрування частинами? Метод інтегрування частинами вирішує дуже важливу задачу, він дозволяє інтегрувати деякі функції, що відсутні в таблиці, **добуток** функцій, а в ряді випадків – і ділення. Як ми пам`ятаємо, не має зручної формули: $\cancel{\int uvdx = \int udx \cdot \int vdx}$. Але є така: $\int udv = uv - \int vdu$ – формула інтегрування частинами власною персоною.

Частинами беруться інтеграли наступного вигляду:

1) $\int \ln xdx$, $\int (x^2+3)\ln xdx$, $\int x\ln^2 xdx$ – логарифм, логарифм, помножений на будь-який многочлен.

2) $\int xe^x dx$, $\int (x^2-2x+5)e^{-2x}dx$ – експоненціальна функція, помножена на будь-який многочлен. Сюди ж можна віднести інтеграли виду $\int x\cdot 4^x dx$ – показникова функція, помножена на многочлен, але на практиці відсотках так в 97, під інтегралом красується симпатична літера «е». …

3) $\int x\cos 6xdx$, $\int (x^2+3x)\sin 2xdx$, $\int xtg^2 xdx$ – тригонометричні функції, помножені на будь-який многочлен.

4) $\int \arcsin xdx$, $\int x^2 arctgxdx$ – зворотні тригонометричні функції («арки»), «арки», помножені на будь-який многочлен.

Також частинами беруться деякі дроби, відповідні приклади ми теж ретельно розглянемо.

Інтеграли від логарифмів

Приклад 1

Знайти невизначений інтеграл.

$\int \ln xdx$

Класика. Час від часу даний інтеграл можна зустрітити в таблицях, але користуватися готовою відповіддю небажано. Тому що інтеграл, що розглядається не табличний – він береться частинами. Вирішуємо:

$\int \ln xdx = (*)$

Перериваємо рішення на проміжкові пояснення.

Використовуємо формулу інтегрування частинами: $\int udv = uv - \int vdu$

Формула застосовується зліва направо

Дивимось на ліву частину: $\int udv$. Вочевидь, що в нашому прикладі $\int \ln xdx$ (і у всіх інших, які ми розглянемо) щось необхідно позначити за u, а щось за dv.

В інтегралах такого типу за u завжди позначається логарифм.

Технічно оформлення рішення реалізується наступним чином, в стовпчик записуємо:

$u = \ln x$

$dv = dx$

Тобто, за u ми позначили логарифм, а за dv – **частину** підінтегрального виразу, що залишився.

Наступний етап: знаходимо диференціал du :

$$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx$$

Диференціал – це майже те ж саме, що і похідна, як його знаходити, ми вже розбирали на попередніх заняттях.

Тепер знаходимо функцію v. Для того щоб знайти функцію v необхідно проінтегрувати **праву частину** нижньої рівності $dv = dx$:

$$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$$

Тепер відкриваємо наше рішення і конструюємо праву частину формули: $uv - \int v du$.

Ось до речі, і приклад чистового рішення з невеликими примітками:

$$\int \ln x dx = (*)$$

$$\text{Интегрируем по частям}: \int u dv = uv - \int v du$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$$

$$(*) = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C, \text{ где } C = const$$

Єдиний момент, в добутку uv я одразу переставила місцями u і v, так як множник x прийнято записувати перед логарифмом.

Як бачите, застосування формули інтегрування частинами, звело наше рішення до двох простих інтегралів.

Зверніть увагу, що в ряді випадків **одразу після** застосування формули, під інтегралом, що залишився, обов`язково проводиться спрощення – в прикладі, що розглядається. ми скоротили підінтегральний вираз на «ікс».

Виконаємо перевірку. Для цього необхідно взяти похідну від відповіді:

$$(x \ln x - x + C)' = (x \ln x)' - (x)' + (C)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' - 1 + 0 =$$

$$= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

Отримали вхідну підінтегральну функцію, значить, інтеграл вирішений правильно.

В ході перевірки ми використали правило диференціювання добутку: $(uv)' = u'v + uv'$. І це не випадково.

Формула інтегрування частинами $\int u dv = uv - \int v du$ **і формула** $(uv)' = u'v + uv'$ **– це два взаємно обернених правила.**

<u>Приклад 2</u>

Знайти невизначений інтеграл.

$\int x \ln^2 x dx$

Підінтегральна функція представляє собою добуток логарифма на многочлен.
Вирішуємо.

$\int x \ln^2 x dx = (*)$

Я ще один раз ретельно розпишу порядок застосування правила, в подальшому приклади будуть оформлюватися більш коротко.
Як вже говорилося, за u необхідно прийняти логарифм (те, що він в степені – значення не має). За dv приймемо **частину, що залишилася,** підінтегрального виразу.
Записуємо в стовпчик:

$u = \ln^2 x$

$dv = xdx$

Спочатку знаходимо диференціал du:

$$u = \ln^2 x \Rightarrow du = (\ln^2 x)' dx = 2\ln x \cdot (\ln x)' dx = \frac{2\ln x dx}{x}$$

$dv = xdx$

Тут використано правило диференціювання складної функції $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$. Тепер знаходимо функцію v, для цього інтегруємо **праву частину** нижньої рівності $dv = xdx$:

$$u = \ln^2 x \Rightarrow du = (\ln^2 x)' dx = 2\ln x \cdot (\ln x)' dx = \frac{2\ln x dx}{x}$$

$$dv = xdx \Rightarrow v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

Для інтегрування ми застосували найпростішу табличну формулу $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Тепер все готово для застосування формули $\int udv = uv - \int vdu$. Відкриваємо «зірочкою» і «конструюємо» рішення у відповідності з правою частиною $uv - \int vdu$:

$$(*) = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \int \left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{2\ln x dx}{x} \right) = \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \int x \ln x dx = (*)$$

Під інтегралом в нас знову многочлен на логарифм! Тому рішення знову ж таки переривається і правило інтегрування частинами застосовується другий раз. Не забуваємо, що за u в схожих ситуаціях завжди позначається логарифм.

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Добре було б, якщо до даного моменту прості інтеграли і похідні Ви вміли знаходити усно.

$$(*) \overset{(1)}{=} \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \int \left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} \right) \right) \overset{(2)}{=} \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{1}{2} \int xdx \overset{(3)}{=}$$

$$= \frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C \overset{(4)}{=} \frac{x^2 (2\ln^2 x - 2\ln x + 1)}{4} + C, \ C = const$$

(1) Не плутаємося в знаках! Дуже часто тут гублять мінус, також зверніть увагу, що мінус відноситься до **всієї** дужки $\left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \int \left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} \right) \right)$, і ці дужки треба коректно розкрити.
(2) Розкриваємо дужки. Останній інтеграл спрощуємо.

(3) Беремо останній інтеграл.
(4) «Причісуємо» відповідь.
Необхідність декілька разів застосовувати правило інтегрування частинами виникає не так вже й рідко.

<u>Інтеграли від експоненти, помноженої на многочлен</u>
Загальне правило: **за u завжди позначається многочлен**
<u>Прклад 3</u>
Знайти невизначений інтеграл.
$$\int (x-2)e^{2x}dx$$
Рішення:
$$\int (x-2)e^{2x}dx = (*)$$
Використовуючи знайомий алгоритм, інтегруємо частинами:
$$u = x-2 \Rightarrow du = (x-2)'dx = dx$$
$$dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$(*) = \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C =$$
$$= \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C, \text{ где } C = const$$
Якщо виникли труднощі з інтегралом $\int e^{2x}dx$, то слід звернутися до презентації **[Метод заміни змінної в невизначеному інтегралі](#)**.
Єдине, що ще можна зробити, це «причепурити» відповідь:
$$\frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{2(x-2)e^{2x} - e^{2x}}{4} + C =$$
$$= \frac{(2x-4-1)e^{2x}}{4} + C = \frac{(2x-5)e^{2x}}{4} + C, \text{ где } C = const$$
Але якщо Ваша техніка обчислення не дуже добра, то самий вигідний варіант залишити відповіддю $\frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C, \text{ где } C = const$ або $\frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C, \text{ где } C = const$
Тобто, приклад вважається вирішеним, коли взятий останній інтеграл. Помилкою не буде, інша річ, що викладач може попросити спростити відповідь.

<u>Інтеграли від тригонометричних функцій, помножених на многочлен</u>
Загальне правило: **за u завжди позначається многочлен**
<u>Приклад 4</u>
Знайти невизначений інтеграл.
$$\int x\cos 6x dx = (*)$$
Інтегруємо частинами:
$$u = x \Rightarrow du = dx$$
$$dv = \cos 6x dx \Rightarrow v = \int \cos 6x dx = \frac{1}{6}\sin 6x$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = \frac{1}{6}x\sin 6x - \frac{1}{6}\int \sin 6x dx = \frac{1}{6}x\sin 6x - \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{6}\cos 6x\right) =$$

$$= \frac{1}{6}x\sin 6x + \frac{1}{36}\cos 6x + C, \text{ где } C = const$$

Хммм, …і коментувати нема чого.

Приклад 5

Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$$

Ще один приклад з дробом. Як і в попередніх прикладах за u позначається многочлен.

$$\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = (*)$$

Інтегруємо частинами:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow v = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = -xctgx + \int ctgxdx = -xctgx + \int \frac{\cos xdx}{\sin x} =$$

$$= -xctgx + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -xctgx + \ln|\sin x| + C, \text{ где } C = const$$

Якщо виникли труднощі або непорозуміння з знаходженням інтегралу $\int ctgxdx$, то рекомендую повернутися до презентації **Інтеграли від тригонометричних функцій**.

Інтеграли від зворотних тригонометричнихх функцій.
Інтеграли від звортних тригонометричних функцій, помножених на многочлен

Загальне правило: **за** u **завжди позначається зворотна тригонометрична функція**. Нагадую, що до зворотних тригонометричних функцій відносяться арксинус, арккосинус, арктангенс і арккотангенс.

Приклад 6

Знайти невизначений інтеграл.

$$\int arctg 2xdx$$

Вирішуємо.

$$\int arctg 2xdx = (*)$$

Інтегруємо частинами:

$$u = arctg2x \Rightarrow du = (arctg2x)'dx = \frac{1}{1+(2x)^2}\cdot(2x)'dx = \frac{2dx}{1+4x^2}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = xarctg2x - 2\int \frac{xdx}{1+4x^2} = xarctg2x - \frac{1}{4}\int \frac{d(1+4x^2)}{1+4x^2} =$$

$$= xarctg2x - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2) + C, \text{ где } C = const$$

Интеграл $\int \frac{2xdx}{1+4x^2}$ знайдено методом піднесення функції під знак диференціалу, можна застосувати і метод заміни в «класичному» вигляді. Аналогічний приклад ми розбирали в презентації **Метод заміни змінної в невизначеному інтегралі**.

Таким чином, окрім «чистого» інтегрування частинами нерідко необхідно застосувати і інші методи, прийоми вирішення.