Заняття 8

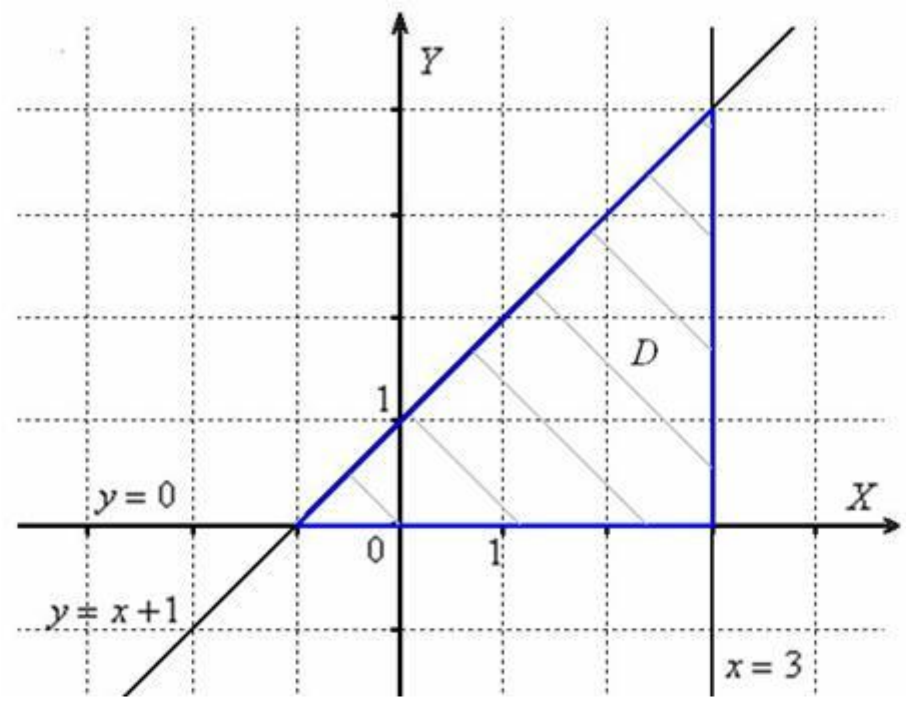
Як знайти найбільше і найменше значення функції $z = f(x, y)$ в обмеженій замкненій області?

Сьогодні ми розглянемо ще одну розповсюджену задачу. Як ви здогадуєтесь, це просторовий аналог задачі з**находження найбільшого і найменшого значень функції на відрізку**, і для її вирішення знадобиться мінімальне знання теми.

Почнемо з області. Область, про яку йде мова в умові, представляє собою ***обмежену замкнену*** множину точок площини XOY. Наприклад, множина точок, обмежена трикутником, включаючи УВЕСЬ трикутник *(якщо з **границі** «виколоти» хоча б одну точку, то область перестане бути замкненою)*. На практиці також зустрічаються області прямокутної, круглої і більш складних форм. Слід зазначити, що в теорії математичного аналізу надаються точні визначення *обмеженості, замкненості, границі і т.д.*, але, думаю, всі знають ці поняття на інтуїтивному рівні, а більшого зараз і не потрібно.

Плоска область стандартно позначається літерою D, і, як правило, задається аналітично – кількома рівнями *(не обов`язково лінійними)*; рідше нерівностями. Типовий словниковий зворот: «замкнена область D, обмежена лініями $y = 0,\ x = 3,\ x - y + 1 = 0$».

Невід`ємною частиною розглядаємого завдання є побудова області D на кресленні. Як це зробити? Необхідно накреслити всі перераховані лінії (в даному випадку 3 **прямі**) і проаналізувати, що ж вийшло. Шукану область зазвичай злегка штрихують, а її границю виділяють жирною лінією:



Цю ж область можна задати і **лінійними нерівностями**: $D: y \geq 0,\ x \leq 3,\ x - y + 1 \geq 0$, які чомусь частіше записують переліковим списком, а не **системою**.
Так як границя належить області, то всі нерівності, відповідно, *не строгі*.

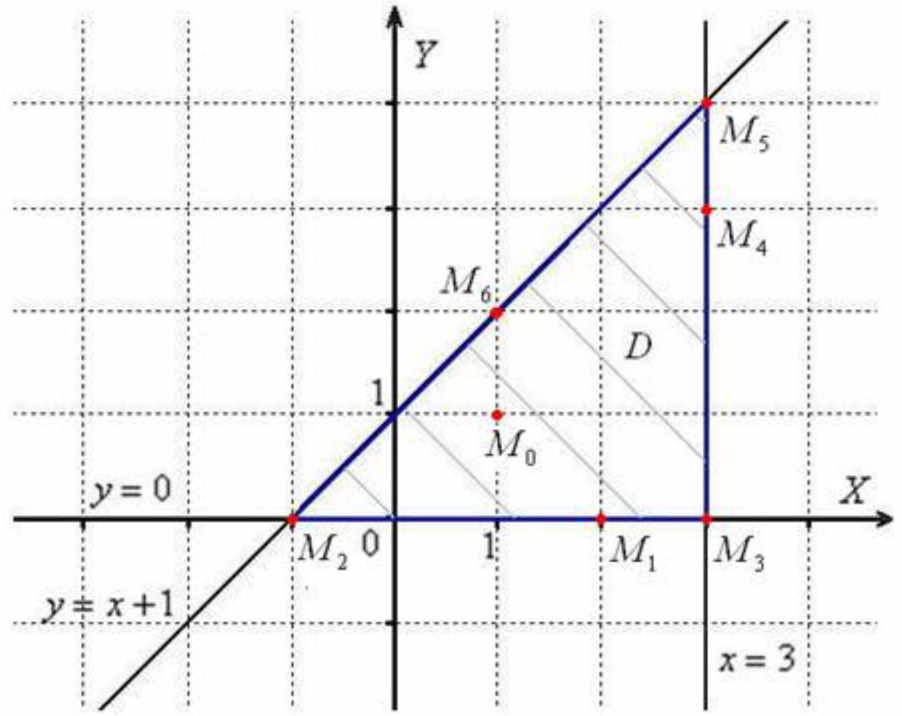
А тепер сенс задачі. Уявіть, що з початку координат прямо на вас виходить вісь OZ. Розглянемо функцію $z = f(x; y)$, яка **неперервна в кожній** точці області D. Графік даної функції представляє собою деяку **поверхню**, і маленьке щастя є в тому, що для вирішення сьогоднішньої задачі нам зовсім не обов`язково знати, як ця поверхня виглядає. Вона може бути розташована вище, нижче, перетинати площину XOY – все це не важливо. А важливо наступне: згідно з *теоремою Вейерштрасса*, **неперервна** в *обмеженій замкненій* області D функція $z = f(x; y)$ досягає в ній найбільшого *(найвищого»)* і найменшого *(самого «найнижчого»)* значень, які і необхідно знайти. Такі значення досягаються **або** в

стаціонарних точках, що належать області D, **або** в точках, які лежать на границі цієї області. З чого випливає простий і прозорий алгоритм рішення:

Приклад 1

Знайти найбільше і найменше значення функції $z = f(x; y) = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в обмеженій замкненій області $D: y = 0,\ x = 3,\ x - y + 1 = 0$

Розв`язання: перш за все, необхідно зобразити область D на рисунку. На жаль, мені технічно складно зробити інтерактивну модель задачі, і тому я одразу приведу фінальну ілюстрацію, на якій зображені всі «підозрілі» точки $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$, знайдені в ході дослідження. Зазвичай вони проставляються одна за іншою по мірі їх знаходження:



Виходячи з преамбули, рішення зручно розбити на два пункти:

I) Знайдемо стаціонарні точки. Це стандартна дія, яку ми не одноразово виконували на занятті **об екстремумах декількох змінних**:

$$z'_x = (x^2 + 2xy - y^2 - 4x)'_x = 2x + 2y - 0 - 4 = 2x + 2y - 4$$

$$z'_y = (x^2 + 2xy - y^2 - 4x)'_y = 0 + 2x - 2y - 0 = 2x - 2y$$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow x = y = 1$$

Знайдена стаціонарна точка **належить** області: $M_0(1; 1) \in D$ *(відмічаємо її на рисунку)*, а значить, нам слід обчислити значення функції $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в даній точці:

$z(M_0) = z(1; 1) = 1 + 2 - 1 - 4 = \mathbf{-2}$ – як і в презентації **Найбільше і найменше значення функції на відрізку**.

Зверніть увагу на наше друге щастя – не має ніякого сенсу перевіряти **достатню умову екстремуму**. Чому? Якщо в точці M_0 функція досягає, наприклад, *локального мінімуму*, то це ЩЕ НЕ ОЗНАЧАЄ, що отримане значення $z(M_0)$ буде *мінімальним* у всій області D *(див. початокпрезентації про **безумовні екстремуми**)*.

Що робити, якщо стаціонарна точка НЕ належить області? Майже нічого! Необхідно зазначити, що $M_0 \notin D$ і перейти до наступного пункту.

II) Досліджуємо границю області.

Оскільки границя складається зі сторін трикутника, то дослідження зручно розбити на 3 підпункти. Спочатку вигідніше розглянути відрізки, паралельні координатним осям, і в першу чергу – ті, що лежать на самих осях.

1) Розберемося з нижньою стороною трикутника. Для цього підставимо $y = 0$ безпосередньо в функцію:

$z = x^2 + 2x \cdot 0 - 0^2 - 4x = x^2 - 4x$

Як варіант, можна оформити і так:

$$\begin{cases} z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad z = x^2 - 4x$$

Геометрично це означає, що координатна площина XOZ *(яка теж задається рівнянням* $y = 0$*)* «висікає» з **поверхні** $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ «просторову» параболу $z = x^2 - 4x$, вершина якої в той же час підпадає під підозру. З`ясуємо, **де вона знаходиться**:

$z' = (x^2 - 4x)' = 2x - 4 = 0$

$x = 2 \in [-1; 3]$ – отримане значення «попало» в область, і може статися, що в точці $M_1(2; 0)$ *(відмічаємо на рисунку)* функція $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ досягає найбільшого або найменшого значення у всій області D. Так чи інакше, проводимо обчислення:

$z(M_1) = z(2; 0) = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 0 - 0^2 - 4 \cdot 2 = 4 + 0 - 0 - 8 = \mathbf{-4}$

Інші «кандидати» – це, звісно ж, кінці відрізку. Обчислимо значення функції $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в точках $M_2(-1; 0), M_3(3; 0)$ *(відмічаємо на рисунку)*:

$z(M_2) = z(-1; 0) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 - 0^2 - 4 \cdot (-1) = 1 - 0 - 0 + 4 = \mathbf{5}$

$z(M_3) = z(3; 0) = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 0 - 0^2 - 4 \cdot 3 = 9 + 0 - 0 - 12 = \mathbf{-3}$

Тут, до речі, можна виконати усну міні-перевірку по «спрощеній» версії $z = x^2 - 4x$:

$z(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$

$z(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$

$z(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 = 9 - 12 = -3$

2) Для дослідження правої сторони трикутника підставляємо $x = 3$ в функцію $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ и «наводимо там лад»:

$z = 3^2 + 2 \cdot 3y - y^2 - 4 \cdot 3 = 9 + 6y - y^2 - 12 = -y^2 + 6y - 3$

Тут одразу ж виконуємо чорнову перевірку, «продзвонюючи» вже оброблений кінець відрізку:

$z(M_3) = z(3; 0) = -0^2 + 6 \cdot 0 - 3 = -3$, добре.

Геометрична ситуація подібна до попереднього пункту:

$z' = (-y^2 + 6y - 3)' = -2y + 6 = 0$

$y = 3 \in [0; 4]$ – отримане значення теж «увійшло в коло наших інтересів», а значить, необхідно обчислити, чому дорівнює функція $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в точке $M_4(3; 3)$:

$z(M_4) = z(3; 3) = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 3^2 - 4 \cdot 3 = 9 + 18 - 9 - 12 = \mathbf{6}$

Дослідимо другий кінець відрізку $M_5(3; 4)$:

$z(M_5) = z(3; 4) = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 4^2 - 4 \cdot 3 = 9 + 24 - 16 - 12 = \mathbf{5}$

Використовуючи функцію $z=-y^2+6y-3$, виконаємо контрольну перевірку:

$z(3)=-3^2+6\cdot 3-3=-9+18-3=6$

$z(4)=-4^2+6\cdot 4-3=-16+24-3=5$

3) Напевно, всі здогадуються, як досліджувати сторону, що залишилася M_2M_5.

Підставляємо $y=x+1$ в функцію $z=x^2+2xy-y^2-4x$ і проводимо спрощення:

$z=x^2+2x(x+1)-(x+1)^2-4x=x^2+2x^2+2x-x^2-2x-1-4x=2x^2-4x-1$

Кінці відрізку $M_2(-1;0)$, $M_5(3;4)$ вже досліджені, але все одно перевіряємо, чи правильно ми знайшли функцію $z=2x^2-4x-1$:

$z(-1)=2\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)-1=2+4-1=5$ – співпало з результатом $z(M_2)=5$ 1-го підпункту;

$z(3)=2\cdot 3^2-4\cdot 3-1=18-12-1=5$ – співпало з результатом $z(M_5)=5$ 2-го підпункту.

Залишилось з`ясувати, чи є щось цікаве в самому відрізку M_2M_5:

$z=(2x^2-4x-1)'=4x-4=0$

$x=1\in[-1;3]$ – є! Підставляючи $x=1$ в рівняння прямої $y=x+1$, отримаємо ординату цієї «цікавості»: $y=1+1=2$

Відмічаємо на рисунку точку $M_6(1;2)$ і знаходимо відповідне значення функції $z=x^2+2xy-y^2-4x$:

$z(M_6)=z(1;2)=1^2+2\cdot 1\cdot 2-2^2-4\cdot 1=1+4-4-4=\mathbf{-3}$

Проконтролюємо обчислення за «скороченою» версією $z=2x^2-4x-1$:

$z(1)=2\cdot 1^2-4\cdot 1-1=2-4-1=-3$, порядок.

І заключний крок: УВАЖНО проглядаємо всі «жирні» числа, починаючим рекомендую скласти єдиний список:

$z(M_0)=z(1;1)=\mathbf{-2}$

$z(M_1)=z(2;0)=\mathbf{-4}$

$z(M_2)=z(-1;0)=\mathbf{5}$

$z(M_3)=z(3;0)=\mathbf{-3}$

$z(M_4)=z(3;3)=\mathbf{6}$

$z(M_5)=z(3;4)=\mathbf{5}$

$z(M_6)=z(1;2)=\mathbf{-3}$

з якого вибираємо найбільше і найменше значення. Відповідь запишемо в стилістиці задачі знаходження **найбільшого і найменшого значень функції на відрізку**:

$\max\limits_D z=z(3;3)=6,\quad \min\limits_D z=z(2;0)=-4$

На всяк випадок ще раз прокоментую геометричний сенс результату:

$z(3;3)=6$ – тут найвища точка поверхні $z=x^2+2xy-y^2-4x$ в області D;

$z(2;0)=-4$ – тут найнижча точка поверхні $z=x^2+2xy-y^2-4x$ в області D.

В розглянутій задаче у нас виявилося 7 «підозрілих» точок, але від задачі до задачі їх кількість змінюється. Для трикутної області мінімальний «дослідницький набір» складається з трьох точок. Таке буває, коли функція $z=f(x;y)$, наприклад, задає **площину** – зовсім зрозуміло, що стаціонарні точки відсутні, і функція може досягти найбільшого/найменшого значень тільки в вершинах трикутника. Але таких прикладів зовсім мало – зазвичай доводиться мати справу з якою-небудь **поверхнею 2-го порядку**.

Приклад 2

Знайти найбільше і найменше значення функції $z = f(x; y)$ в обмеженій замкненій області D.

$z = 5x^2 - 3xy + y^2, \quad D: 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1$

Особливу увагу зверніть на раціональний порядок і техніку дослідження границі області, а також на ланцюг проміжкових перевірок, яка практично стовідсотково дозволить позбавитись помилок обчислення.

Систематизуємо алгоритм рішення:

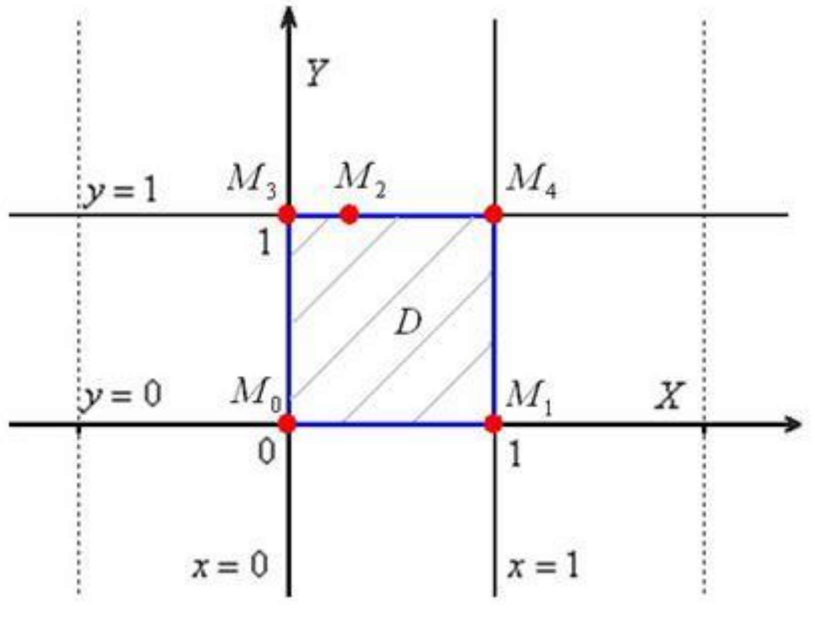
– На першому кроці будуємо область D, її бажано заштрихувати, а границю виділити жирною лінією. В ході рішення будуть з`являтися точки, які необхідно проставляти на рисунку.

– Знайдемо стаціонарні точки і обчислимо значення функції $z = f(x; y)$ **тільки в тих з них**, які належать області D. Отримані значення виділяємо в тексті (наприклад, обводимо олівцем). Якщо стаціонарна точка НЕ належить області, то відмічаємо цей факт значком $\notin$ або словами. Якщо ж стаціонарних точок не має зовсім, то робимо письмовий висновок про те, що вони відсутні. **В будь-якому випадку даний пункт пропускати не можна!**

– Дослідимо границю області. Спочатку вигідно розібратися з прямими, які паралельні координатним осям *(якщо такі є взагалі)*. Значення функції, що обчислені в «підозрілих» точках, також виділяємо. Про техніку рішення дуже багато сказано вище і ще дещо буде сказано нижче – читайте, перечитуйте, вникайте!

– З виділених чисел обираємо найбільше і найменше значення і даємо відповідь. Іноді буває, що такі значення функція досягає одразу в декількох точках – в цьому випадку всі ці точки слід відзначити у відповіді. Нехай, наприклад, $z(M_1) = z(M_2)$ і виявилося, що це найменше значення. Тоді записуємо, що $\min\limits_D z = z(M_1) = z(M_2) = const$

<u>Розв`язання</u>: зобразимо область D на рисунку:



I) Обчислимо значення функції в стаціонарних точках, що належать даній області:

$z'_x = (5x^2 - 3xy + y^2)'_x = 5 \cdot 2x - 3y + 0 = 10x - 3y$

$z'_y = (5x^2 - 3xy + y^2)'_y = 0 - 3x + 2y = -3x + 2y$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 3y = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = y = 0, \quad M_0(0; 0) \in D$$

$z(M_0) = z(0; 0) = 0 - 0 + 0 = \mathbf{0}$

II) Дослідимо границю області

1) Якщо $y=0$, *то* $z=5x^2-3x\cdot 0+0^2=5x^2$
$z=(5x^2)'=10x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0\in[0;1]$ *– точка* M_0 *вже досліджена.*
Обчислимо значення функції на другому кінці відрізку:
$z(M_1)=z(1;0)=5\cdot 1^2-3\cdot 1\cdot 0+0^2=\mathbf{5}$

2) Якщо $y=1$, *то* $z=5x^2-3x\cdot 1+1^2=5x^2-3x+1$
$z'=(5x^2-3x+1)'=10x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=0{,}3\in[0;1]$
Обчислимо значення функції в точці $M_2(0{,}3;1)$:
$z(M_2)=z(0{,}3;1)=5\cdot 0{,}3^2-3\cdot 0{,}3\cdot 1+1^2=0{,}45-0{,}9+1=\mathbf{0{,}55}$
Обчислимо значення функції на кінцях відрізку:
$z(M_3)=z(0;1)=5\cdot 0^2-3\cdot 0\cdot 1+1^2=\mathbf{1}$
$z(M_4)=z(1;1)=5\cdot 1^2-3\cdot 1\cdot 1+1^2=5-3+1=\mathbf{3}$

3) Якщо $x=0$, *то* $z=5\cdot 0^2-3\cdot 0\cdot y+y^2=y^2$
$z=(y^2)'=2y=0 \quad \Rightarrow \quad y=0\in[0;1]$ *– точка* M_0 *вже досліджена.*
Другий кінець відрізку (M_3) *також досліджений.*

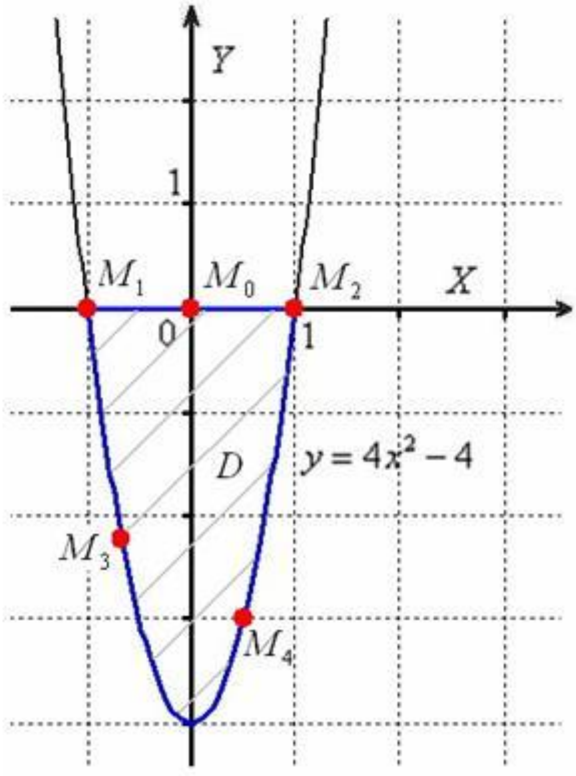
4) Якщо $x=1$, *то* $z=5\cdot 1^2-3\cdot 1\cdot y+y^2=5-3y+y^2$
$z'=(5-3y+y^2)'=-3+2y=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{3}{2}\notin[0;1]$
Кінці відрізку (M_1, M_4) *вже досліджені.*

Відповідь: $\max\limits_D z=z(1;0)=5, \quad \min\limits_D z=z(0;0)=0$

Заключні приклади присвячені іншим корисним ідеям, які стануть в пригоді на практиці:
Приклад 3
Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^2+xy-2$ в замкненій області $D: 4x^2-4\le y\le 0$.

Умову можна записати в еквівалентному вигляді, як систему $\begin{cases} y\le 0 \\ y\ge 4x^2-4 \end{cases}$ або ж в більш традиційному для даної задачі вигляді: $D: y\le 0, \ y\ge 4x^2-4$
Нагадую, що з *нелінійними* нерівностями ми стикалися на самому першому занятті по темі ФДЗ, і якщо вам не зрозумілий геометричний сенс запису $y\ge 4x^2-4$, то не відкладайте і проясніть ситуацію прямо зараз ;-)

Розв`язання, як завжди, починається з побудови області, яка представляє собою так звану «підошву»:



I) Знайдемо стаціонарні точки:

$z'_x = (x^2 + xy - 2)'_x = 2x + y - 0 = 2x + y$

$z'_y = (x^2 + xy - 2)'_y = 0 + x - 0 = x$

Система-мрія:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

Стаціонарна точка $M_0(0;\,0) \in D$ належить області, а саме, лежить на її границі.

$z(M_0) = z(0;\,0) = 0 + 0 - 2 = \mathbf{-2}$

II) Досліджуємо границю області. Почнемо з осі абсцис:

1) Якщо $y = 0$, то $z = x^2 + x \cdot 0 - 2 = x^2 - 2$

Знайдемо, де вершина параболи:

$z' = (x^2 - 2)' = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \in [-1;\,1]$ – цінуйте такі моменти – «попали» прямо в точку M_0, з якою вже все ясно. Але про перевірку все одно не забуваємо:

$z(0) = 0^2 - 2 = -2$

Обчислимо значення функції на кінцях відрізку:

$z(M_1) = z(-1;\,0) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = \mathbf{-1}$

$z(M_2) = z(1;\,0) = 1^2 - 2 = \mathbf{-1}$

2) З нижньою частиною «підошви» розберемося «за один крок» – без всіляких комплексів підставляємо $y = 4x^2 - 4$ в функцію, причому, цікавити нас буде лише відрізок $[-1;\,1]$:

$z = x^2 + x(4x^2 - 4) - 2 = 4x^3 + x^2 - 4x - 2$

Контроль: $z(-1) = -4 + 1 + 4 - 2 = -1, \quad z(1) = 4 + 1 - 4 - 2 = -1$

Ось це вже вносить деяке пожвавлення в монотонну поїздку по накатаній колії. Знайдемо критичні точки:

$$z' = (4x^3 + x^2 - 4x - 2)' = 12x^2 + 2x - 4 - 0 = 2(6x^2 + x - 2) = 0$$

Вирішуємо **квадратне рівняння**? Якщо в двох попередніх прикладах були зручними обчислення в десяткових дробах (що, до речі, буває рідко), то тут нас очікують звичайні дроби. Знаходимо «іксові» корені і за рівнянням $y = 4x^2 - 4$ визначаємо відповідні «ігрекові» координати точок-«кандидатів»:

$$D = 1 + 48 = 49, \quad \sqrt{D} = 7$$

$$x = \frac{-1-7}{2 \cdot 6} = -\frac{2}{3} \in [-1; 1] \quad \Rightarrow \quad y = 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 = 4 \cdot \frac{4}{9} - 4 = \frac{16}{9} - \frac{36}{9} = -\frac{20}{9} \quad \Rightarrow \quad M_3\left(-\frac{2}{3}; -\frac{20}{9}\right)$$

$$x = \frac{-1+7}{2 \cdot 6} = \frac{1}{2} \in [-1; 1] \quad \Rightarrow \quad y = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 = 1 - 4 = -3 \quad \Rightarrow \quad M_4\left(\frac{1}{2}; -3\right)$$

Обчислимо значення функції $z = x^2 + xy - 2$ в знайдених точках:

$$z(M_3) = z\left(-\frac{2}{3}; -\frac{20}{9}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{20}{9}\right) - 2 = \frac{4}{9} + \frac{40}{27} - 2 = \frac{12}{27} + \frac{40}{27} - \frac{54}{27} = -\mathbf{\frac{2}{27}}$$

$$z(M_4) = z\left(\frac{1}{2}; -3\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-3) - 2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{6}{4} - \frac{8}{4} = -\mathbf{\frac{13}{4}}$$

Перевірку по функції $z = 4x^3 + x^2 - 4x - 2$ проведіть самостійно.
Тепер уважно вивчаємо знайдені значення і записуємо відповідь:

$$\max_D z = z\left(-\frac{2}{3}; -\frac{20}{9}\right) = -\frac{2}{27}, \quad \min_D z = z\left(\frac{1}{2}; -3\right) = -\frac{13}{4}$$

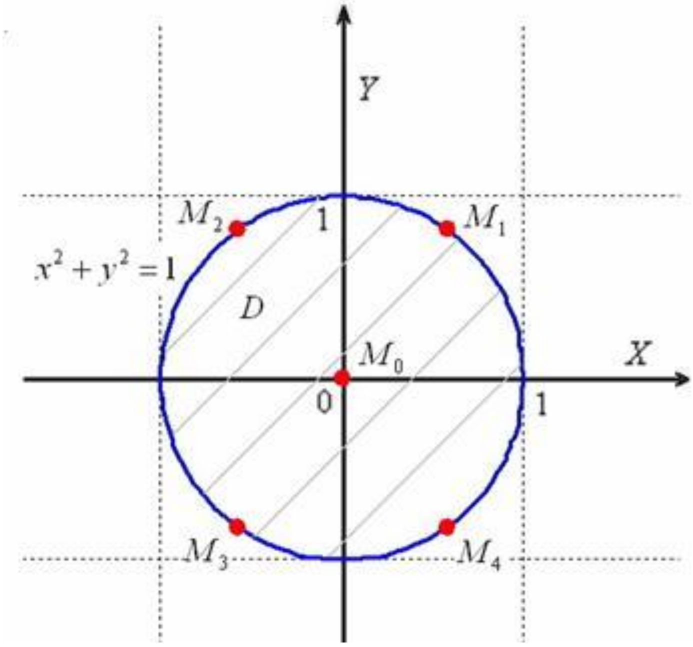
Приклад 4

Знайти найменше і найбільше значення функції $z = f(x; y) = xy^2$ в замкненій області $D = \left\{(x; y) \middle| x^2 + y^2 \le 1\right\}$

Запис з фігурними дужками читається як: «множина точок $(x; y)$, таких, що $x^2 + y^2 \le 1$».

Іноді в подібних прикладах використовують **метод множників Лагранжа**, але реальна необхідність його застосувати навряд чи виникне. Так, наприклад, якщо дана функція $z = xy$ з тією ж областю «де», то після підстановки в неї $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ – з похідною від $z = \pm x\sqrt{1 - x^2}$ ніяких труднощів; причому оформлюється все «одним рядком» (зі знаками $\pm$) без необхідності розглядати верхній і нижній полукруги окремо. Але, звісно ж, бувають і більш складні випадки, де без функції Лагранжа $L = f(x; y) + \lambda \cdot \varphi(x; y)$ *(де φ, наприклад, те ж рівняння кола)* обійтися важко!

Розв`язання: *зобразимо область* D *на рисунку:*



I) Знайдемо стаціонарні точки:

$z'_x=(xy^2)'_x=y^2$

$z'_y=(xy^2)'_y=2xy$

$$\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=0 \\ 2xy=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0 \Rightarrow M_0(0;0)$$

$z(M_0)=z(0;0)=0$

II) Дослідимо границю області. Підставимо в функцію $y^2=1-x^2$ *(таким чином, враховуються одразу обидва полукола* $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ *):*

$z=x(1-x^2)=x-x^3$

Знайдемо критичні точки:

$z=(x-x^3)'=1-3x^2=0$

$x^2=\frac{1}{3}$

Якщо $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, *то* $y=\pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Якщо $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, *то* $y=\pm\sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Обчислимо значення функції в точках

$$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\ M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\ M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\ M_4\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right):$$

$$z(M_1)=z\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

$$z(M_2)=z\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=-\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

$$z(M_3)=z\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=-\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

$$z(M_4)=z\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

Відповідь:

$$\min_D z=z\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=z\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\max_D z=z\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=z\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$