Заняття 7

Екстремуми функцій двох змінних

Сьогодні на уроці ми навчимося знаходити *максимуми* і *мінімуми* функцій двох змінних, а також узагальнемо алгоритм рішення даної задачі. З поняттями *точок екстремуму і* е*кстремумів* ви вже знайомі з презентації **про екстремуми функції однієї змінної**. Згадаємо елементарну термінологію:

– *точки екстремуму* – це загальна назва *точок мінімуму* і *максимуму*;
– е*кстремуми* – це загальна назва *мінімумів* і *максимумів*.

Почнемо з **функції двох змінних** $z = f(x; y)$, застосовуючи до якої *точки екстремуму* – це точки площини XOY, а е*кстремуми* – відповідні значення функції *(«висоти»)*. Також екстремумами іноді називають точки самої поверхні.

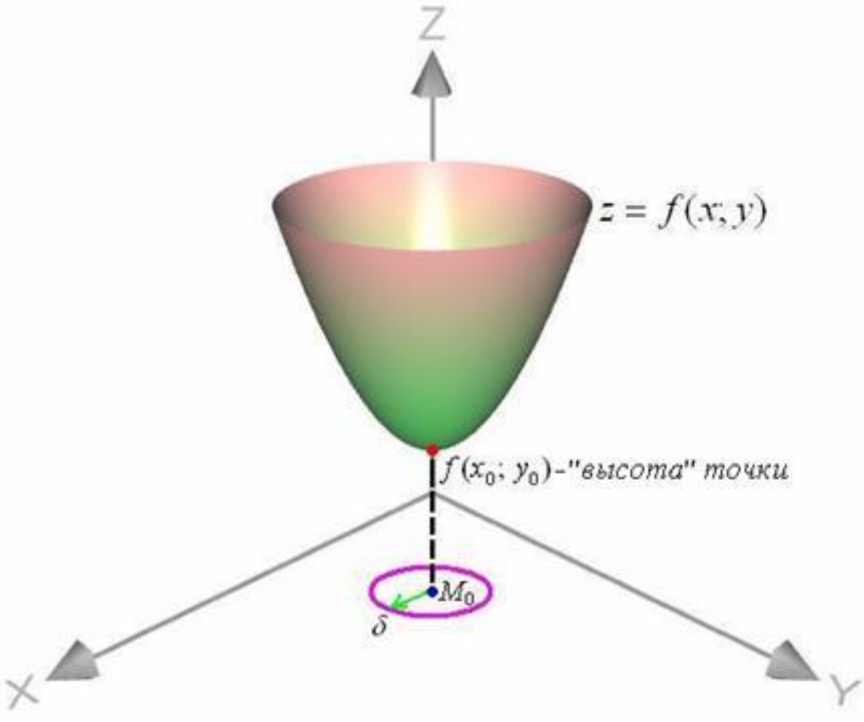
Да, і одразу важлива настанова для «чайників», нормальних студентів =) і тих, що вагаються – розглядаємий матеріал сам по собі простий, алк потребуєт базових знань і навичок в деяких розділах вищої математики. Тому якщо у вас виникає *(або вже виникло)* яке-небудь нерозуміння в ході викладення, то надані посилання в поміч.

Отже, «діючі особи» наступні: функція $z = f(x; y)$, *внутрішня* точка $M_0(x_0; y_0)$ її **області визначення** і δ-інтервал біля даної точки. Для зручності вважаємо, що цей інтервал представляє собою круг радіусом $\delta > 0$ з центром в точці M_0 *(в учбовій літературі частіше зустрічається інтервал-квадрат)*.

Визначення: якщо в деякому інтервалі δ-біля точки $M_0(x_0; y_0)$ виконується нерівність $f(x; y) > f(x_0; y_0)$, то кажуть, що функція $z = f(x; y)$ має **мінімум** в точці M_0.

При цьому точка $M_0(x_0; y_0)$ називається **точкою мінімуму**, а відповідне значення функції $f(x_0; y_0)$ («висота») – **мінімумом**. Ще раз закликаю не плутатися в термінах!

Найпростіший приклад мінімуму – це вершина **еліптичного параболоїда**, чаша якого напрямлена вгору:

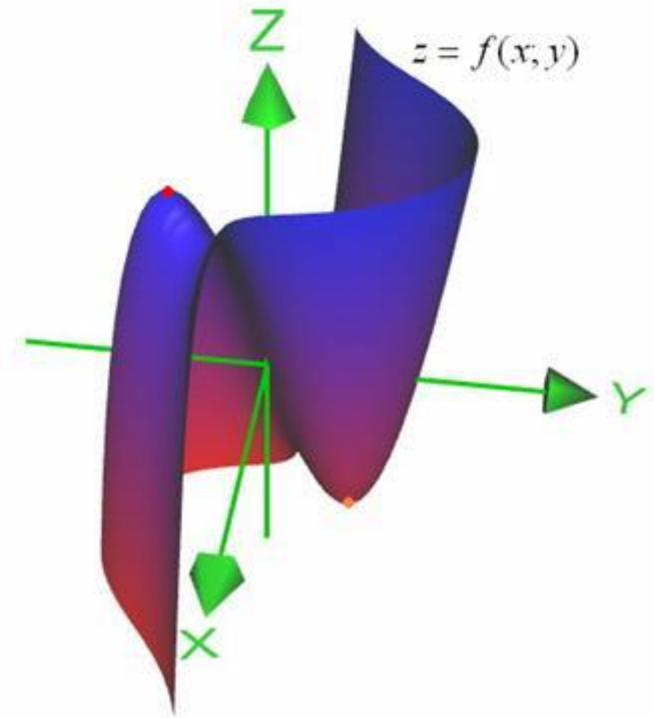


Давайте ще раз уважно перечитаємо визначення і зрозуміємо його сенс. Сформульоване визначення говорить нам про те, що функція $z = f(x; y)$ досягає мінімуму в точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо існує *хоча б якийсь інтервал* δ *біля цієї* точки, в якій значення висоти $f(x_0; y_0)$ менше, ніж ВСІ ІНШІ значення $f(x; y)$.

Слід зазначити, що в нашому приклад під визначення підходить взагалі будь-який δ-інтервал, т.як поверхня йде вгору до бескінечності і ніяких точок нижче – не має в принципі. Такий мінімум називають *глобальним*.
А тепер подумки розгорніть чашу параболоїду донизу – щоб червона точка стала «вершиною гори».

Визначення: якщо в деякому δ-інтервалі біля точки $M_0(x_0; y_0)$ виконується нерівність $f(x; y) < f(x_0; y_0)$, то говорять, що функція $z = f(x; y)$ має **максимум** в точці M_0.

Відповідно, точка M_0 називається **точкою максимуму**, а значення $f(x_0; y_0)$ – **максимумом** функції.
У випадку з нашим параболоїдом максимум теж *глобальний*, але на практиці частіше зустрічаються *локальні* екстремуми. Так, наприклад, функція $z = f(x; y)$ на наступному кресленні досягає *локального* максимуму *(зліва зверху)* і *локального* мінімуму *(справа знизу)*:



Напевне, всім зрозуміло, в чому різниця, але все ж таки закоментую: чому, наприклад, такий максимум називають *локальним*? Тому що функція на своїй **області визначення** досягає і більших значень – по праву руку поверхня йде «за обрій», де про червону точку хіба що легенди складають. Таким чином, про «вершину гори» річ йде лише на локальній ділянці області визначення. «Гора», до речі, «горі» різниця – бувають поверхні, у яких мінімуми і максимуми якщо і розрізняються на око, то виглядають, як пупиришки =) Валиво, щоб існував нехай і дуже малий δ-інтервал навколо точки M_0, де виконується умова мінімуму або максимуму *(див.визначення)*.
З вищезазначеного слідує ще одна важлива річ, яка знову ж таки стосується понять. Будьте так ласкаві, РОЗРІЗНЯЙТЕ **і** будьте акуратні в выразах:
максимум функції – це в загальному випадку НЕ ТЕ Ж САМЕ, що **максимальне значення функції**;
мінімум функції – це в загальному випадку НЕ ТЕ Ж САМЕ, що **мінімальне значення функції**.
Да, в прикладі з елиптичним параболоїдом відповідні поняття співпадають, але ось у тільки но розглянутої поверхні «червоний» максимум – це зовсім не найбільше, а «померанчовий» мінімум – зовсім не найменше значення функції.

Як досліджувати функцію $z = f(x; y)$ на екстремум?

Перш за все, необхідно орієнтуватися на **необхідну умову екстремуму**:

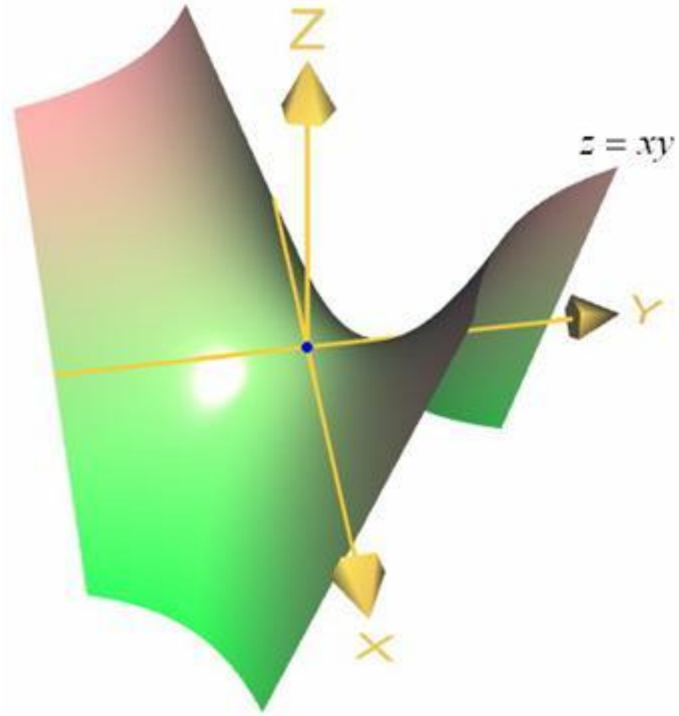
якщо функція, що диференцієються $z = f(x; y)$ має екстремум в точці M_0, то обидві **частинні похідні 1-го порядку** в даній точці дорівнюють нулю: $z'_x(M_0) = 0, \quad z'_y(M_0) = 0$

Точку, що задовольняє цим умовам, називають **критичною**, а частіше – **стаціонарною точкою**.

***! Примітка**: умова необхідна саме для функції, що диференційована в точці M_0. Як ми побачимо в Прикладі 6, екстремум може існувати і при інших обставинах.*
Зворотнє твердження справедливе далеко не завжди. Іншими словами, якщо відомо, що в деякій точці M_0 частинні похідні дорівнюють нулю, то це ЩЕ НЕ ОЗНАЧАЄ, що там є екстремум. Його там може і не бути.

Так, наприклад, у функції $z = x^2 + y^2 + 2$, яка як раз задає **еліптичний параболоїд**, частинні похідні $z'_x = 2x, \quad z'_y = 2y$ перетворюються в нуль в точці $M_0(0; 0)$ – і в даній точці дійсно існує мінімум функції («дно чаші»).

Але у функції $z = xy$ з похідними $z'_x = y, \quad z'_y = x$, що дорівнюють нулю в цій же точці, не спостерігається нічого подібного. Це **гіперболічний параболоїд** або «сідло»:



Для точки $M_0(0; 0)$ **не існує** δ- інтервалу навколо цієї точки, в якому поверхня розташовувалася б тільки зверху $(f(x; y) > f(x_0; y_0))$ або тільки знизу $(f(x; y) < f(x_0; y_0))$.
Грубо кажучи, в будь-якому δ- інтервалі навколо точки $M_0(0; 0)$ шматки поверхні є і зверху, і знизу.
Точку такого роду так і називають – **сідловою**, а іноді, за відомою географічною асоціацією – **точкою перевалу**.

Тобто, якщо ми зробимо *бескінечно малий* «крок» з точки M_0 в будь-яку сторону, то наша висота залишиться незмінною. І цей факт справедливий, як для точок екстремуму, так і для точки перевалу.

Отже, умови $z'_x(M_0) = 0, \quad z'_y(M_0) = 0$ необхідні для існування екстремуму функції, що диференціюється там, але на основі тільки цієї інформації ми ще не можемо зробити висновок про характер точки M_0. З достатньою умовою екстремуму познайомимося прямо в ході практичної задачі, а то щось ми засиділися в теорії:

Приклад 1
Дослідити на екстремум функцію $z = 3x^2 + xy + 2y^2 - x - 4y$

Розв`язання: на першому кроці необхідно відшукати *стаціонарні точки*. Для цього знайдемо **частинні похідні 1-го порядку**:

$$z'_x = (3x^2 + xy + 2y^2 - x - 4y)'_x = 3 \cdot 2x + y + 0 - 1 - 0 = 6x + y - 1$$

$$z'_y = (3x^2 + xy + 2y^2 - x - 4y)'_y = 0 + x + 2 \cdot 2y - 0 - 4 = x + 4y - 4$$

Контроль: $z''_{xy} = (6x + y - 1)'_y = 0 + 1 - 0 = 1, \quad z''_{yx} = (x + 4y - 4)'_x = 1 + 0 - 0 = 1$

і вирішимо систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + y - 1 = 0 \\ x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

В даному випадку отримана **система двох лінійних рівнянь з двома невідомими**, яку можна вирішити кількома способами. Але муд~~рувати~~ тут не потрібно – як простіше, так і вирішуємо. З 2-го рівняння виразимо $x = 4 - 4y$ і підставимо в 1-е рівняння:

$$6(4 - 4y) + y - 1 = 0$$

$$24 - 24y + y - 1 = 0$$

$$23 - 23y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

Таким чином: $x = 4 - 4y = 4 - 4 = 0$

$M_0(0;1)$ – стаціонарна точка. Тут, головне, не переплутати координати.

Виконаємо проміжкову перевірку:

$$z'_x(M_0) = z'_x(0;1) = 6 \cdot 0 + 1 - 1 = 0$$

$$z'_y(M_0) = z'_y(0;1) = 0 + 4 \cdot 1 - 4 = 0$$

Добре. А точніше, ми пройшли лише половину шляху. В знайденій точці може бути мінімум, максимум або перевал, і з`ясувати, що ж там насправді, нам допоможе

достатня умова екстремуму функції двох змінних,

для застосування якого необхідно обчислити **частинні похідні 2-го порядку** в точці M_0 Для компактності зазвичай використовують наступні позначення:

$$A = z''_{xx}(M_0), \quad B = z''_{xy}(M_0), \quad C = z''_{yy}(M_0)$$

Якщо $AC - B^2 > 0$, то функція $z = f(x;y)$ має екстремум в точці M_0, причому, якщо $A > 0$, то це мінімум, а якщо $A < 0$ – то максимум.

Примітка*: тут також можна орієнтуватися і на букву «це», т.як нерівність $AC - B^2 > 0$ виконується тільки в тому випадку, якщо A і C – одного знаку.*

Якщо $AC - B^2 < 0$, то в точці M_0 не має екстремуму.

Якщо ж $AC - B^2 = 0$, то необхідно провести додаткове дослідження про яке загадково замовчують практично всі джерела. Взагалі то, хвилюватися особливо не треба – зустрінете навряд чи.

В нашому прикладі всі частинні похідні 2-го порядку дорівнюють константам:

$$z''_{xx} = (6x + y - 1)'_x = 6, \quad z''_{xy} = (6x + y - 1)'_y = 1, \quad z''_{yy} = (x + 4y - 4)'_y = 4$$

а це означає, що відповідним константам вони дорівнюють і в точці $M_0(0;1)$:

$$A = z''_{xx}(M_0) = 6, \quad B = z''_{xy}(M_0) = 1, \quad C = z''_{yy}(M_0) = 4$$

Таким чином: $AC - B^2 = 6 \cdot 4 - 1^2 = 24 - 1 = 23 > 0$, отже, в точці M_0 **є** екстремум, і так як $A > 0$, то це – мінімум. Залишилося його знайти. Перепишемо функцію $z = 3x^2 + xy + 2y^2 - x - 4y$, щоб вона була перед очима, і ДУЖЕ уважно проведемо обчислення:

$z_{min} = z(M_0) = z(0;1) = 0 + 0 + 2 - 0 - 4 = -2$

Треба сказати, момент зовсім неприємний, оскільки тут існує ненульова ймовірність запороти все завдання. Правда, в даному випадку обчислення здОрово спростили нульовий «ікс».

Відповідь: $z_{min} = z(0;1) = -2$

Я звикла використовувати значки $\min z, \max z$, що не є добре, так як вони зазвичай використовується для позначення **мінімального і максимального значень функції**. Від чого вас і застерігаю.

И довідка для допитливих: поверхня $z = 3x^2 + xy + 2y^2 - x - 4y$ представляє собою **еліптичний параболоїд** – вельми схожий на той, який ми бачили на 1-й картинці заняття.

Нерідко приходиться розбиратися з двома або даже більшою кількістю стаціонарних точок. Типова задача з експонентою:

Приклад 2

Дослідити функцію на екстремум $z = e^{x+y}(x^2 - 2y^2)$

Розв`язання: щоб визначити стаціонарні точки, знайдемо частинні похідні 1-го порядку і прирівняємо їх до нуля. Технічна складність диференціювання полягає в застосуванні **правила** $(uv)' = u'v + uv'$, після чого, керуючись здоровим глуздом, необхідно «загнати» доданки до однієї дужки і за необхідності «наводити там порядок»:

$$z'_x = (e^{x+y}(x^2 - 2y^2))'_x = (e^{x+y})'_x \cdot (x^2 - 2y^2) + e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2)'_x =$$
$$= e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2) + e^{x+y} \cdot (2x - 0) = e^{x+y}(x^2 + 2x - 2y^2)$$
$$z'_y = (e^{x+y}(x^2 - 2y^2))'_y = (e^{x+y})'_y \cdot (x^2 - 2y^2) + e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2)'_y =$$
$$= e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2) + e^{x+y} \cdot (0 - 4y) = e^{x+y}(x^2 - 2y^2 - 4y)$$

На всяк пожежний випадок перевіримо, що $z''_{xy} = z''_{yx}$ *(тим більше, знаходити все одно знадобиться)*:

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (e^{x+y}(x^2 + 2x - 2y^2))'_y = (e^{x+y})'_y \cdot (x^2 + 2x - 2y^2) + e^{x+y} \cdot (x^2 + 2x - 2y^2)'_y =$$
$$= e^{x+y} \cdot (x^2 + 2x - 2y^2) + e^{x+y} \cdot (0 + 0 - 4y) = e^{x+y}(x^2 + 2x - 2y^2 - 4y)$$
$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (e^{x+y}(x^2 - 2y^2 - 4y))'_x = (e^{x+y})'_x \cdot (x^2 - 2y^2 - 4y) + e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2 - 4y)'_x =$$
$$= e^{x+y} \cdot (x^2 - 2y^2 - 4y) + e^{x+y} \cdot (2x - 0 - 0) = e^{x+y}(x^2 + 2x - 2y^2 - 4y)$$

ОК

Складаємо систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x+y}(x^2 + 2x - 2y^2) = 0 \\ e^{x+y}(x^2 - 2y^2 - 4y) = 0 \end{cases}$$

Оскількиу експоненти не можуть дорівнювати нулю, то їх можна з чистою совістю прибрати:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 2y^2 = 0 \\ x^2 - 2y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

В подібних системах необхідно проявити кмітливість: десь вдається виразити одну змінну через іншу, десь можна виділити повний квадрат, ну а в нас вирішення лежить на поверхні:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -2x \\ x^2 - 2y^2 = 4y \end{cases} \Rightarrow -2x = 4y \Rightarrow x = -2y$$

(к такому ж результату приводить ***віднімання одного рівняння від іншого****)*

Тепер підставляємо співвідношення $x=-2y$ в будь-яке, наприклад, в 2-е рівняння системи:
$(-2y)^2-2y^2-4y=0$

$4y^2-2y^2-4y=0$

$2y^2-4y=0$

$y^2-2y=0$

$y(y-2)=0$

В результаті отримали 2 стаціонарні точки:
1) $y=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2\cdot 0=0 \qquad M_1(0;\,0)$

2) $y=2 \quad \Rightarrow \quad x=-2\cdot 2=-4 \qquad M_2(-4;\,2)$

Не втрачу можливості нагадати про перевірку – координати знайдених точок повинні задовольняти кожному рівнянню системи.

Достатню умову екстремуму, як ви розумієте, необхідно перевірити для кожної точки окремо. І в тому, і в іншому випадку нам знадобляться частинні похідні 2-го порядку:
$$z''_{xx}=(z'_x)'_x=(e^{x+y}(x^2+2x-2y^2))'_x=(e^{x+y})'_x\cdot(x^2+2x-2y^2)+e^{x+y}\cdot(x^2+2x-2y^2)'_x=$$
$$=e^{x+y}\cdot(x^2+2x-2y^2)+e^{x+y}\cdot(2x+2-0)=e^{x+y}(x^2+2x-2y^2+2x+2)=e^{x+y}(x^2+4x-2y^2+2)$$

Змішана похідна вже знайдена:
$$z''_{xy}=e^{x+y}(x^2+2x-2y^2-4y)$$

І, отже, «подвійна ігрекова»:
$$z''_{yy}=(z'_y)'_y=(e^{x+y}(x^2-2y^2-4y))'_y=(e^{x+y})'_y\cdot(x^2-2y^2-4y)+e^{x+y}\cdot(x^2-2y^2-4y)'_y=$$
$$=e^{x+y}\cdot(x^2-2y^2-4y)+e^{x+y}\cdot(0-4y-4)=e^{x+y}(x^2-2y^2-4y-4y-4)=e^{x+y}(x^2-2y^2-8y-4)$$

...Це ще не самий страх – приклад я взяла доволі гуманний =)

На черзі кропіткі обчислення:

1) Перевіримо виконання достатньої умови екстремуму для точки $M_1(0;\,0)$:
$$A_1=z''_{xx}(M_1)=z''_{xx}(0;\,0)=e^{0+0}(0^2+4\cdot 0-2\cdot 0^2+2)=e^0\cdot 2=2$$
$$B_1=z''_{xy}(M_1)=z''_{xy}(0;\,0)=e^0(0^2+2\cdot 0-2\cdot 0^2-4\cdot 0)=0$$
$$C_1=z''_{yy}(M_1)=z''_{yy}(0;\,0)=e^0(0^2-2\cdot 0^2-8\cdot 0-4)=-4$$
$A_1C_1-B_1^2=2\cdot(-4)-0^2=-8-0=-8<0$, значить, в точці M_1 не має екстремуму.

2) Перевіримо виконання достатньої умови екстремуму для точки $M_2(-4;\,2)$:
$$A_2=z''_{xx}(M_2)=z''_{xx}(-4;\,2)=e^{-4+2}((-4)^2+4\cdot(-4)-2\cdot 2^2+2)=e^{-2}\cdot(16-16-8+2)=-6e^{-2}$$
$$B_2=z''_{xy}(M_2)=z''_{xy}(-4;\,2)=e^{-2}((-4)^2+2\cdot(-4)-2\cdot 2^2-4\cdot 2)=e^{-2}(16-8-8-8)=-8e^{-2}$$
$$C_2=z''_{yy}(M_2)=z''_{yy}(-4;\,2)=e^{-2}((-4)^2-2\cdot 2^2-8\cdot 2-4)=e^{-2}(16-8-16-4)=-12e^{-2}$$
$A_2C_2-B_2^2=-6e^{-2}\cdot(-12e^{-2})-(-8e^{-2})^2=72e^{-4}-64e^{-4}=8e^{-4}>0$, значитть в точці M_2 існує екстремум, і оскільки $A_2<0$, то це – максимум. Згадуємо про функцію $z=e^{x+y}(x^2-2y^2)$ і НЕ ПОМИЛЯЄМОСЯ:
$$z_{\max}=z(M_2)=z(-4;\,2)=e^{-4+2}((-4)^2-2\cdot 2^2)=e^{-2}(16-8)=8e^{-2}$$

Відповідь: $z_{\max}=z(-4;\,2)=8e^{-2}$

О точці перевалу $M_1(0;\,0)$ у відповіді не згадуємо. Навіщо? Нас же просили провести дослідження на екстремум.

І специально для всіх, можно сказати, ексклюзивна задача:

Приклад 3

Дослідити функцію на екстремум
$$f(x;\,y)=4+\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}$$

Розв`язання: починається як зазвичай:

$$f'_x = (4+(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}})'_x = 0+\frac{2}{3}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{3}}\cdot(x^2+y^2)'_x = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x^2+y^2}}\cdot(2x+0) = \frac{4x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2+y^2}}$$

$$f'_y = (4+(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}})'_y = 0+\frac{2}{3}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{3}}\cdot(x^2+y^2)'_y = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x^2+y^2}}\cdot(0+2y) = \frac{4y}{3\cdot\sqrt[3]{x^2+y^2}}$$

Але ось наступний крок, здавалося б, одразу приводить до відповіді про відсутність екстремумів:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2+y^2}} = 0 \\ \dfrac{4y}{3\cdot\sqrt[3]{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$$

Система не має рішень, оскільки єдина «підозріла» точка $M_0(0;\,0)$ перетворює знаменник в нуль, тобто функція $f(x;\,y) = 4+\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}$ – *не диференційована* в даній точці. Але невже все так просто? І дійсно – САМА функція там визначена: $f(M_0) = f(0;\,0) = 4+\sqrt[3]{(0^2+0^2)^2} = 4+0 = 4$

І більш того, поверхня $f(x;\,y) = 4+\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}$ **неперервна** в точці M_0 *(да і взагалі в будь-якій точці площини* XOY *)*. Так чому ж тут не може існувати мінімум або максимум?
Сумніви не безпідставні! За аналогією зі схожим «пласким» випадком така точка теж вважається стаціонарною і в ній теж може бути екстремум!
Але тут виникає другий камінь спотикання. В знаменниках частинних похідних 2-го порядку *(перевірте самостійно)* знаходяться корені $\sqrt[3]{(x^2+y^2)^4}$, що робить неможливим обчислення значень $A = z''_{xx}(M_0),\quad B = z''_{xy}(M_0),\quad C = z''_{yy}(M_0)$.
Як бути? У важкій ситуації завжди є сенс проаналізувати саме просте рішення. А саме елементарне в екстремумах – це безпосередньо їх визначення!

Розглянемо *достатньо малий* δ - інтервал навколо точки $M_0(0;\,0)$. Будь-яку точку даного інтервалу, відмінну від M_0, можна представити у вигляді $M(0+\Delta x;\,0+\Delta y)$, де значення $\Delta x, \Delta y$ *не дорівнюють нулю одночасно* і достатньо малі для того щоб точка M входила в цей інтервал.

Примітка*: обидва числа можуть бути додатними* $\Delta x > 0, \Delta y > 0$, *від`ємними* $\Delta x < 0, \Delta y < 0$*, різних знаків:* $\Delta x > 0, \Delta y < 0$ *або* $\Delta x < 0, \Delta y > 0$*; і, окрім того, одне з них може дорівнювати нулю (ще 4 випадки). Таким чином, позначення* $M(0+\Delta x;\,0+\Delta y)$ *дійсно застосовується.*
Обчислимо значення функції в цій довільній точці інтервалу навколо точки M: $f(M) = f(0+\Delta x;\,0+\Delta y) = 4+\sqrt[3]{((0+\Delta x)^2+(0+\Delta y)^2)^2} = 4+\sqrt[3]{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^2}$

Табк як $\Delta x, \Delta y$ не дорівнюють нулю *одночасно*, то корінь $\sqrt[3]{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^2}$ буде *хоча б трохи*, але більше за нуль, а значить, $f(M) = 4+\sqrt[3]{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^2} > 4$. І згадуючи, що $f(M_0) = 4$, записуємо очевидний факт: $f(M) > f(M_0)$. Грубо кажучи, в розглядаємому інтервалі значення $f(M_0)$ «саме низьке».

Висновок: для точки M_0 знайшовся δ - інтервал навколо точки, в якому виконується нерівність $f(M) > f(M_0)$, таким чином, $f(M_0) = 4$ – мінімум за визначенням.

Не важко зрозуміти, що мінімум глобальний. Геометрично поверхня представляє собою так зване просторове вістря, а точніше – «шип».

Відповідь: $f_{\min} = f(0; 0) = 4$

Представлене рішення повністю коректне і повноцінне! Більш того, даний спосіб можна спробувати застосувати і в ситуації, коли достатня умова екстремуму не дає відповіді $(AC - B^2 = 0)$. Однак діло ускладнюється тим, що нерівність $f(M) > f(M_0)$ або $f(M) < f(M_0)$ потрібно обгрунтовувати для кожного з восьми випадків.