Заняття 6

Наближені обчислення за допомогою диференціалу

На даному занятті ми розглянемо широко розповсюджену задачу **про наближене обчислення значення функції за допомогою диференціалу**. Тут і надалі річ піде про диференціали першого порядку, скорочен я часто буду говорити просто «диференціал». Задача про наближене обчислення за допомогою диференціалу має жорсткий алгоритм вирішення, і, отже, особливих труднощів виникнути не повинно. Але, є невеликі підводні камені, які теж будуть підчищені.

Окрім того, на сторінці присутні формули знаходження абсолютної і відносної похибки обчислень. Матеріал дуже корисний, так як похибки потрібно розраховувати і в інших задачах.

Для успішного засвоєння прикладів необхідно вміти знаходити похідні функцій хоча б на середньому рівні, тому якщо з диференціюванням зовсім не лади, почніть з уроку **Як знайти похідну** Також рекомендую прочитати матеріали уроку **Найпростіші задачі з похідними.**

Практикум складається з двох частин:

– Наближене обчислення за допомогою диференціалу функції однієї змінної.

– Наближене обчислення за допомогою диференціалу функції двох змінних.

Приближенные вычисления с помощью дифференциала функции одной переменной

Завдання, що розглядається і його геометричний сенс вже розглядався на занятті Що таке похідна?, і зараз ми обмежимося формальним розглядом прикладів, чого достатньо, щоб навчитися їх вирішувати.

В першому параграфі рулить функція однієї змінної. Як всі знають, вона позначається через y або через $f(x)$. Для даної задачі набагато зручніше використовувати друге позначення.

Одразу перейдемо до популярного прикладу, який часто зустрічається на практиці:

Приклад 1

Обчислити наближено $\sqrt[3]{67}$, замінюючи приріст функції її диференціалом.

Розв`язання: Перепишіть в зошит робочу формулу для наближеного обчислення за допомогою диференціалу:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+d\left[f(x_0)\right]$$

Починаємо розбиратися, тут все просто!

На першому етапі необхідно скласти функцію $f(x)$. За умовою запропоновано обчислити кубічний корінь з числа: $\sqrt[3]{67}$, тому відповідна функція має вигляд: $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Нам необхідно за допомогою формули знайти наближене значення $f(67)=\sqrt[3]{67}$.

Дивимось на *ліву частину* формули $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+d\left[f(x_0)\right]$, і в голову приходить думка, що число 67 необхідно представити у вигляді $x_0+\Delta x$. Як простіше за все це зробити?

Рекомендую наступний алгоритм: обчислимо дане значення на калькуляторі:

$f(67)=\sqrt[3]{67}\approx 4{,}06154810045$ – вийшло 4 з хвостиком, це важливий орієнтир для рішення.

В якості x_0 підбираємо «хороше» значення, **щоб корінь добувався націло**. Це значення x_0 повинно бути **якомога ближче** до 67. В даному випадку: $x_0=64$. Дійсно: $\sqrt[3]{64}=4$.

Примітка: Коли з підбором x_0 все одно виникає складність, просто подивіться на скалькульоване значення (в даному випадку $4{,}06154810045$), візьміть найближчу цілу

частину (в даному випадку 4) і піднесіть її до необхідної степені (в даному випадку $4^3 = 64$).
В результаті і буде виконаний необхідний підбір: $x_0 = 64$.
Якщо $x_0 = 64$, то приріст аргументу: $\Delta x = 3$.
Отже, число 67 представлено у вигляді суми $x_0 + \Delta x = 64 + 3$
Далі працюємо з *правою частиною* формули $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + d[f(x_0)]$.
Спочатку обчислимо значення функції в точці $x_0 = 64$. Взагалі, це вже зроблено раніше:
$f(x_0) = f(64) = \sqrt[3]{64} = 4$
Диференціал в точці знаходиться за формулою:
$d[f(x_0)] = f'(x_0) \cdot \Delta x$ – теж можете переписати до себе в зошит.
З формули випливає, що необхідно взяти першу похідну:

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

І знайти її значення в точці x_0:

$$f'(x_0) = f'(64) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{3 \cdot 16} = \frac{1}{48}$$

Таким чином:

$$d[f(64)] = f'(64) \cdot \Delta x = \frac{1}{48} \cdot 3 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

Все готово! Згідно з формулою $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + d[f(x_0)]$:

$$f(67) = \sqrt[3]{67} \approx 4 + 0{,}0625 = 4{,}0625$$

Знайдене наближене значення достатньо близьке до значення $4{,}06154810045$, обчисленого за допомогою мікрокалькулятору.

Відповідь: $\sqrt[3]{67} \approx 4{,}0625$

<u>Приклад 2</u>

Обчислити наближено за допомогою диференціалу значення функці= $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ в точці $x = 1{,}97$. Обчислити більш точне значення функції в точці $x = 1{,}97$ за допомогою мікрокалькулятору, оцінити абсолютну і відносну похибку обчислень.
Фактично те ж саме завдання, його запросто можна переформулювати так: «Обчислити наближене значення $\sqrt{(1{,}97)^2 + 1{,}97 + 3}$ за допомогою диференціалу»
<u>Розв`язання:</u> Застосуємо знайому формулу: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + d[f(x_0)]$
В даному випадку вже дана готова функція: $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$. Ще раз звертаю увагу, що для позначення функції замість «ігрека» зручніше використати $f(x)$.
Значення $x = 1{,}97$ необхідно представити у вигляді $x_0 + \Delta x$. Ну, тут легше, ми бачимо, що число 1,97 дуже близьке до «двійки», тому напрошується $x_0 = 2$. І, відповідно: $\Delta x = -0{,}03$.
Обчислимо значення функції в точці $x_0 = 2$:
$f(x_0) = f(2) = \sqrt{4 + 2 + 3} = \sqrt{9} = 3$

Застосовуючи формулу $d[f(x_0)] = f'(x_0) \cdot \Delta x$, обчислимо диференціал в цій же точці.

Знаходимо першую похідну:

$$f'(x) = (\sqrt{x^2+x+3})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x+3}} \cdot (x^2+x+3)' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+3}}$$

І її значення в точці $x_0 = 2$:

$$f'(x_0) = f'(2) = \frac{4+1}{2\sqrt{2^2+2+3}} = \frac{5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$$

Таким чином, диференціал в точці:

$$d\left[f(2)\right] = f'(2) \cdot \Delta x = \frac{5}{6} \cdot (-0{,}03) = -0{,}025$$

В результаті, за формулою $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + d\left[f(x_0)\right]$:

$$f(1{,}97) \approx 3 - 0{,}025 = 2{,}975$$

Друга частина завдання полягає в тому, щоб знайти абсолютну і відносну похибку обчислень.

Абсолютна і відносна похибка обчислень

Абсолютна похибка обчислень знаходиться за формулою:

$$\Delta = \left|ТочноеЗначение - ПриближенноеЗначение\right|$$

Знак модуля показує, що не має різниці, яке значення більше, а яке менше. Важливо, *наскільки далеко* наближений результат відхилився від точного значення в ту чи іншу сторону.

Відносна похибка обчислення знаходиться за формулою:

$$\delta = \frac{\left|ТочноеЗначение - ПриближенноеЗначение\right|}{ТочноеЗначение} \cdot 100\%$$

, або, те ж саме:

$$\delta = \frac{\Delta}{ТочноеЗначение} \cdot 100\%$$

Відносна похибка показує, *на скільки відсотків* наближений результат відхилився від точного значення. Існує версія формули і без домноження на 100%, але на практиці я майже завжди бачу такий варіант з відсотками.

Після короткої довідки повернемося до нашої задачі, в якій ми обчислили наближене значення функції $f(1{,}97) \approx 2{,}975$ за допомогою диференціалу.

Обчислимо точне значення функції за допомогою мікрокалькулятору:

$f(1{,}97) = \sqrt{(1{,}97)^2 + 1{,}97 + 3} = 2{,}975046218$, строго кажучи, значення все одно наближене, але ми будемо вважати його точним.

Обчислимо абсолютну похибку:

$$\Delta = \left|2{,}975046218 - 2{,}975\right| \approx 0{,}000046$$

Обчислимо відносну похибку:

$$\delta = \frac{\left|2{,}975046218 - 2{,}975\right|}{2{,}975046218} \cdot 100\% \approx 0{,}0016\%$$

, отримані тисячні долі відсотка, таким чином, диференціал забезпечив просто відмінне наближення.

Відповідь: $f(1{,}97) \approx 2{,}975$, абсолютна похибка обчислень $\Delta \approx 0{,}000046$, відносна похибка обчислення $\delta \approx 0{,}0016\%$

Приклад 3

Обчислити наближено за допомогою диференціалу $tg47^\circ$, результат округлити до двох знаків після коми.

Розв`язання: Що нового в завданні? За умовою необхідно округлити результат до двох знаків після коми. Але річ не в тім, шкільна задача округлення, думаю, не представляє для вас складнощів. Річ у тому, що в нас даний тангенс з **аргументом, який виражений в градусах**. Що робити, коли вам пропонують для рішення тригонометричну функцію з градусами? Наприклад, $tg47^\circ, \cos 94^\circ, \sin 183^\circ$ і т. д.

Алгоритм рішення принципово зберігається, тобто необхідно, як і в попередніх прикладах, застосувати формулу $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+d[f(x_0)]$

Записуємо очевидну функцію $f(x)=tgx$

Значення 47° необхідно представити у вигляді $x_0+\Delta x$. Суттєву допомогу надасть **таблиця значень тригонометричних функцій**. До речі, хто її не роздрукував, рекомендую це зробити, оскільки заглядати туди доведеться протягом всього курсу вивчення вищої математики.

Аналізуючи таблицю, замічаємо «хороші» значення тангенсу, які близько знаходяться до 47 градусів: $tg45^\circ=1$

Таким чином: $x_0=45^\circ, \Delta x=2^\circ$

Після попереднього аналізу **градуси необхідно перевести в радіани**. Так, і тільки так!

В даному прикладі з тригонометричної таблиці можна з`ясувати, що $x_0=\frac{\pi}{4}$. За формулою переводу градусів в радіани: $\Delta x=\frac{2^\circ\cdot\pi}{180}=\frac{\pi}{90}$ (формули можна знайти в тій самій таблиці).

Подальше шаблонно:

$$f(x_0)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=tg\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$d[f(x_0)]=f'(x_0)\cdot\Delta x$$

$$f'(x)=(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'(x_0)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{2}{4}}=\frac{4}{2}=2$$

$$d\left[f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\Delta x=2\cdot\frac{\pi}{90}=\frac{\pi}{45}$$

Таким чином: $tg47^\circ\approx 1+\frac{\pi}{45}\approx 1{,}07$ (при обчисленнях використовуємо значення $\pi\approx 3{,}14$).

Результат, як і треба за умовою, округлений до двох знаків після коми.

Відповідь: $tg47^\circ\approx 1{,}07$

Наближені обчислення за допомогою повного диференціалу функції двох змінних

Все буде дуже і дуже схожим.

Для вивченя параграфу необхідно вміти знаходити **частинні похідні другого порядку**, куди ж без них. На вищезгаданому занятті функцію двох змінних я позначила через букву z.

Як і для випадку функції однієї змінної, умова задачі може бути сформульована по-різному, и я намагатимусь розглянути всі формулювання, що зустрічаються.

Приклад 4

Обчислити наближене значення функції $z = 2xy + 3y - 5x$ в точці $M(3{,}04;\ 3{,}95)$ за допомогою повного диференціалу, оцініть абсолютну і відносну похибки.

Розв`язання: **Я**к би не була записана умова, в самому рішенні для позначення функції, повторюся, краще використати не букву «зет», а $f(x, y) = 2xy + 3y - 5x$.

А ось і робоча формула:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + d[f(x_0, y_0)]$$

Перед нами фактично старша сестра формули $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + d[f(x_0)]$ попереднього параграфу. Змінних тільки стало більше. Да що казати, сам **алгоритм рішення буде принципово таким самим**!

За умовою необхідно знайти наближене значення функції в точці $M(3{,}04;\ 3{,}95)$.

Число 3,04 представимо у вигляді $x_0 + \Delta x$. Колобок сам проситься, щоб його з`їли: $x_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}04$

Число 3,95 представимо у вигляді $y_0 + \Delta y$. Дійшла черга і до другої половини Колобка: $y_0 = 4$, $\Delta y = -0{,}05$

І не дивіться на всілякі лисячі хитрощі, Колобок є – треба його з`їсти.

Обчислимо значення функції в точці (x_0, y_0):

$$f(x_0, y_0) = f(3{,}4) = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = 24 + 12 - 15 = 21$$

Диференціал функції в точці (x_0, y_0) знайдемо за формулою:

$$d[f(x_0, y_0)] = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

З формули витікає, що необхідно знайти **частинні похідні** першого порядку і обчислити їх значення в точці (x_0, y_0).

Обчислимо частинні похідні першого порядку в точці $(3;4)$:

$$f'_x = (2xy + 3y - 5x)'_x = 2y + 0 - 5 = 2y - 5$$

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_x(3;4) = 2 \cdot 4 - 5 = 8 - 5 = 3$$

$$f'_y = (2xy + 3y - 5x)'_y = 2x + 3 - 0 = 2x + 3$$

$$f'_y(x_0, y_0) = f'_y(3;4) = 2 \cdot 3 + 3 = 6 + 3 = 9$$

Повний диференціал в точці $(3;4)$:

$$d[f(3;4)] = f'_x(3;4)\Delta x + f'_y(3;4)\Delta y = 3 \cdot 0{,}04 + 9 \cdot (-0{,}05) = 0{,}12 - 0{,}45 = -0{,}33$$

Таким чином, за формулою $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + d[f(x_0, y_0)]$ наближене значення функції в точці M:

$$f(3{,}04;\ 3{,}95) \approx 21 - 0{,}33 = 20{,}67$$

Обчислимо точне значення функції в точці M:

$$f(M) = f(3{,}04; 3{,}95) = 2 \cdot 3{,}04 \cdot 3{,}95 + 3 \cdot 3{,}95 - 5 \cdot 3{,}04 = 24{,}016 + 11{,}85 - 15{,}2 = 20{,}666$$

Ось це значення є абсолютно точним.

Похибка розраховується за стандартними формулами, про які вже йшла мова в цьому занятті.

Абсолютна похибка:

$$\Delta = |20{,}666 - 20{,}67| = 0{,}004$$

Відносна похибка:

$$\delta = \frac{|20{,}666 - 20{,}67|}{20{,}666} \cdot 100\% \approx 0{,}02\%$$

Відповідь: $f(3{,}04;\,3{,}95) \approx 20{,}67$, абсолютна похибка: $\Delta = 0{,}004$, відносна похибка: $\delta \approx 0{,}02\%$

Приклад 5

За допомогою повного диференціалу функції двох змінних обчислити наближене значення даного виразу. Обчислити той самий вираз за допомогою мікрокалькулятору. Оцінити у відсотках відносну похибку обчислень.

$\sqrt[3]{(4{,}9973)^2 + 2\cdot\sqrt[6]{0{,}9919}}$

Розв`язання: Обчислимо даний вираз наближено за допомогою повного диференціалу функції двох змінних:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + d\left[f(x_0, y_0)\right]$$

Спочатку необхідно скласти функцію двох змінних: $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 + 2\cdot\sqrt[6]{y}}$. Як складена функція, думаю, всім інтуїтивно зрозуміло.

Значення 4,9973 близьке до «п`ятірки», тому: $x_0 = 5$, $\Delta x = -0{,}0027$.

Значення 0,9919 близьк до «одиниці», отже, вважаємо: $y_0 = 1$, $\Delta y = -0{,}0081$.

Обчислимо значення функції в точці (x_0, y_0):

$$f(x_0, y_0) = f(5;1) = \sqrt[3]{5^2 + 2\cdot\sqrt[6]{1}} = \sqrt[3]{25+2} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Диференціал в точці (x_0, y_0) знайдемо за формулою:

$$d\left[f(x_0, y_0)\right] = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

Для цього обчислимо частинні похідні першого порядку в точці $(5;1)$.
Похідні тут не дуже прості, і слід бути акуратним:

$$f'_x = \left(\sqrt[3]{x^2+2\cdot\sqrt[6]{y}}\right)'_x = \left((x^2+2\cdot\sqrt[6]{y})^{\frac{1}{3}}\right)'_x = \frac{1}{3}(x^2+2\cdot\sqrt[6]{y})^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^2+2\cdot\sqrt[6]{y})'_x =$$

$$= \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2+2\cdot\sqrt[6]{y})^2}}\cdot(2x+0) = \frac{2x}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2+2\cdot\sqrt[6]{y})^2}};$$

$$f'_x(5;1) = \frac{10}{3\cdot\sqrt[3]{(27)^2}} = \frac{10}{3\cdot 9} = \frac{10}{27}$$

$$f'_y = \left(\sqrt[3]{x^2+2\cdot\sqrt[6]{y}}\right)'_y = \left((x^2+2\cdot\sqrt[6]{y})^{\frac{1}{3}}\right)'_y = \frac{1}{3}(x^2+2\cdot\sqrt[6]{y})^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^2+2\cdot y^{\frac{1}{6}})'_y =$$

$$= \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2+2\cdot\sqrt[6]{y})^2}}\cdot\left(0+2\cdot\frac{1}{6}y^{-\frac{5}{6}}\right) = \frac{1}{9\cdot\sqrt[3]{(x^2+2\cdot\sqrt[6]{y})^2}\cdot\sqrt[6]{y^5}}$$

$$f'_y(5;1) = \frac{1}{9\cdot\sqrt[3]{(27)^2}\cdot\sqrt[6]{1^5}} = \frac{1}{9\cdot 9\cdot 1} = \frac{1}{81}.$$

Повний дииференціал в точці $(5;1)$:

$$d\left[f(5;1)\right] = f'_x(5;1)\Delta x + f'_y(5;1)\Delta y = \frac{10}{27}\cdot(-0{,}0027) + \frac{1}{81}\cdot(-0{,}0081) =$$

$$= -0{,}001 - 0{,}0001 = -0{,}0011$$

Таким чином, наближене значення даного виразу:

$$\sqrt[3]{(4{,}9973)^2 + 2\cdot\sqrt[6]{0{,}9919}} \approx 3 - 0{,}0011 = 2{,}9989$$

Обчислимо більш точне значення за допомогою мікрокалькулятору: 2,998899527
Знайдемо відносну похибку обчислень:

$$\delta = \frac{|2{,}998899527 - 2{,}9989|}{2{,}998899527} \cdot 100\% \approx 0{,}000016\%$$

Відповідь: $\sqrt[3]{(4{,}9973)^2 + 2 \cdot \sqrt[6]{0{,}9919}} \approx 2{,}9989$, $\delta \approx 0{,}000016\%$

Як раз ілюстрація до вищезазначеного, в розглянутій задачі прирісти аргументів дуже малі $\Delta x = -0{,}0027,\ \Delta y = -0{,}0081$, і похибка виявилася фантастично мізерною.