Заняття 5

Частинні похідні функції двох змінних. Поняття і приклади вирішення

На даному уроці ми продовжимо знайомство з функцією двох змінних і розглянемо саме розповсюджене тематичне завдання – знаходження **частинних похідних першого і другого порядку, а також повного диференціалу функції**. Для ефективного вивчення матеріалу вам необхідно вміти більш менш впевнено знаходити «звичайні» похідні функції однієї змінної. Навчитися правильно поводитися з похідними можна на уроках **Як знайти похідну?** і **Похідна складної функції**. Також нам знадобиться таблиця похідних елементарних функцій і правил диференціювання, зручніше за все, якщо вона буде під рукою в роздрукованому вигляді.

Швиденько повторимо поняття функції двох змінних, я постараюся обмежитись самим мінімумом. Функція двох змінних зазвичай записується як $z = f(x;y)$, при цьому змінні x, y називаються *незалежними змінними* або *аргументами*.

Приклад: $z = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$ – функція двох змінних.

Іноді використовують запис $f(x;y) = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$. Також зустрічаються завдання, де замість букви z використовується буква u.

З геометричної точки зору функція двох змінних $z = f(x;y)$ частіше за все представляє собой поверхню тривимірного простору (площина, циліндр, шар, параболоїд, гіперболоїд і т. д.).

Переходимо до питання знаходження частинних похідних першого і другого порядків. Повинна повідомити гарну новину для тих, хто налаштувався на надзвичайно складний матеріал: **частинні похвднв – це майже те ж саме, що і «звичайні» похідні функції однієї змінної**.

Для частинних похідних справедливі всі правила диференціювання і таблиця похідних елементарних функцій. Є тільки декілька невеликих відмінностей, з якими ми познайомимося прямо зараз:

Приклад 1

Знайти частинні похідні першого і другого порядку функції $z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$

Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку. Їх дві.

Позначення:

z'_x або $\frac{\partial z}{\partial x}$ – частинна похідна по «ікс»

z'_y або $\frac{\partial z}{\partial y}$ – частинна похідна по «ігрек»

Почнемо з z'_x. **Коли ми знаходимо частинну похідну по «ікс», то змінна y вважається константою (постійним числом)**.

Вирішуємо:

$$z'_x \overset{(1)}{=} (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_x \overset{(2)}{=} 2y^3(x^2)'_x + 3(x^4)'_x + (5y)'_x - (7)'_x \overset{(3)}{=}$$

$$= 2y^3 \cdot 2x + 3 \cdot 4x^3 + 0 - 0 \overset{(4)}{=} 4xy^3 + 12x^3$$

Коментарі до виконаних дій:

(1) Перше, що ми робимо при знаходженні частинної похідної – заключаємо **всю** функцію в дужки під штрих з **підрядковим індексом**.

Увага, важливо! Підрядкові індекси НЕ ГУБИМО в ході рішення. В даному випадку, якщо ви де-небудь нарисуєте «штрих» без x, то викладач, як мінімум, може поставити поряд з завданням $\pm$ (відразу відкусити частину балу за неуважність).
Надалі даний крок коментувати не буду, всі зроблені зауваження справедливі для будь-якого прикладу з теми, що розглядається.
(2) Застосуємо правила диференціювання $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(Cu)' = Cu'$. Для простого прикладу, як цей, обидва правила можна застосувати на одному кроці. Зверніть увагу на перший доданок: так як y **вважвється константою, а будь-яку константу можна винести за знак похідної**, то y^3 ми виносимо за дужки. Тобто в даній ситуації y^3 нічим не кращий за звичайне число. Тепер подивимось на третій доданок $5y$: тут, навпаки, виносити нема чого. Так як y константа, то $5y$ – тож константа, і в цьому сенсі вона нічим не краща за останній доданок – «сім».
(3) Використаємо табличні похідні $(C)' = 0$ і $(x^n)' = nx^{n-1}$.
(4) Спрощуємо, чи, як я люблю говорити, «причісуємо» відповідь.
Тепер z'_y. **Коли ми знаходимо частинну похідну по «ігрек», то змінна x вважається константою (постійним числом)**.

$$z'_y = (2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7)'_y \overset{(1)}{=} 2x^2(y^3)'_y + (3x^4)'_y + 5(y)'_y - (7)'_y \overset{(2)}{=}$$
$$= 2x^2 \cdot 3y^2 + 0 + 5 \cdot 1 - 0 = 6x^2y^2 + 5$$

(1) Використаємо ті ж правила диференціювання $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(Cu)' = Cu'$. В першому доданку виносимо константу x^2 за знак похідної, в другому доданку нічого винести не можна оскільки $3x^4$ – вже константа.
(2) Використаємо таблицю похідних елементарних функцій. Подумки **поміняємо в таблиці всі «ікси» на «ігреки». Тобто дана таблиця рАвно справедлива і для y (да і взагалі майже для будь-якої букви)**. Отже, формули, що нами застосовуються, виглядають так: $(C)' = 0$ і $(y^n)' = ny^{n-1}$.

В чому сенс частинних похідних?

За своїм сенсом частинні похідні 1-го порядку нагадують **«звичайну» похідну**:
z'_x, z'_y – це функції, що характеризують швидкість змінення функції $z = f(x; y)$ в напрямку осей OX і OY відповідно. Так, наприклад, функція $z'_x = 4xy^3 + 12x^3$ характеризує крутизну «подйомів» і «склонів» **поверхні** $z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$ в напрямку вісі абсцис, а функція $z'_y = 6x^2y^2 + 5$ сповіщає нас про «рельєф» цієї ж поверхні в напрямку вісі ординат.
***! Примітка**: тут маємо на увазі напрямки, які паралельні координатним осям.*

З метою кращого розуминня розглянемо конкретную точку $M_0(-1; 1)$ площини XOY і обчислимо в ній значення функції («висоту»):
$z = f(-1; 1) = 2 \cdot (-1)^2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^4 + 5 \cdot 1 - 7 = 2 + 3 + 5 - 7 = 3$ – а тепер уявіть, що ви тут знаходитесь (НА САМІЙ поверхні).

Обчислимо частинну похідну по «ікс» в даній точці:
$z'_x(-1; 1) = 4 \cdot (-1) \cdot 1^3 + 12 \cdot (-1)^3 = -4 - 12 = -16$

Від`ємний знак «іксової» похідної повідомляє про те, функція спадна

$z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$ в точці $M_0(-1; 1)$ в напрямку осі абсцис. Іншими словами, якщо ми зробимо маленький-маленький *(бескінечно малий)* шажечок в сторону вістря осі OX *(паралельно даній осі)*, то спустимося вниз по склону поверхні.
Тепер дізнаємось характер «месцини» в напрямку осі ординат:
$z'_y(-1; 1) = 6 \cdot (-1)^2 \cdot 1^2 + 5 = 6 + 5 = 11$

Похідна по «ігрек» додатна, отже, в точці $M_0(-1; 1)$ в напрямку осі OY функція $z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$ зростає. Якщо зовсім просто, то тут нас очікує підйом вгору.
Окрім того, частинна похідна в точке характеризує швидкість *змінення* функції у відповідному напрямку. Чим отримане значення більше **за модулем** – тим поверхня крутіша, і навпаки, чим воно ближче до нуля – тим поверхня більш рівна. Так, в нашому прикладі «склон» в напрямку осі абсцис більш крутий, ніж «гора» в напрямку осі ординат.
Але то були два шляхи. Зовсім зрозуміло, що з точки, в якій ми знаходимося, *(і взагалі з будь-якої точки даної поверхні)* ми можемо зсунутись і в будь-якому іншому напрямку. Таким чином, виникає питання про складання загальної «навігаційної карти», яка повідомляла б нам про «ландшафт» поверхні $z = f(x; y)$ *за можливістю* в кожній точці $M(x; y)$ **області визначення даної функції** всіма доступними шляхами.

Систематизуємо елементарні прикладні правила:

1) Коли ми диференціюємо за x, то змінна y вважається константою.
2) Коли ж диференціювання відбувається за y, то константою вважається x.
3) Правила і таблиця похідних елементарних функцій справедливі і можуть бути застосовані для будь-якої змінної (x, y або до будь-якої іншої), за якою ведеться диференціювання.

Крой другий. Знаходимо частинні похідні другого порядку. Їх чотири.
Позначення:

z''_{xx} або $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – друга похідна по «ікс»

z''_{yy} або $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – друга похідна по «ігрек»

z''_{xy} або $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – змішана похідна «ікс по ігрек»

z''_{yx} або $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – змішана похідна «ігрек по ікс»

З другою похідною не має ніяких проблем. Росто кажучи, **друга похідна – це похідна від першої похідної**.
Для зручності я перепишу вже знайдені частинні похідні першого порядку:
$z'_x = 4xy^3 + 12x^3$
$z'_y = 6x^2y^2 + 5$
Спочатку знайдемо змішані похідні:
$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (4xy^3 + 12x^3)'_y = 4x(y^3)'_y + (12x^3)'_y = 4x \cdot 3y^2 + 0 = 12xy^2$

Як бачите, все просто: беремо частинну похідну z'_x і диференціюємо її ще раз, але в даному випадку – вже по «ігрек».
Аналогічно:
$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (6x^2y^2 + 5)'_x = 6y^2(x^2)'_x + (5)'_x = 6y^2 \cdot 2x + 0 = 12xy^2$
В практичних прикладах можна орієнтуватися на наступну рівність:
$z''_{xy} = z''_{yx}$

Таким чином, через змішані похідні другого порядку дуже зручн
$z''_{xx}=(z'_x)'_x=(4xy^3+12x^3)'_x=4y^3(x)'_x+12(x^3)'_x=4y^3\cdot 1+12\cdot 3x^2=4y^3+36x^2$ о перевірити, чи правильно ми знайшли частинні похідні першого порядку.
Знаходимо другу похідну по «ікс».
Ніяких винаходів, беремо $z'_x=4xy^3+12x^3$ і диференціюємо її по «ікс» ще раз:

Аналогічно:
$z''_{yy}=(z'_y)'_y=(6x^2y^2+5)'_y=6x^2(y^2)'_y+(5)'_y=6x^2\cdot 2y+0=12x^2y$
Слід зазначити, що при знаходженні z''_{xx}, z''_{yy} необхідно виявити підвищену увагу, так як ніяких чудових рівностей для їх перевірки не існує.
Другі похідні також знаходять широке практичне застосування, вони використовуються в задачі пошуку **екстремумів функції двох змінних**.

Приклад 2

Обчислити частинні похідні першого порядку функції $z=x^2y-4x\sqrt{y}-6y^2+5$ в точці $M_0(2;1)$. Знайти похідні другого порядку.

$z'_x=2xy-4\sqrt{y}$, $z'_y=x^2-\dfrac{2x}{\sqrt{y}}-12y$, $z'_x(2;1)=0$, $z'_y(2;1)=-12$,

$z''_{xy}=z''_{yx}=2x-\dfrac{2}{\sqrt{y}}$, $z''_{xx}=2y$, $z''_{yy}=\dfrac{x}{\sqrt{y^3}}-12$.

Набиваємо руку на більш складних прикладах:

Приклад 3

Знайти частинні похідні першого порядку функції $z=\dfrac{y\sin 2y}{\sqrt[3]{x^2}}$. Перевірити, що $z''_{xy}=z''_{yx}$.
Записати повный диференціал першого порядку dz.
Розв`язання: Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$z'_{x(y=const)}=\left(\frac{y\sin 2y}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'_x\overset{(1)}{=}y\sin 2y\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'_x\overset{(2)}{=}y\sin 2y\cdot\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'_x=$$
$$=y\sin 2y\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2y\sin 2y}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

Зверніть увагу на підрядковий індекс: $x(y=const)$, поруч з «іксом» не забороняється в дужках записувати, що y – константа. Дана помітка може бути дуже корисна для початківців, щоб легше було орієнтуватися в рішенні.
Подальші коментарі:
(1) Виносимо всі константи за знак похідної. В даному випадку y і $\sin 2y$, а, значить, і їхні похідні $y\sin 2y$ вважаються постійним числом.
(2) Не забуваємо, як правильно диференціювати корені.

$$z'_{y(x=const)}=\left(\frac{y\sin 2y}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'_y\overset{(1)}{=}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\cdot(y\sin 2y)'_y\overset{(2)}{=}$$
$$=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\cdot((y)'_y\sin 2y+y(\sin 2y)'_y)\overset{(3)}{=}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\cdot(1\cdot\sin 2y+y\cos 2y\cdot(2y)'_y)=$$
$$=\frac{(\sin 2y+2y\cos 2y)}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$z'_{y(x=const)} = \left(\frac{y\sin 2y}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'_y \overset{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot (y\sin 2y)'_y \overset{(2)}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot ((y)'_y \sin 2y + y(\sin 2y)'_y) \overset{(3)}{=} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot (1 \cdot \sin 2y + y\cos 2y \cdot (2y)'_y) =$$

$$= \frac{(\sin 2y + 2y\cos 2y)}{\sqrt[3]{x^2}}$$

(1) Виносимо всі константи за знак похідної, в даному випадку константою є $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

(2) Під штрихом у нас залишився добуток двох функцій, отже, слід використовувати правило диференціювання добутку $(uv)' = u'v + uv'$.

(3) Не забуваємо, що $\sin 2y$ – це складна функція (хоча і найпростіша зі складних). Застосуємо відповідне правило: $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$.
Тепер знаходимо змішані похідні другого порядку:

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(-\frac{2y\sin 2y}{3\sqrt[3]{x^5}}\right)'_y = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} \cdot (y\sin 2y)'_y =$$

$$= -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} \cdot (1 \cdot \sin 2y + y\cos 2y \cdot (2y)'_y) = -\frac{2(\sin 2y + 2y\cos 2y)}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = \left(\frac{(\sin 2y + 2y\cos 2y)}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'_x = (\sin 2y + 2y\cos 2y) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'_x =$$

$$= (\sin 2y + 2y\cos 2y) \cdot \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'_x = (\sin 2y + 2y\cos 2y) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x^{-\frac{5}{3}} =$$

$$= -\frac{2(\sin 2y + 2y\cos 2y)}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

$z''_{xy} = z''_{yx}$, значить, всі обчислення виконані вірно.

Запишемо повний диференціал dz . В контексті розглядаємого завдання не має сенсу розповідати, що таке повный диференціал функції двох змінних. Важливо, що цей самий диференціал дуже часто небхідно записати в практичних задачах.

Повний диференціал першого порядку функції двох змінних має вигляд:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy$$

В даному випадку:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = -\frac{2y\sin 2y}{3\sqrt[3]{x^5}}dx + \frac{(\sin 2y + 2y\cos 2y)}{\sqrt[3]{x^2}}dy$$

То есть, в формулу нужно ~~тупо~~ просто подставить уже найденные частные производные первого порядка. Значки дифференциалов dx и dy в этой и похожих ситуациях по возможности лучше записывать в числителях:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = -\frac{2y\sin 2y dx}{3\sqrt[3]{x^5}} + \frac{(\sin 2y + 2y\cos 2y)dy}{\sqrt[3]{x^2}}$$

І на прохання багатьох студентів, **повный диференціал другого порядку**.

Він виглядає так:

$$d^2z = z''_{xx}(dx)^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}(dy)^2$$

УВАЖНО знайдемо «однобуквенні» похідні 2-го порядку:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(-\frac{2y\sin 2y}{3\sqrt[3]{x^5}}\right)'_x = -\frac{2y\sin 2y}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right)'_x = -\frac{2y\sin 2y}{3}\cdot\left(x^{-\frac{5}{3}}\right)'_x =$$

$$= -\frac{2y\sin 2y}{3}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot x^{-\frac{8}{3}} = \frac{10y\sin 2y}{9\sqrt[3]{x^8}}$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = \left(\frac{(\sin 2y + 2y\cos 2y)}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'_y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\cdot(\sin 2y + 2y\cos 2y)'_y =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\cdot((\sin 2y)'_y + 2(y)'_y\cos 2y + 2y(\cos 2y)'_y) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\cdot(2\cos 2y + 2\cdot 1\cdot\cos 2y + 2y(-2\sin 2y)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\cdot(4\cos 2y - 4y\sin 2y) = \frac{4(\cos 2y - y\sin 2y)}{\sqrt[3]{x^2}}$$

и запишемо «монстра», акуратно «прикріпивши» квадрати $(dx)^2, (dy)^2$, похідні $dxdy$ і не забувши подвоїти змішану похідну:

$$d^2z = z''_{xx}\cdot(dx)^2 + 2z''_{xy}\cdot dxdy + z''_{yy}\cdot(dy)^2 =$$

$$= \frac{10y\sin 2y}{9\sqrt[3]{x^8}}\cdot(dx)^2 + 2\cdot\left(-\frac{2(\sin 2y + 2y\cos 2y)}{3\sqrt[3]{x^5}}\right)\cdot dxdy + \frac{4(\cos 2y - y\sin 2y)}{\sqrt[3]{x^2}}\cdot(dy)^2 =$$

$$= \frac{10y\sin 2y(dx)^2}{9\sqrt[3]{x^8}} - \frac{4(\sin 2y + 2y\cos 2y)dxdy}{3\sqrt[3]{x^5}} + \frac{4(\cos 2y - y\sin 2y)(dy)^2}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Нічого страшного, якщо щось здалося важким, до похідних завжди можна повернутися пізніше, після того, як підвищите техніку диференціювання:

Приклад 4

Знайти частинні похідні першого порядку функції $z = \sin\sqrt{\frac{y}{x^3}}$.

Записати повный диференціал dz.

Розв`язання:

$$z'_x = \left(\sin\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)'_x \overset{(1)}{=} \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}}\cdot\left(\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)'_x \overset{(2)}{=} \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}}\cdot\sqrt{y}\cdot\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'_x =$$

$$= \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}}\cdot\sqrt{y}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{x^5}}\cdot\cos\sqrt{\frac{y}{x^3}}$$

(1) Застосовуємо правило диференціювання складної функції $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$. З уроку **Похідна складної функції** слід пам`ятати дуже важливий момент: коли ми за таблицею перетворюємо синус (зовнішню функцію) в косинус, то вкладення $\sqrt{\frac{y}{x^3}}$ (внутрішня функція) в нас <u>не змінюється</u>.

(2) Тут використаємо властивість коренів: $\sqrt{\frac{y}{x^3}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^3}}$, виносимо константу $\sqrt{y}$ за знак похідної, а корінь $\sqrt{x^3}$ представляємо в необхідному для диференціюавання вигляді. Аналогічно:

$$z'_y = \left(\sin\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)'_y = \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}} \cdot \left(\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)'_y = \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cdot \left(\sqrt{y}\right)'_y =$$

$$= \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3 y}} \cdot \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}}$$

Запишемо повний диференціал першого порядку:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{x^5}} \cdot \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}} \cdot dx + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3 y}} \cdot \cos\sqrt{\frac{y}{x^3}} \cdot dy$$

<u>Приклад 5</u>

Знайти частинні похідні першого порядку функції $z = \frac{2^y}{y} + x^2 tgx + \ln(x^2 + y^3)$.

$$z'_x = \left(\frac{2^y}{y} + x^2 tgx + \ln(x^2 + y^3)\right)'_x \overset{(1)}{=} \left(\frac{2^y}{y}\right)'_x + (x^2 tgx)'_x + (\ln(x^2 + y^3))'_x \overset{(2)}{=}$$

$$= 0 + (x^2)'_x \cdot tgx + x^2 (tgx)'_x + \frac{1}{(x^2 + y^3)} \cdot (x^2 + y^3)'_x =$$

$$= 2x \cdot tgx + x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{(x^2 + y^3)} \cdot (2x + 0) = 2xtgx + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{2x}{(x^2 + y^3)}$$

(1) Застосуємо правило диференціювання суми

(2) Перший доданок в даному випадку вважається константою, оскільки у виразу $\frac{2^y}{y}$ не має нічого, що залежить від «ікс» – тільки «ігреки». Знаєте, завжди приємно, коли дріб вдається перетворити в нуль). Для другого доданку застосуємо правило диференціювання добутку. До речі, в цьому сенсі нічого б не змінилося, якщо б замість $x^2 tgx$ була дана функція $x^2 tg(xy)$ – важливо, що тут **добуток двох функцій, КОЖНА з яких залежить від «ікс»**, а тому, необхідно використовувати правило диференціювання добутку. Для третього доданку застосовуємо правило диференціювання складної функції.

$$z'_y = \left(\frac{2^y}{y} + x^2 tgx + \ln(x^2 + y^3)\right)'_y = \left(\frac{2^y}{y}\right)'_y + (x^2 tgx)'_y + (\ln(x^2 + y^3))'_y \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{(2^y)'_y \cdot y - 2^y \cdot (y)'_y}{y^2} + 0 + \frac{1}{(x^2 + y^3)} \cdot (x^2 + y^3)'_y =$$

$$= \frac{2^y \cdot \ln 2 \cdot y - 2^y \cdot 1}{y^2} + \frac{1}{(x^2 + y^3)} \cdot (0 + 3y^2) = \frac{2^y \cdot \ln 2 \cdot y - 2^y}{y^2} + \frac{3y^2}{(x^2 + y^3)}$$

(1) В першому доданку і в чисельнику і в знаменнику міститься «ігрек», отже, необхідно застосувати правило диференціювання дробу: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Другий доданок залежить ТІЛЬКИ від «ікс», значить, $x^2 tgx$ вважається константою і перетворюється в нуль. Для третього доданку застосовуємо правило диференціювання складної функції.