Заняття 4

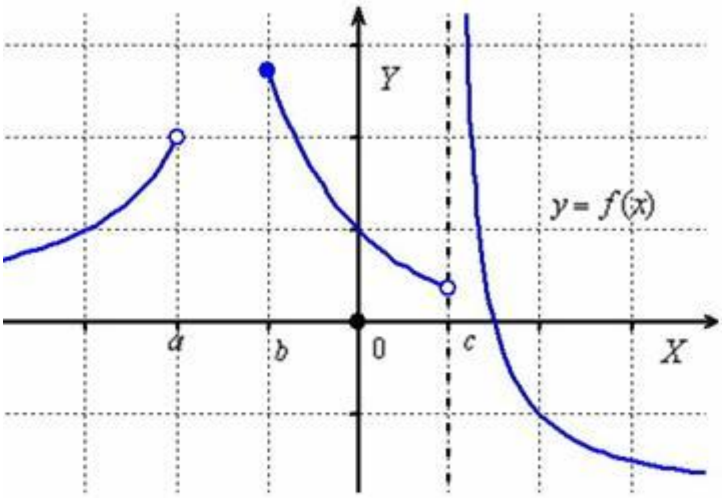
Як <u>знайти область визначення функції? Приклади вирішень</u>

Продовжуємо вивчення розділу «Функції і графіки», і наступна станція нашого навчання – **Область визначення функції**. Активне обговорення даного поняття почалося на занятті про **графіки функцій**, де я розглядала елементарні функції,і їх області визначення. Тому рекомендую розпочати з теми, оскільки я не буду знову зупинятися на деяких базових моментах.

Я вважаю, що ви знайомі з областю визначення наступних функцій: лінійної, квадратичної, кубічної функції, многочленів, експоненти, синусу, косинусу. Вони визначені на $\Re$ (*множині всіх дійсних чисел*). За тангенси, арксинуси, так і бути, прощаю =) – більш рідкісні графіки запам`ятовуються далеко не одразу.

Область визначення – здавалося б річ проста, і виникає закономірне питання,про що ж буде лекція? На даному уроці я розгляну найрозповсюдженіші задачі на знаходження області визначення функції. Окрім того, ми повторимо *нерівність з одною змінною*, навички вирішення яких знадобляться в інших задачах вищої математики. Матеріал,до речі, весь шкільний, тому буде корисний не тільки студентам.

Коротко про головне: річ піде про функції однієї змінної $y = f(x)$. Її область визначення – це **множина значень «ікс»**, для яких існують значення «ігреків». Розглянемо умовний приклад:



Область визначення даної функції представляє собою об`єднання проміжків:
$D(f) = (-\infty; a) \cup [b; c) \cup (c; +\infty)$ (для тих, хто забув: $\cup$ – значок об`єднання). Іншими словами, якщо взяти будь-яке значення «ікс» з інтервалу $(-\infty, a)$, або з $[b; c)$, або з $(c; +\infty)$, то для кожного такого «ікс» буде існувати значення «ігрек».

Грубо кажучи, де область визначення – там є графік функції. А ось полуінтервал $[a; b)$ і точка «це» не входять в область визначення і графіка там немає.

Як знайти область визначення функції? Багато хто пам`ятає дитячу рахівницю: «камінь, ножиці, бумага», і в даному випадку її можна сміливо перефразувати: «корінь, дріб і логарифм». Таким чином, якщо вам зустрічається дріб, корінь або логарифм, то слід одразу напружитись! Набагато рідше зустрічаються тангенс, котангенс, арксинус, арккосинус, і про них ми теж поговоримо. Але спочатку:

<u>Область определения функции, в которой есть дробь</u>

Нехай дана функція, містить деякий дріб $\dfrac{1}{\alpha(x)}$. Як ви знаєте, на нуль ділити не можна: $\alpha(x) \neq 0$, тому те **значення «ікс», які перетворюють знаменник в нуль – не входять в область визначення даної функції**.

Не буду зупинятися на самих простих функціях таких як $f(x)=\frac{2}{x}, f(x)=\frac{x}{x-2}, f(x)=\frac{x^2}{x+3}$ і т.п., оскільки всі прекрасно бачать точки, які не входять в їх області визначення.
Розглянемо більш складні дроби:

Приклад 1

Знайти область визначення функції

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2-3}$$

Розв`язання: в чисельнику нічого особливого не має, а ось знаменник повинен бути ненульовим. Давайте прирівняємо його до нуля і спробуємо знайти «погані» точки:

$$x^2-3=0$$

$$x^2=3$$

Отримане рівняння має два корені: $x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}$. Дані значення **не входять в область визначення функції**. Дійсно, підставте $x=-\sqrt{3}$ або $x=\sqrt{3}$ в функцію $f(x)=\frac{x+2}{x^2-3}$ і ви побачите, що знаменник перетворюється в нуль.

Відповідь: область визначення: $D(f)=\Re\setminus\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$

Запис читається так: «область визначення – всі дійсні числа окрім множини, що складається зі значень $x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}$». Нагадую, що значок зворотнього слешу в математиці позначає логічне віднімання, а фігурні дужки – множину. Відповідь можна рівносильно записати у вигляді об`єднання трьох інтервалів:

$$D(f)=(-\infty;-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3};\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};+\infty)$$

В точках $x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}$ функція потерпає від **бескінечного розриву**, а прямі, що задані рівняннями $x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}$ є **вертикальними асимптотами** для графіку даної функції.

Чи завжди дріб буде «поганою»? Ні. Наприклад, функція $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ визначена на всій числовій осі. Яке б значення «ікс» ми не взяли, знаменник не перетвориться на нуль, більш того, буде завжди додатним: $x^2+1>0$. Таким чином, область визначення даної функції: $D(f)=\Re$.

Рекомендую запам`ятати, при будь-якому значенні «ікс» і додатній константі k:

$$x^2+k>0$$

Всі функції подібні до $f(x)=\frac{3x}{x^2+2}, f(x)=\frac{x^3}{4+x^2}$ визначені і**неперервні** на $\Re$.

Більш складна ситуація, коли знаменник окупував квадратний тричлен:

Приклад 2

Знайти область визначення функції

$$f(x)=\frac{2x+3}{x^2+2x+5}$$

Розв`язання: знайдемо точки, в яких знаменник перетворюється на нуль. Для цього вирішимо **квадратне рівняння**:

$$x^2+2x+5=0$$

$$D=4-20=-16<0$$

Дискримінант виходить від`ємним, а значить, дійсних коренів не має, і наша функція визначена на всій числовій осі.

Відповідь: область визначення: $D(f)=\Re$

Область визначення функції з коренем

Функція з квадратним кореем $\sqrt{\alpha(x)}$ визначена тільки при тих значеннях «ікс», коли **підкореневий вираз невід\`ємний**: $\alpha(x) \geq 0$. Якщо корінь розташований в знаменнику $\frac{1}{\sqrt{\alpha(x)}}$, то умова очевидним чином стає більш жорсткою: $\alpha(x) > 0$. Аналогічні викладки справедливі для будь-якого кореня додатної парної степені: $\sqrt[4]{\alpha(x)}, \sqrt[6]{\alpha(x)}, \ldots$, правда, корінь уже 4-ої степені в **дослідженні функцій** не пам\`ятаю.

Приклад 3

Знайти область визначення функції

$f(x) = \sqrt{3 - 2x}$

*Розв\`язання*: підкореневий вираз повинен бути невід\`ємним:

$3 - 2x \geq 0$

Перед тим, як продовжити рішення, нагадаю основні правила роботи з нерівностями, що відомі ще зі школи.

Звертаю увагу! Зараз розглядаються нерівності з однією змінною – тобто для нас існує тільки **одна розмірність по осі** OX. Не плутайте з **нерівностями двох змінних**, де геометрично задіяна вся координатна площина. Однак є і приємні спів падіння! Отже, для нерівності рівносильні наступні перетворення:

1) Доданки можна переносити з частини в частину, змінюючи у них (доданках) знаки.

2) Обидві частини нерівності можна домножити на додатне число.

3) Якщо обидві частини нерівності домножити на від\`ємне число, то необхідно змінити **знак самої нерівності**. Наприклад, якщо було «більше», то стане «менше»; якщо було «менше або дорівнює», то стане «більше або дорівнює».

В нерівності $3 - 2x \geq 0$ перенесемо «трійку» в праву частину зі зміною знаку (правило №1):

$-2x \geq -3$

Помножимо обидві частини нерівності на –1 (правило №3):

$2x \leq 3$

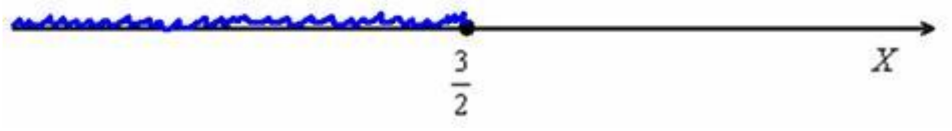
Помножимо обидві частини нерівності на $\frac{1}{2}$ (правило №2):

$x \leq \frac{3}{2}$

Відповідь: область визначення: $D(f) = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$

Відповідь також можна записати еквівалентною фразою: «функція визначена при $x \leq \frac{3}{2}$».

Геометрично область визначення зображується штрихуванням відповідних інтервалів на осі абсцис. В даному випадку:



Ще раз нагадую геометричний сенс області визначення – графік функції $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$ існує тільки на заштрихованій ділянці і відсутній при $x > \frac{3}{2}$.

В більшості випадків годиться суто аналітичне знаходження області визначення, але коли функція сильно заморочена, слід накресоити вісь OX і зробити помітки.

Приклад 4

Знайти область визначення функції

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}}$$

Розв`язання: підкореневий вираз повинен бути суворо додатним, тобто нам необхідно вирішити нерівність $x^2+4x+3>0$. На першому кроці намагаємося розкласти квадратний тричлен на множники:

$x^2+4x+3=0$

$D=16-12=4>0$

Дискримінант додатний, шукаємо корені:

$\sqrt{D}=\sqrt{4}=2$

$$x_1=\frac{-4-2}{2}=-3,\quad x_2=\frac{-4+2}{2}=-1$$

Таким чином, парабола $a(x)=x^2+4x+3$ перетинає вісь абсцис в двох точках, а це означає, що частина параболи розташована нижче ніж вісь (нерівність $x^2+4x+3<0$), а частина параболи – вище вісі (необхідна нам нерівність $x^2+4x+3>0$).

Оскольки коефіцієнт $a=1>0$, то гілкии параболи дивляться вгору. З выщезазначеного слідує, що на інтервалах $(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$ виконана нерівність $x^2+4x+3>0$ (гілки параболи уходять вгору на бескінечність), а вершина параболи розташована на проміжку $(-3;-1)$ нижче осі абсцис, що відповідає нерівності $x^2+4x+3<0$:

***! Примітка: якщо** вам не до кінця зрозумілі поячснення, накресліть другу вісь і параболу цілком! Доцільно повернутися до **Графіки і властивості елементарних функцій** і методички **Гарячі формули шкільного курсу математики**.*

Зверніть увагу, що самі точки $x=-3,\ x=-1$ виколоті (не входять в рішення), тому, що нерівність в нас строга.

Відповідь: область визначення: $D(f)=(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$

Взагалі то, багато нерівностей (в тому числі розглянута) вирішуються універсальним *методом інтервалів*, відомим знову ж зі шкільної програми. Але у випадках квадратних дво- і тричленів, на мій погляд, більш зручно і швидко проаналізувати розташування параболи відносно осі OX. А основний спосіб – метод інтервалів ми детально розберемо в лекції **Нулі функції. Інтервали знакопостійності**.

Чи може функція з квадратним коренем бути визначена на всій числовій прямій? Звісно. Знайомі все обличчя: $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Або аналогічна сума з експонентою: $f(x)=\sqrt{e^x+1}$. Дійсно, для будь-яких значень «ікс» і «ка»: $e^{kx}>0$, тому подАвно і $e^x+1>0$.

А ось менш очевидний приклад: $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$. Тут дискримінант від`ємний (парабола не перетинає вісь абсцис), при цьому гілки параболи направлені вгору, отже, $x^2+x+1>0$ і область визначення: $D(f)=\Re$.

Питання протилежне: чи може область визначення функції бути *пустою*? Так, і одразу напрошується примітивний приклад $f(x)=\sqrt{-e^x-1}$, де підкореневий вираз від’ємний при будь-якому значенні «ікс», і область визначення: $D(f)=\varnothing$ (значок пустої множини). Така функція не визначена взагалі.

З непарними коренями $\sqrt[3]{a(x)},\sqrt[5]{a(x)},\ldots$ і т.д. все відбувається краще – тут **підкореневий вираз може бути і від`ємним**. Наприклад, функція $f(x)=\sqrt[3]{x}$ визначена на всій числовій прямій. Однак у функції $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x-7}}$ єдина точка $x=7$ все ж не входить в область визначення, оскільки перетворює знаменник в нуль. З тієї ж причини для функції $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+4x+3}}$ виключаються точки $x=-3,\ x=-1$.

Область визначення функції з логарифмом

Третя розповсюджена функція – логарифм. В якості прикладу я буду розглядати натуральний логарифм, який попадається приблизно в 99 прикладах зі 100. Якщо деяка функція містить логарифм $\ln(\alpha(x))$, то в її область визначення повинні входити тільки ті значення «ікс», які задовольняють нерівності $\alpha(x)>0$. Якщо логарифм знаходиться в знаменнику: $\dfrac{1}{\ln(\alpha(x))}$, то **додатково** накладається умова $\alpha(x)\neq 1$ (так як $\ln 1=0$).

Приклад 5 Знайти область визначення функції

$$f(x)=\frac{1}{\ln(x+3)}$$

Розв`язання: у відповідності з вищезазначеним складемо і вирішимо систему:

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x+3\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x\neq -2 \end{cases}$$

Графічне вирішення для чайників:

Відповідь: область визначення: $D(f)=(-3;-2)\cup(-2;+\infty)$

Корисная інформація: *цікава типова функція* $f(x)=\ln x^2$, *вона визначена на всій числовій прямій окрім точки* $x=0$. *Згідно з властивістю логарифма* $\ln b^a=a\ln b$, *«двійку» можна винести множником за межі логарифму, але, щоб функція не змінилася, «ікс» необхідно заключити під знак модуля:* $f(x)=\ln x^2=2\ln|x|$. *Ось вам і ще одне «практичне застосування»* [*модуля*]() *=). Так необхідно поступати в більшості випадків, коли ви зносите парну степінь, наприклад:* $\ln(2x-1)^4=4\ln|2x-1|$. *Якщо ж основа степені завідомо додатня, наприклад,* $x^2+4>0$, *то в знаку модуля відпадає необхідність і достатньо обійтися круглими дужками:* $\ln(x^2+4)^2=2\ln(x^2+4)$.

Щоб не повторюватись, давайте ускладнимо завдання:

Приклад 6

Знайти область визначення функції

$$f(x)=\sqrt{x}\ln(9-x^2)$$

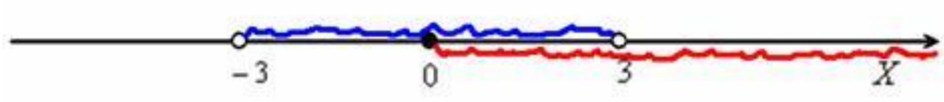
Розв`язання: в даній функції у нас присутній і корінь і логарифм.

Підкореневий вираз повинен бути невід`ємним: $x\geq 0$, а вираз під знаком логарифму – строго додатній: $9-x^2>0$. Таким чином, необхідно вирішити систему:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ 9-x^2>0 \end{cases}$$

Багато хто з вас прекрасно знають або інтуітивно здогадуються, що вирішення системи повинно задовольняти **кожній** умові.

Досліджуючи розташування параболи $\alpha(x) = -x^2 + 9$ відносно осі OX, приходимо висновку, що нерівності $9 - x^2 > 0$ задовольняє інтервал $(-3; 3)$ (синє штрихування):



Нерівності $x \geq 0$, вочевидь, відповідає «червоний» полуінтервал $[0; +\infty)$.
Оскільки обидві умови повинні виконуватися **одночасно**, то вирішенням системи є перетин даних інтервалів. «Загальні інтереси» задовільне ні на полуінтервалі $[0; 3)$.
Відповідь: область визначення: $D(f) = [0; 3)$
Типову нерівність $9 - x^2 > 0$ не важко вирішити і аналітично.
Знайдена область визначення не зміниться для «схожих функцій», наприклад, для $f(x) = \sqrt{x} + \ln(9 - x^2)$ або $f(x) = \ln(9 - x^2) - \sqrt{x}$. Також можна додати які-небудь неперервні на $\Re$ функції, наприклад: $f(x) = x^2 + 3 + \sqrt{x}\ln(9 - x^2)$, або так: $f(x) = \dfrac{\sin x \cdot \sqrt{x}\ln(9 - x^2)}{e^x}$, або так: $f(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \sin(\ln(9 - x^2))$. Як кажуть, корінь і логарифм – річ вперта. Але, якщо одну з функцій «скинути» в знаменник, то область визначення зміниться (хоча в загальному випадку це не завжди справедливо).
<u>Приклад 7</u>
Знайти область визначення функції
$$f(x) = \frac{\ln(1 - x)}{x^2 - 2}$$
<u>Розв`зання</u>: складемо і вирішимо систему:
$$\begin{cases} 1 - x > 0 \\ x^2 - 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \neq \pm\sqrt{2} \end{cases}$$
Всі дії уже розглянуті в ході заняття. Зобразимо на числовій прямій інтервал, що відповідає нерівності $x < 1$ і, згідно з другою умовою, виключимо дві точки:

Значення $x = \sqrt{2}$ виявилося взагалі не в справах.
Відповідь: область визначення $D(f) = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; 1)$