Заняття 3

Наближене розв`язування скінченних рівнянь
(продовження)

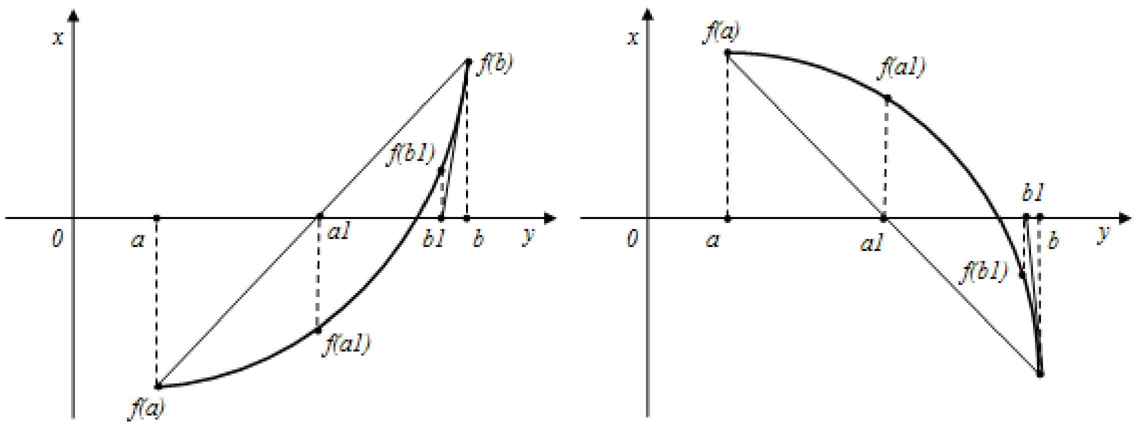
Використання комбінованого методу хорд та дотичних для знаходження розв'язку нелінійного рівняння

Метод хорд та дотичних дають близьке до кореня значення з різних боків. Тому, з метою пришвидшити процес відшукання кореня їх часто використовують у поєднанні.

Нехай маємо рівняння $f(x) = 0$ корінь якого знаходиться на відрізку $[a; b]$. При знаходженні розв'язку даного рівняння за комбінованим методом можливі два випадки:

1. Якщо $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, то з лівого кінця відрізку $[a; b]$ шукають корінь за методом хорд, а з правого кінця - за методом дотичних. В результаті отримуємо наступні розрахункові формули.

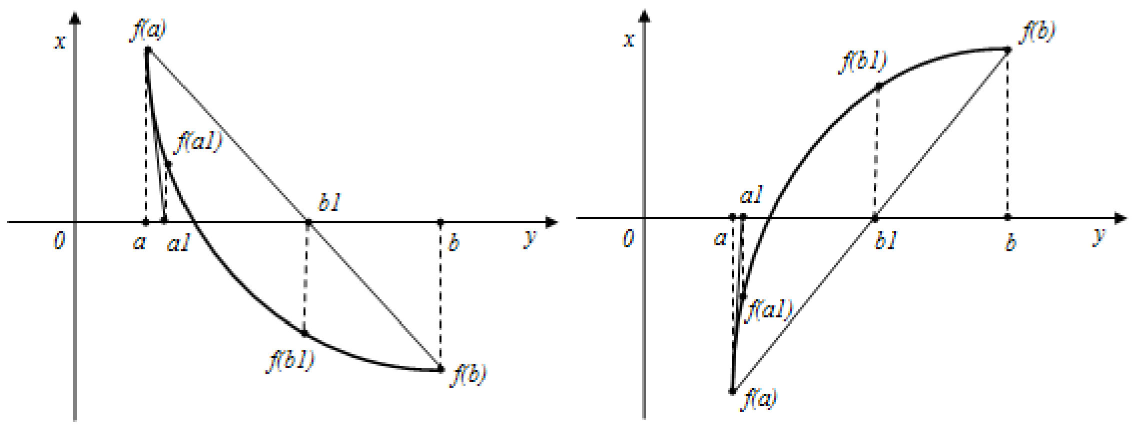
$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)(b_n - a_n)/(f(b_n) - f(a_n))$$
$$b_{n+1} = b_n - f(b_n)/f'(b_n)$$



Графічна інтерпритація першого випадку комбінованого методу

2. Якщо $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то з лівого кінця відрізку $[a; b]$ шукають корінь за методом дотичних, а з правого кінця - за методом хорд.

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)/f'(a_n)$$
$$b_{n+1} = b_n - f(b_n)(b_n - a_n)/(f(b_n) - f(a_n))$$

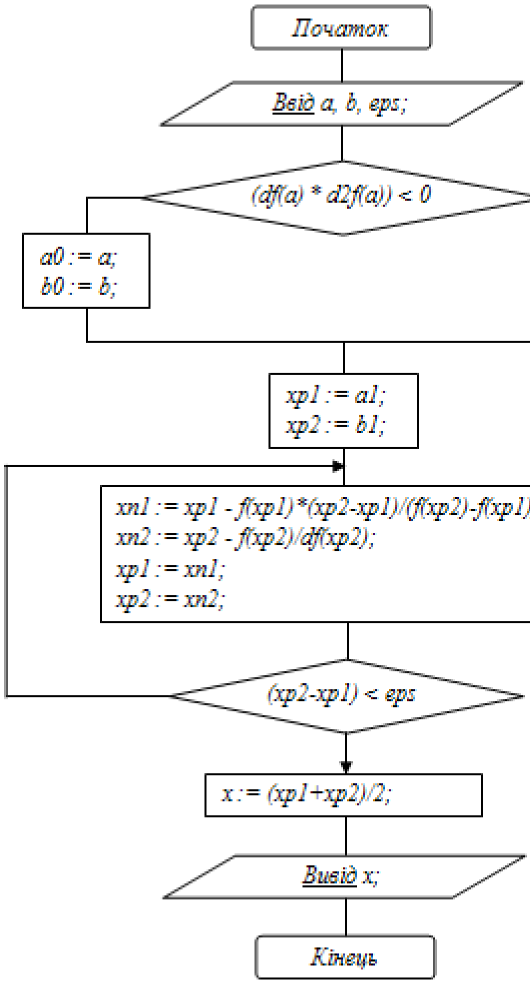


Графічна інтерпритація другого випадку комбінованого методу

Процес обчислення кореня за комбінованим методом припиняють, якщо виконується умова $(b_n - a_n) < \varepsilon$. І за наближене значення кореня приймають $x = (b_n + a_n)/2$.

Зауваження: на кожному кроці комбінованого методу за нерухомий кінець у формулі методу хорд береться наближення, обчислене на тому ж кроці за формулою дотичних.

Блок-схема програмної реалізації комбінованого методу:



<u>Комбінований метод хорд і дотичних вирішення рівнянь</u>

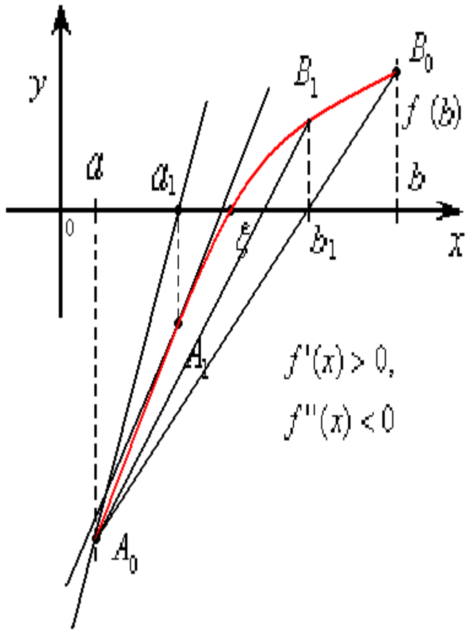
Методи хорд і дотичних дають наближення кореня з різних сторін.Тому їх часто застосовують в поєднанні, і уточнення кореня відбувається скоріше.

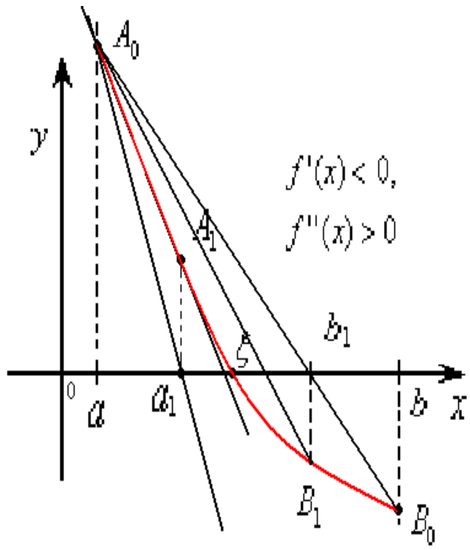
Нехай дано рівняння $f(x) = 0$, корінь ξ відділений і знаходиться на відрізку $[a, b]$.

Застосуємо комбінований метод хорд і дотичних з урахуванням типу графіка функції.

Якщо $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, то метод хорд дає наближення кореня з недостачею, а метод дотичних –з надлишком:

Якщо ж $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то методом хорд отримуємо значення кореня з надлишком, а методом дотичних – з недостачею:





Але, у всіх випадках шуканий корінь ξ міститься між наближеними коренями, що були отримані за методом хорд і методом дотичних, тобто виконується нерівність: $a < \overline{x_n} < \xi < \overline{\overline{x_n}} < b$, де $\overline{x_n}$ - наближене значення кореня з недостачею, $\overline{\overline{x_n}}$ - з надлишком.

Обчислення необхідно проводити в такому порядку:

-якщо $f'(x)\cdot f''(x)>0$, то зі сторони кінця *a* лежать наближені значення кореня, що отримані за методом хорд, а зі сторони кінця *b* – значення, що отримані за методом дотичних, і тоді: $a_1 = a - \dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f(a)$; $b_1 = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$.

Оскільки тепер шуканий корінь ξ міститься на відрізку $[a_1, b_1]$, то, застосовуючи до цього інтервалу комбінований метод, отримуємо: $a_2 = a_1 - \dfrac{b_1-a_1}{f(b_1)-f(a_1)}\cdot f(a_1)$; $b_2 = b_1 - \dfrac{f(b_1)}{f'(b_1)}$ і взагалі: $a_{n+1} = a_n - \dfrac{b_n-a_n}{f(b_n)-f(a_n)}\cdot f(a_n)$; $b_{n+1} = b_n - \dfrac{f(b_n)}{f'(b_n)}$.

-якщо ж $f'(x)\cdot f''(x)<0$, то зі сторони кінця *a* лежать наближені значення кореня, що отримані за методом дотичних, а зі сторони кінця *b* – значення, що отримані за методом хорд, і тоді: $b_{n+1} = b_n - \dfrac{b_n-a_n}{f(b_n)-f(a_n)}\cdot f(b_n)$; $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$.

Комбінований метод дуже зручний при оцінюванні похибки обчислювань. Процес обчислення закінчується, як тільки стане виконуватися нерівність: $\left|\overline{\overline{x_n}} - \overline{x_n}\right| < \varepsilon$.

За наближене значення кореня необхідно прийняти $\xi^* = \dfrac{1}{2}\left(\overline{\overline{x_n}} + \overline{x_n}\right)$, де $\overline{x_n}$ - наближене значення кореня ξ з недостачею, $\overline{\overline{x_n}}$ - з надлишком.

<u>Приклад 1</u>

Комбінованим методом хорд і дотичних поточнити до $\varepsilon = 0{,}001$ корені рівняння $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$.

<u>Розв`язання:</u>

1. Відділемо корені аналітично. Маємо: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 1$, $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$, тобто корені похідної $x_1=-4$, $x_2=2$.

Складемо таблицю знаків функції:

x	-∞	-4	2	+∞
sign f(x)	-	+	-	+

Дане рівняння має три дійсних корені: $x_1 \in (-\infty;-4), x_2 \in (-4;2), x_3 \in (2;+\infty)$.

Зменшимо відрізки знаходження коренів до довжини, що дорівнює 1:

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
sign f(x)	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	+

Отже, $x_1 \in (-7;-6), x_2 \in (0;1), x_3 \in (3;4)$.

2)поточнимо комбінованим методом хорд і дотичних корінь, що лежить в інтервалі (-7;-6).

Маємо *f(-7)=-27<0, f(-6)=37>0* и $f''(x) = 6x + 6 < 0$, $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 > 0$, $f'(x) \cdot f''(x) < 0$.

Це значить, що застосовуємо формули: $b_{n+1} = b_n - \dfrac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} \cdot f(b_n)$; $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$. Тут *a₀=-7, b₀=-6.Обчислення зведемо в таблицю*:

n	a_n b_n	$b_n - a_n$	a_n^2 b_n^2	a_n^3 b_n^3	$f(a_n)$ $f(b_n)$	$f'(a_n)$	$f(b_n) - f(a_n)$	$-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ $-\dfrac{(b_n - a_n)\cdot f(b_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$	a_{n+1} b_{n+1}
0	-7 -6	1	49 36	-343 -216	-27 37	81	64	-0,333 -0,578	-6,667 -6,578
1	-6,667 -6,578	0,089	44,49 43,27	-296,34 -284,63	-1,985 4,052	73,345	6,037	0,027 -0,060	-6,640 -6,638
2	-6,640 -6,638	0,02							

З таблиці випливає, що $\xi_1^* \approx -6{,}639$

3)Визначимо $\xi_2^* \in (0;1)$. Маємо *f(0)=1>0, f(1)=-19<0* і $f''(x) = 6x + 6 > 0$, $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 < 0$, $f'(x) \cdot f''(x) < 0$. Як і в випадку знаходження ξ_1^* (скориставшись тими ж самим формулами, але в яких $a_0=0, b_0=1$), будуємо таблицю для поточнення шуканого креня. В результаті отримаємо $\xi_2^* \approx 0{,}042$.

4) Дляпоточнення наближеного кореня комбінованим методом хорд і дотичних на інтервалі (3;4) маємо: $f(3)=-17<0, f(4)=7>0$ і $f''(x)=6x+6>0$, $f'(x)=3x^2+6x-24>0$, $f'(x)\cdot f''(x)>0$.

Розрахункові формули в цьому випадку наступні: $a_{n+1}=a_n-\dfrac{b_n-a_n}{f(b_n)-f(a_n)}\cdot f(a_n)$; $b_{n+1}=b_n-\dfrac{f(b_n)}{f'(b_n)}$. Побудувавши таблицю послідовних обчислень, знаходимо, що $\xi_3^* \approx 3{,}596$.

Метод ітерації (метод послідовних наближень)

Нехай відомо, що корінь *x* рівняння *f(x)=0* лежить на відрізку $G=\{a\le x\le b\}$.

Методика вирішення задачі.

1.Рівняння *f(x)=0* рівносильним перетворенням привести до вигляду $x=\varphi(x)$. Це перетворення може бути виконане різними шляхами, але для збіжності необхідно забезпечити виконання умови $|\varphi'(x)|\le\chi<1$ (χ - деяка константа). При цьому задача зводиться до знаходження абсциси точки перетину прямої *y=x* і кривої $y=\varphi(x)$

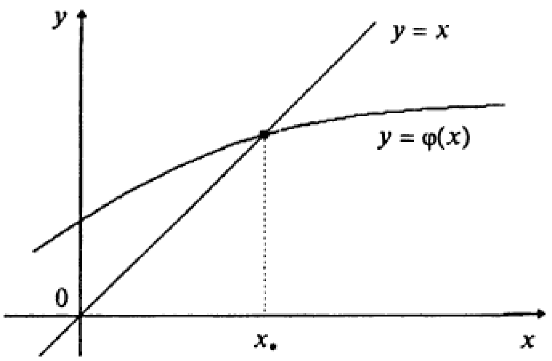


Рис. 3.8

2.Задати початкове наближення $x^{(0)}\in[a,b]$ і мале додатнє число ε. Нехай *k=0.*

3.Обчислити наступне наближення: $x^{(k+1)}=\varphi(x^{(k)})$.

4.Якщо $\left|x^{(k+1)}-x^k\right|\le\varepsilon$ ітерації завершуються і $x\approx x^{(k+1)}$. Якщо $\left|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right|>\varepsilon$, то присвоюємо *k=k+1* і переходимо до пункту 3.

Зауваження . В якості умови завершення ітерацій при відомому значенні χ може бути використана нерівність $\left|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right|\le\dfrac{1-\chi}{\chi}\cdot\varepsilon$.

Проблеми збіжності і єдності чисельного рішення є головними при застосуванні цього методу, вирішуються і досліджуються за допомогою поняття відображення, що стискається і теореми про достатню умову збіжності методу.

Відображення (функція) $\varphi(x)$ називається такою, що стискається в області *G* з коефіцієнтом $f(0\le\chi<1)$, якщо для будь-яких двох x', x'' з *G* виконується нерівність $|\varphi''(x)-\varphi'(x)|\le\chi\cdot|x''-x'|$.

Теорема про збіжність методу простих ітерацій і єдності отриманого чисельного рішення . Нехай виконані умови:

1.Нелінійне рівняння $x=\varphi(x)$ має рішення $x\in G$.

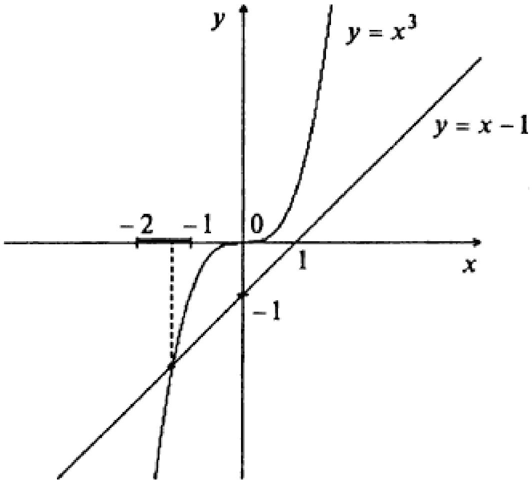
2.Відображення $\varphi(x)$ є таким, що стискається в області G з деяким коефіцієнтом $\chi(0 \le \chi < 1)$. Тоді:
а)рішення x є єдиним рішенням в області G;
б)послідовність $x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(k+1)}$, яка визначається за відображенням на основі ітераційного процесу, збігається до рішення x зі швидкістю геометричної прогресії, тобто при виборі $x^{(0)}$ за умови $\left|x - x^{(0)}\right| < R, R > 0$ - деяке мале число, справедлива нерівність
$\left|x - x^{(k)}\right| \le \chi^{k} \cdot \left|x - x^{(0)}\right|, k = 0,1,2,...$

Теорема стверджує, що при виконанні умов 1,2 існує інтервал $G(x,R)$ такий, що, якщо взяти $x^{(0)}$ в цьому інтервалі і обчислити $x^{(1)}, x^{(2)}, ...$ за формулою $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$, то в результаті з будь-якою наперед заданою точністю можна обчислити $x^{(k+1)} \approx x$, що відповідає шуканому (єдиному) кореню. Але, так як цей інтервал невідомий, то можна взяти довільне $x^{(0)} \in G$. Якщо при цьому обчислюється послідовність $x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(k)}...$, що збігається до деякого значення $\hat{\chi} = x$. Якщо збіжність відсутня, то треба взяти інше $x^{(0)} \in G$ і повторити розрахунок.

Теорема про достатню умову збіжності методу простих ітерацій.
Нехай виконані умови:
1.Функція $\varphi(x)$ має похідні для всіх $x \in G$.
2.Існує число $\chi(0 \le \chi < 1, \chi = const)$ так, що $\left|\varphi'(x)\right| \le \chi$ для всіх $x \in G$.

Тоді зображення $\varphi(x)$ є стискаючим в G з коефіцієнтом стискання x і послідовність $x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(k+1)}...$, що визначається на основі ітераційного прцесу, збігається до рішення x, тобто є $x^{(k)} \to x, при k \to \infty$.

Приклад 2. Вирішити рівняння методом прстих ітерацій $x^3 - x + 1 = 0$
Розв`язання: Згідно з теоремою про кількість коренів алгебраїчного рівняння (алгебраїчне рівняння n-ної степені має рівно n коренів, дійсних або комплексних за умови, що кожний корінь рахується стільки разів, яка його кратність) рівняння має три корені, серед яких щонайменше один – дійсний (наслідок з теореми про властивість парної спряженості комплексних коренів: якщо $x_i = \alpha + \beta_i$ - корінь алгебраїчного рівняння кратності k, то число



$\overline{x_i} = \alpha - \beta_i$

Рис. 3.3

також є коренем тієї ж кратності). Наслідок: Алгебраїчне рівняння непарні степені має що найменше один дійсний корінь.

Оцінимо модулі коренів рівняння за теоремою про оцінку модулів коренів рівняння. Нехай $A = \max\{|a_{n-1}|, ..., |a_0|\}, B = \max\left\{|a_n|, |a_{n+1}|, ..., |a_1|\right\}$, де $a_k, k = \overline{0, n}$ - коефіцієнти рівняння $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$. Тоді модулі всіх коренів $x_i(i = 1,2,...,n)$ рівняння задовольняють нрівності $\dfrac{1}{1+\dfrac{B}{|a_n|}} < |x_i| \le 1+\dfrac{A}{|a_n|}, i=1,2,...,n$, тобто корені рівняння розташовані в кільці.

Наслідок: Числа $r=\dfrac{1}{1+\dfrac{B}{|a_n|}}, R=1+\dfrac{A}{|a_n|}$ є відповідно нижньою і верхньою границями додатніх коренів алгебраїчного рівняння: $r < x_i^+ < R$. Аналогічно числа $–R$ і $–r$ є верхньою і нижньою границями від`ємних коренів рівняння: $-R < x_i^- < r$.

$A=\max\{|0|,|-1|,|1|\}=1; B=\max\{|1|,|0|,|-1|\}=1$, то $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{|1|}} < |x_i| < 1+\dfrac{1}{|1|}$ або $\dfrac{1}{2} < |x_i| < 2$, звідси

$\dfrac{1}{2} < x_i^+ < 2; -2 < |x_i| < -\dfrac{1}{2}$.

Визначимо кількість додатніх і від`ємних коренів. Виписуємо коефіцієнти многочлену $P_3(x): 1;0;-1;1$. Так як число змін знаку $S_1=2$ (нульовий коефіцієнт не враховується), то число додатніх коренів дорівнює 2 або менше на парне число, тобто вони відсутні. Далі виписуємо коефіцієнти многочлену $P_3(-x): -1;0;1;1$. Так як число змін знаку $S_2=1$(нульовий коефіцієнт не враховується), то число від`ємних коренів дорівнює одиниці.

Відділимо корені іншим способом. Для цього перетворимо рівняння до рівносильного вигляду: $x^3 = x-1$ і знайдемо точки перетину графіків $y=x^3 i y=x-1$. В очевидь, корінь рівняння $x_i \in [-2;-1]$.

Перетворимо рівняння $x^3 - x + 1 = 0$ до вигляду: $x=\varphi(x)$. Для цього запишемо його спочатку в формі: $x = x^3 + 1$. Легко показати, що функція $\varphi(x) = x^3 + 1$ не задовольняє умові збіжності, оскільки $\varphi'(x) = 3x^2, \varphi'(-2) = 12 > 1; \varphi'(-1) = 3 > 1$. Тому скористаємося іншими перетвореннями. В результаті отримаємо $x=\sqrt[3]{x-1}$. Можна перевірити, що $|\varphi'(x) < 1|$ на відрізку $[-2;-1]$, тобто достатні умови збіжності виконуються.

2.Задамо початкове наближення $x^{(0)} = -1$. Вирішуємо задачу з різною точністю ε_1 і ε_2.

3.Виконаємо розрахунки за формулою $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}); x^{(k+1)} = \sqrt[3]{x^{(k)} - 1}; k = 0,1,2,...$

Результати розрахунків наведені в таблиці:

k	0	1	2	3	4	5
$x^{(k)}$	-1,000	-1,2599	-1,3123	-1,3223	-1,3243	-1,3246
$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$	-	0,2599	0,0524	0,0100	0,0020	0,0003

Якщо ε_1=0,01, то $x \approx -1{,}3223$, а якщо ε_2=0,001, то $x \approx -1{,}3246$.

<u>Найбільше і найменше значення функції на відрізку</u>

Мініатюрна і доволі проста задача з розряду тих, які є рятувальним кругом студенту, що плаває. Для вирішення практичних завдань необхідно вміти **знаходити похідні** і розуміти материал заняття **Інтервали монотонності і екстремуми функції**.

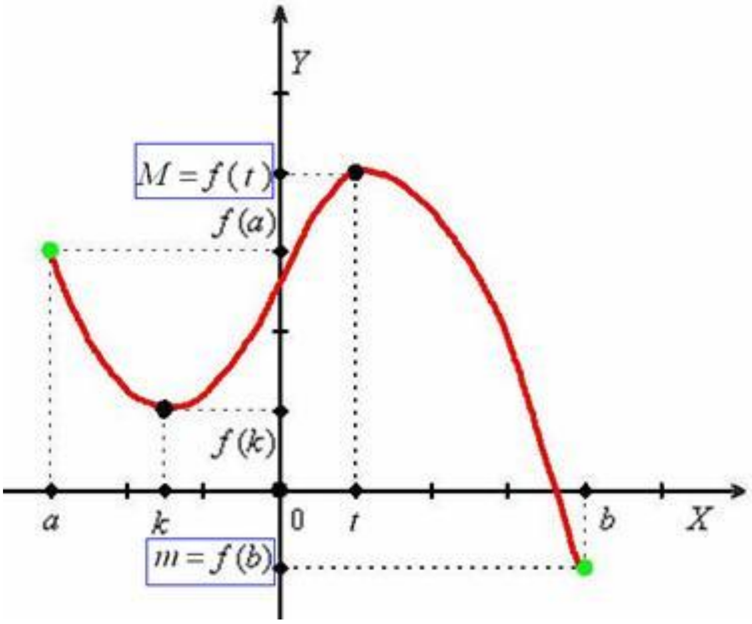
Спочатку короткопр о головне. На занятті про **неперервність функції** я приводила визначення неперервності в точці і неперервності на інтервалі. Еталнно-показова поведінка функції на відрізку формулюється схожим чином. Функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ якщо:

1) вона неперервна на інтервалі $(a;b)$;
2) неперервна в точці a *справа* і в точці b *зліва*.

В другому пункті річ зайшла про так звану *односторонню неперервність* функції в точці. Існує деілька підходів до її визначення, але я буду притримуватися розпочатої раніше стратегії:

Функція $y=f(x)$ неперервна в точці a *справа*, якщо вона визначена в даній точці і її правостороння границя співпадає зі значенням функції в даній точці: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$. Вона ж неперервна в точці b *зліва*, якщо визначена в даній точці і її лівостороння границя дорівнює значенню в цій точці: $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$

Уявіть, що зелені точки – це цвяхи, на яких закріплена чарівна резинка:



Подумки візьмемо червону лінію в руки. В очевидь, що як би далеко ми не розтягували графік вгору і вниз (вздовж вісі OY), функція все одно залишиться *в межах* – згори, і знизу. Таким чином, **неперервна на відрізку функція обмежена на ньому**. В курсі матанализу цей здавалося б простий факт констатується і строго доводиться *першою теоремою Вейерштрасса.* …Багатьох дратує, що в математиці нудно доводяться елементарні твердження, однак в цьому є важливий сенс. Нехай деякий житель махрового середньовіччя витягував графік в небо за межі видимості. До винаходу телескопу обмеженість функції в космосі була зовсім не очевидна! Дійсно, звідки ви знаєте, що на нас чекає за горизонтом? Адже колись і Земля вважалася пласкою, тому сьогодні і телепортація потребує доведення =)

Згідно з другою *теоремою Вейерштрасса*, **неперервна на відрізку $[a;b]$ функція досягає своєї *точної верхньої грані* M і своєї *точної нижньої грані* m**.

Число M також називають **максимальним значенням функції на відрізку** і позначають через $\max\limits_{[a;b]} f(x)$, а число m – **мінімальним значенням функції на відрізку** з приміткою $\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

В нашому випадку:

$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(t) = M$

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b) = m$

***Примітка**: в теорії розповсюджені записи* $\sup\limits_{[a;b]} f(x) = M, \inf\limits_{[a;b]} f(x) = m$.

Грубо кажучи, найбільше значення знаходиться там, де сама висока точка графіку, а найменьше – де сама нижня точка.
Важливо! Як вже загострювалася увага в занятті про **екстремуми функції**, *найбільше значення функції* і *найменьше значення функції* – **НЕ ТЕ Ж САМЕ**, що *максимум функції* і *мінімум функції*. Так, в розглянутому прикладі число $f(k)$ є мінімумом функції, але не мінімальним значенням.

До речі, а що відбувається поза відрізком $[a; b]$? Да хоча б повінь, в контексті розглянутої задачі це нас зовсім не цікавить. **Завдання вимагає лише знаходження двох чисел** $\max\limits_{[a;b]} f(x), \min\limits_{[a;b]} f(x)$ **и все!**
Більш того, вирішення чисто аналітичне, отже, **креслення робити не потрібно**!
Алгоритм лежить на поверхні і напрошується з приведеного рисунку:
1) Знаходимо значення функції в *критичних точках*, **які належать даному відрізку**.
Тут відпадає необхідність перевіряти достатню умову екстремуму, оскільки, як тільки но було доведено, наявність мінімуму або максимуму **ще не гарантує**, що там мінімальне або максимальне значення. Демонстраційна функція досягає максимума $f(t)$ і волею долі це ж число є найбільшим значенням функції на відрізку $[a; b]$. Але, зрозуміло, таке співпадіння має місце далеко не завжди.
Отже, на першому кроці швидше і простіше обчислити значення функції в критичних точках, що належать відрізку, не заморочуючись чи є в них екстремуми чи ні.
2) Обчислюємо значення функції на кінцях відрізку.
3) Серед знайдених в 1-му і 2-му пунктах значень функції обираємо саме маленьке і саме велике число, записуємо відповідь.

<u>Приклад 3</u>

Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 3$ на відрізку $[-1; 2]$

*<u>Розв`язання</u>**:***

1) Обчислимо значення функції в критичних точках, що належать даному відірізку:

$f'(x) = (2x^3 - 12x^2 + 18x + 3)' = 6x^2 - 24x + 18 = 6(x^2 - 4x + 3) = 0$

Отримане **<u>квадратне рівняння</u>** має два дійсних корені:

$x_1 = 1, x_2 = 3$ – критичні точки.

Ще раз підкреслюю, що нас не цікавить, чи є в них максимуми/мінімуми чи ні.

Перша критична точка належить даному відрізку: $x_1 = 1 \in [-1; 2]$

А ось друга – ні: $x_2 = 3 \notin [-1; 2]$, тому про неї одразу забуваємо.

Обчислюємо значення функції в необхідній точці:

$f(x_1) = f(1) = 2 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 + 3 = 2 - 12 + 18 + 3 = \mathbf{11}$

Кінцевий результат я виділила жирним кольором, при оформленні завдання його зручно обвести олівцем або помітити якось інакше.
2) Обчислюємо значення функції на кінцях відрізку:

$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 + 18 \cdot (-1) + 3 = -2 - 12 - 18 + 3 = \mathbf{-29}$

$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 + 3 = 16 - 48 + 36 + 3 = \mathbf{7}$

Результати знову ж таки яким-небудь чином виділяємо.
3) Діло зроблено, серед «жирних» чисел обираємо найбільше і найменше.

Відповідь: $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(1) = 11, \quad \min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(-1) = -29$

Критичне значення $x_1 = 1$ виявилося точкою максимуму, але про це нас ніхто не запитував. Але, для саморозвитку можете усно відмічати такі факти.

Приклад 4

Знайти найбільше і найменше значення функції на заданому відрізку
$f(x) = 3x^4 - 12x^2 + 5, \quad [-2; 1]$

Розв`язання: все знову починається черговою фразою:
1) Обчислимо значення функції в критичних точках, що належать даному відрізку:
$f'(x) = (3x^4 - 12x^2 + 5)' = 3 \cdot 4x^3 - 12 \cdot 2x + 0 = 12x(x^2 - 2) = 0$

Да, критичних точок тут і правда ціла команда:
$x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{2}$

Перші дві точки належать нашому відрізку:
$x_1 = -\sqrt{2} \in [-2; 1]$
$x_2 = 0 \in [-2; 1]$

Але третя виявляється поза грою: $x_3 = \sqrt{2} \notin [-2; 1]$

(сподіваюсь, всі зуміли порахувати $-\sqrt{2} \approx -1{,}41, \quad \sqrt{2} \approx 1{,}41$)
Обчислимо значення функції в підходящих точках:
$f(-\sqrt{2}) = 3 \cdot (-\sqrt{2})^4 - 12 \cdot (-\sqrt{2})^2 + 5 = 12 - 24 + 5 = \mathbf{-7}$
$f(0) = 3 \cdot 0^4 - 12 \cdot 0^2 + 5 = \mathbf{5}$
Щоб не заблукати в трьох соснах, не забуваємо виділяти результати,
2) Обчислимо значення функції на кінцях відрізку:
$f(-2) = 3 \cdot 2^4 - 12 \cdot 2^2 + 5 = 48 - 48 + 5 = \mathbf{5}$
$f(1) = 3 \cdot 1^4 - 12 \cdot 1^2 + 5 = 3 - 12 + 5 = \mathbf{-4}$
Серед «жирних» чисел обираємо найбільше і найменше значення. Максимальне значення («п`ятірка») досягається одразу в двох точках, і це необхідно вказати в кінцевому записі:

Відповідь: $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = f(-2) = f(0) = 5, \quad \min\limits_{[-2;1]} f(x) = f(-\sqrt{2}) = -7$

Час від часу критичні точки можуть співпадати з одним або і з обома кінцями відрізку, і в цьому випадку скорочується другий етап рішення.