Заняття 2

Наближене розв'язування скінченних рівнянь.

Скінченним рівнянням називають рівняння $f(x)=0$, де $f(x)$ - довільна функція.

Коренем(нулем рівняння $f(x)=0$ називають число $x=x_0$

В інженерній практиці часто постає питання про наближений розв`язок рівнянь. Усі методи наближеного розв`язання поділяються на дві групи. До першої належать ті, що дають змогу відділити корінь, до другої – ті, які дають змогу уточнити його, тобто знайти з деякою точністю.

Метод проб (метод відноситься до першої групи)

Розглянемо рівняння $f(x)=0$. Нехай $f(x)$ неперервна на $[a,;b]$, та $f(a)\cdot f(b)<0$, тобто на $[a,;b]$існує $x=x_0$ таке, що $f(x_0)=0$. Розіб`ємо $[a,;b]$на $[a;c]$ та $[c;b]$і вважитимемо, що $f(a)\cdot f(c)<0$, тому $x_0[a;c]$і т.д. Процес проходить доти, поки це можливо, ізолювавши корінь на інтервалі, перейдемо до інших методів.

Приклад 1

Знайти додатні корені рівняння $x\cdot arctgx-1=0$ методом проб з точністю $\delta=0{,}0001$.

Розв`язання: Методом проб виділимо $[a:b]$, на якому знаходиться корінь рівняння.

$$f'(x)=arctgx+\frac{x}{1+x^2};\ f''(x)-\frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

$$f(1)\cdot f(\sqrt{3})=\left(\frac{\pi}{4}-1\right)\cdot\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-1\right)=0{,}2146\cdot 0{,}8138<0.$$

Умови а) і б) виконуються, якщо $f''(x)>0,$ то $\chi\in\left[1;\sqrt{3}\right]; m\le f'(x)\le M$, де

$m=f'(1)=1{,}2853981\quad M=f'(\sqrt{3})-1{,}4802102;$

$$\frac{M-m}{m}=0{,}1515547.$$

Визначимо: $x_1=1-\dfrac{(\sqrt{3}-1)\cdot f(1)}{f(\sqrt{3})-f(1)}=1{,}1527608;$

$f(1)\cdot f(1{,}1527608)>0,\quad f(\sqrt{3})\cdot f(1{,}1527608)<0, x_2\in\left[x_1;\sqrt{3}\right).$

Зведемо обчислення в таблицю:

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$-(x_n,x_{n-1})$	x_n	$\frac{M-m}{m}(x_n-x_{n-1})$
1	1	-0,2146019	-0,1527608	1,1527068	0,023152
2	1,527608	-0,0129601	0,0090807	1,1618415	0,0013762
3	1,618415	-0,0006758	-0,000473	1,1623145	0,0000716

Остання графа таблиці характеризує граничну абсолютну похибку, тому x=1,1623$\pm$0,0001.

Приклад 2-Визначити корені нелінійного рівняння аналітично і поточнити один з них методом проб з точністю до 0,01 $3x^4-8x^3-18x^2+2=0$.

Розв`язання: Позначимо $f(x)=3x^4-8x^3-18x^2+2$. Знаходимо похідну $f'(x)=12x^3-24x^2-36x$. Обчислимо корені похідної:

$12x(x^2-2x-3)=0$

$12x(x+1)(x-3)=0$

$x_1=0; x_2=-1; x_3=3$

Складемо таблицю знаків функції $f(x)$, виходячи з того, що x дорівнює а) критичним значенням функції (кореням похідної) або близьким до них; б) граничним значенням (виходячи з області допустимих значень невідомого).

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
$f(x)$	+	-	+	-	+

Так як відбуваються чотири зміни знаку функції, то рівняння має чотири дійсних корені. Щоб завершити операцію відділення коренів, необхідно зменшити проміжки, що містять корені, так щоб їх довжина була не більшою ніж 1. Для цього складемо нову таблицю.

x	-2	-1	0	1	4	5
$f(x)$	+	-	+	-	-	+

Звідси видно, що корені містяться в наступних проміжках:
$x_1 \in [-2;-1]; x_2 \in [-1;0]; x_3 \in [0;1]; x_4 \in [4;5]$. Поточнимо один з коренів, наприклад $x_1 \in [-2;-1]$ методом проб до сотих. Всі розрахунки зручно проводити, використовуючи наступну таблицю:

n	a_n^+	b_n^-	$x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$3x_n^4$	$-8x_n^3$	$-12x_n^2$	$f(x_n)$
0	-2	-1	-1,5	15,1875	2,7	-40,5	3,6875
1	-1,5	-1	-1,25	7,3242	15,625	-28,’15	-3,17578
2	-1,5	-1,25	-1,38	10,88	21,0245	-34,2792	-0,37441
3	-1,5	-1,38	-1,44	12,899	23,887	-37,3248	1,4625
4	-1,38	-1,44	-1,41	11,85	22,43	-35,79	0,4975
5	-1,38	-1,41	-1,4	11,52	21,95	-35,28	0,1968
6	-1,38	-1,4	-1,39	11,2	21,5	-34,8	-0,0938

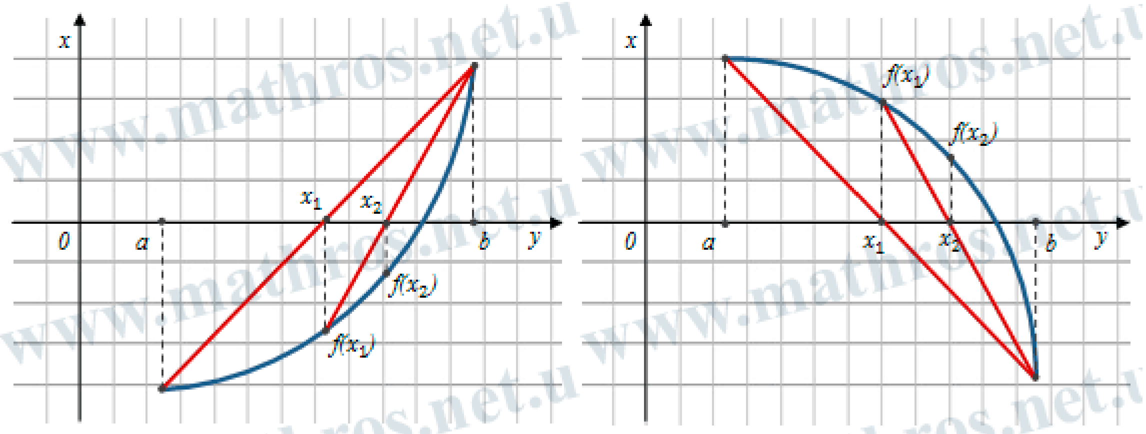
Відповідь: $x_1 \approx -1{,}39$

Метод хорд

Алгоритм Ньютона-Рафсона, при знаходженні **рішення нелінійного рівняння**, вимагає обчислення функції та її похідної на кожній ітерації. Якщо вони є складними виразами, то знадобиться чимало зусиль, щоб зробити ручні обчислення або велика кількість процесорного часу для машинних розрахунків. Проте, якщо в методі дотичних похідну замінити її дискретним аналогом — розділеною різницею першого порядку, то, таким чином, можна значно зменшити його обчислювальні витрати. Саме така ідея і закладена у розглядуваному в даному параграфі методі, який носить назву **метод хорд**. У літературі він також зустрічається під **методом січних**. Це звязано з тим, що процес заміни похідної розділеною різницею рівносильний заміні дотичної на січну.

Отже, нехай задано **нелінійне рівняння** $f(x)=0$, де $f(x)$на відрізку $[a;b]$має неперервні похідні першого і другого порядків, які зберігають сталі знаки на цьому відрізку. Тоді, ідея **методу хорд** полягає в тому, що на достатньо малому відрізку $[a;b]$ дугу кривої замінюють хордою і за наближений **розв'язок нелінійного рівняння** береться точка перетину даної хорди з віссю абсцис.

Виведемо розрахункові формули методу, і для початку, розглянемо випадок, коли перша і друга похідні мають однакові знаки, тобто $f'(x)\cdot f''(x)>0$:



Отже, $A(a,f(a))$ і $B(b,f(b))$ що рівняння хорди — це **рівняння прямої, що проходить через дві точки** і , то, на першому кроці, запишемо рівняння даної прямої:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{x-b} \quad (1)$$

Нехай x_1 — точка перетину хорди з віссю OX. Тоді, виходячи з того, що $y=0$, отримаємо:

$$x_1=a-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f(a) \quad (2)$$

де x_1 — наближене значення до шуканого кореня. Якщо значення x_1 нас не влаштовує, то його можна покращити застосувавши **метод хорд** до відрізка $[x_1;b]$. Для цього, з'єднаємо точку $A_1(x_1,f(x_1))$ з точкою $B(b,f(b))$ і знайдемо x_2 — точку перетину хорди A_1B з віссю OX:

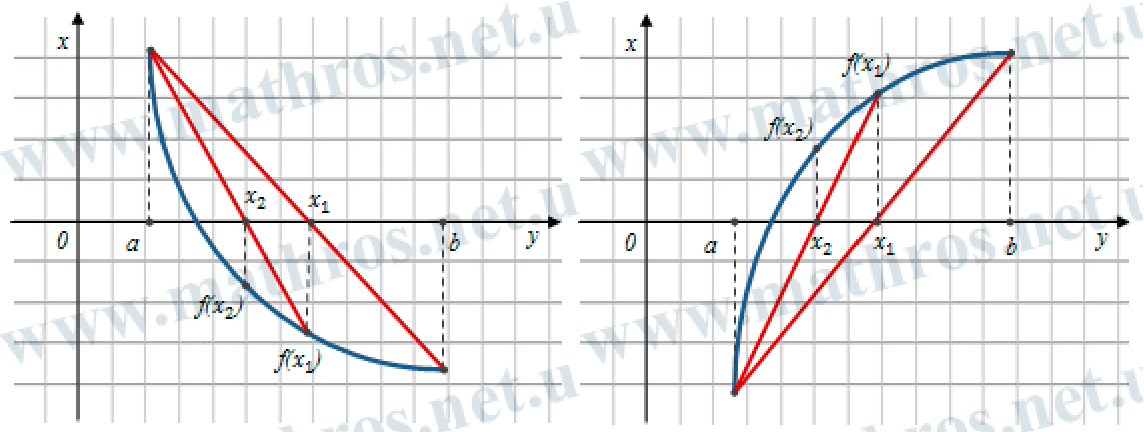
$$x_2=x_1-\frac{b-x_1}{f(b)-f(x_1)}\cdot f(x_1) \quad (3)$$

Продовжуючи аналогічні дії далі, отримаємо послідовність значень $x_0,x_1,x_2,x_3,\dots$, яка збігається до точного **розв'язку рівняння** $f(x)=0$.

Зазначимо, що, у загальному вигляді, розрахункова **формула методу хорд** для випадку, коли $f'(x)\cdot f''(x)>0$ матиме наступний вигляд:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{b-x_i}{f(b)-f(x_i)}\cdot f(x_i) \quad (4)$$

Якщо перша і друга похідні мають різні знаки, тобто $f'(x)\cdot f''(x)<0$, то всі наближення до кореня відшукуються з боку правої межі відрізка $[a;b]$:



і обчислюються за формулою:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{x_i-a}{f(x_i)-f(a)}\cdot f(x_i) \quad (5)$$

Тобто, вид рекурентної формули залежить від того, яка з точок a або b є нерухомою. А нерухомим являється той кінець відрізка $[a;b]$, для якого знак функції $f(x)$ збігається зі знаком її другої похідної. Тоді другий кінець відрізка можна прийняти за початкове наближення до кореня, тобто точку x_0.

Ітераційний процес **методу січних** продовжується до тих пір, поки не буде виконуватись умова $|x_{i+1} - x_1| < \varepsilon$, тобто поки модуль різниці між двома сусідніми наближеннями не стане меншим за ε (де ε - задана похибка обчислень).

Приклад 3

Використовуючи **метод січних** знайти, з точністю $\varepsilon = 0.01$, **розв'язок нелінійного рівняння** $f(x) = x^3 + x - 5 = 0$на проміжку $[0.5;2]$.
Отже, для початку, визначимо знаки першої та другої похідної в точці $x = 0.5$і встановимо, за якою формулою необхідно виконувати обчислення:

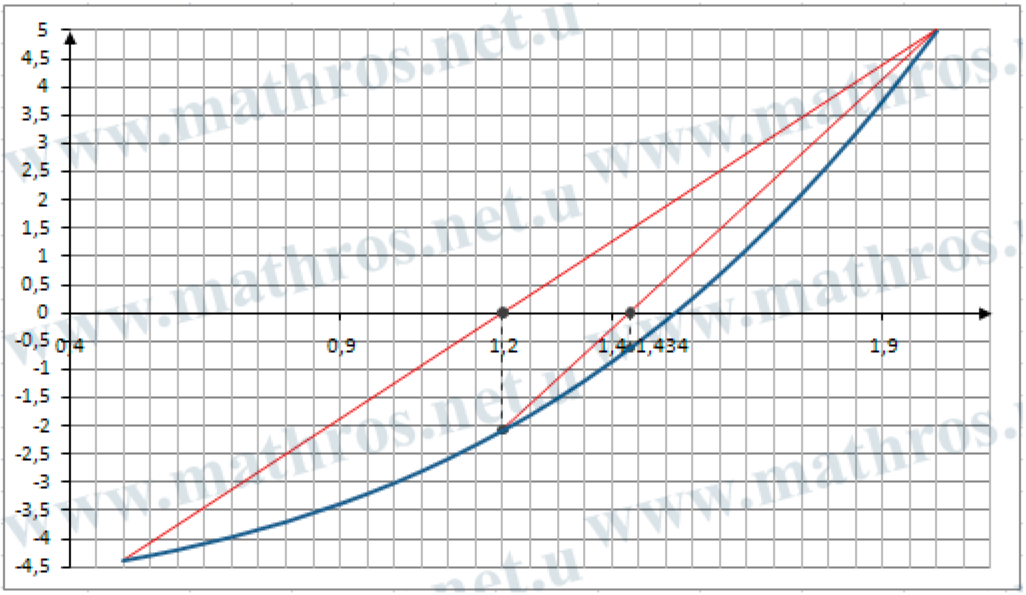
$$f'(x) = 3 \cdot x^2 + 1; \quad f'(0.5) = 1.75 > 0; \quad f''(x) = 6 \cdot x; \quad f''(0.5) = 3 > 0;$$

Виходячи з того, що дані величини приймають однакові знаки, то в якості нерухомої точки вибирається права межа проміжку $[0.5;2]$, тобто $x_0 = 0.5$і обчислення необхідно виконувати за формулою (4). Отже, скориставшись даною формулою, знайдемо перше наближення до шуканого кореня:

$$x_1 = x_0 - \frac{b - x_0}{f(b) - f(x_0)} \cdot f(x_0) = 0.5 - \frac{2 - 0.5}{5 - (-4.375)} \cdot (-4.375) = 1.2; \quad |x_1 - x_0| = |1.2 - 2| = 0.8;$$

Переглянувши отримані результати приходимо до висновку, що для отриманого значення умова зупинки не виконується, тому, підставивши значення першого наближення у формулу (4), переходимо до ітерації номер два. В результаті отримаємо:

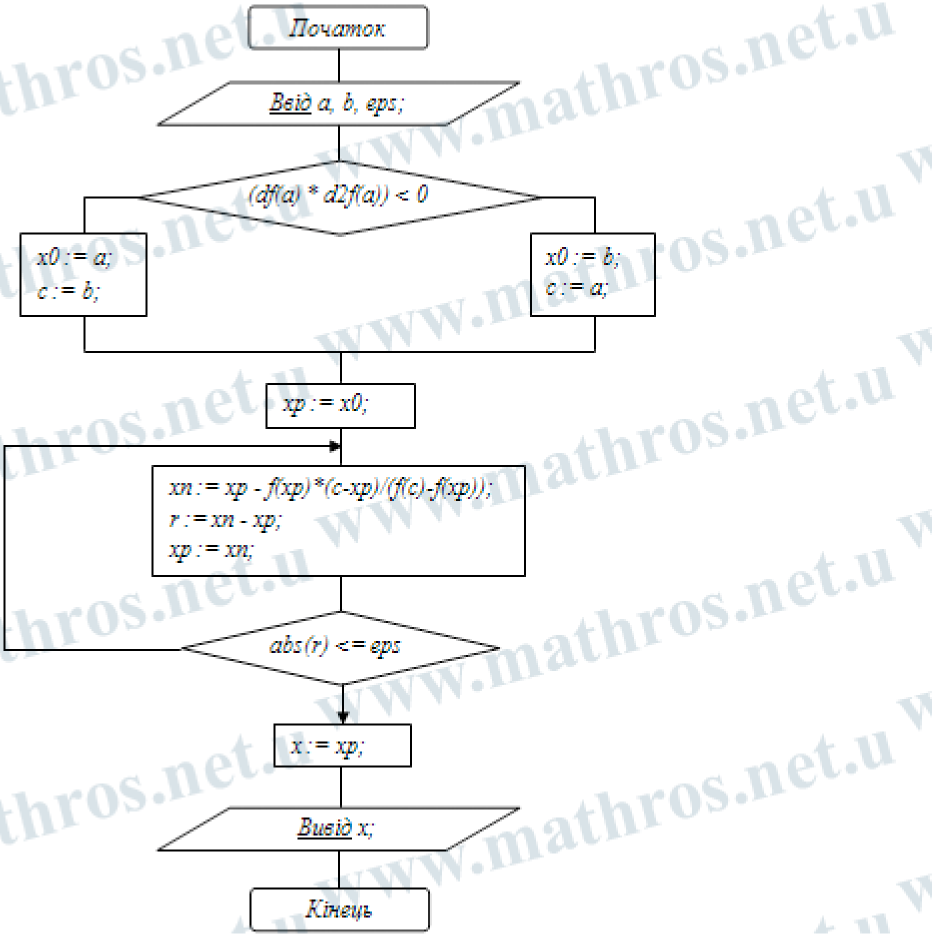
$$x_2 = x_1 - \frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)} \cdot f(x_1) = 1.2 - \frac{2 - 1.2}{5 - (-2.072)} \cdot (-2.072) = 1.434; \quad |x_2 - x_1| = |1.434 - 1.2| = 0.234;$$



Як видно, умова зупинки для другого наближення також не виконується, тому продовжуючи ітераційни процес далі, на п'ятій ітерації отримаємо значення, для якого умова зупинки виконується, і яке приймаємо в якості наближеного **рішення нелінійного рівняння**:

$$x_3 = x_2 - \frac{b - x_2}{f(b) - f(x_2)} \cdot f(x_2) = 1.434 - \frac{2 - 1.434}{5 - (-0.416)} \cdot (-0.416) = 1.496; \quad |x_3 - x_1| = |1.496 - 1.434| = 0.062;$$
$$x_4 = x_3 - \frac{b - x_3}{f(b) - f(x_3)} \cdot f(x_3) = 1.496 - \frac{2 - 1.496}{5 - (-0.156)} \cdot (-0.156) = 1.511; \quad |x_4 - x_3| = |1.511 - 1.496| = 0.015;$$
$$x_5 = x_4 - \frac{b - x_4}{f(b) - f(x_4)} \cdot f(x_4) = 1.511 - \frac{2 - 1.511}{5 - (-0.039)} \cdot (-0.039) = 1.515; \quad |x_5 - x_4| = |1.515 - 1.511| = 0.004;$$

Блок-схема алгоритму знаходження розв'язку нелінійного рівняння методом хорд



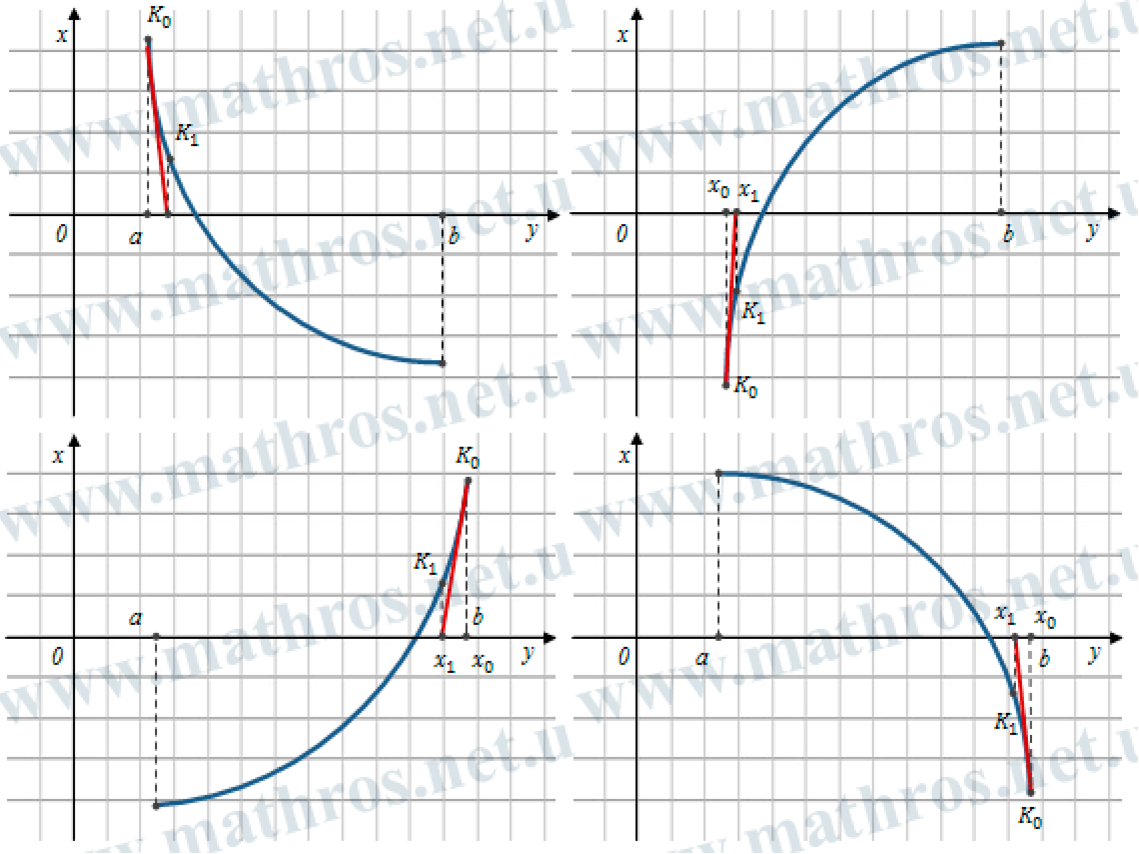
Метод дотичних

Багато проблем в математиці, науці, техніці та бізнесі, в кінцевому підсумку, зводяться до відшукання **коренів нелінійного рівняння**. Сумним є той факт, що більшість з цих математичних рівнянь не можуть бути вирішені аналітично. Ви вже знаєте про формулу для **розв'язку квадратичних поліноміальних рівнянь**. Однак ви можете не знати, що існують формули для **рішення рівнянь** третьої та четвертої степені. На жаль, ці формули настільки громіздкі, що майже ніколи не використовуються. Для рівнянь більш високої степені таких формул взагалі не існує. Крім того, якщо рівняння містять тригонометричні функції, то, в такому випадку, ще простіше знайти рівняння, які не мають аналітичних рішень. Наприклад, наступне просте рівняння не може бути розв'язане, щоб дати формулу для x.

$$f(x) = \sin(x) - \frac{x}{2} = 0;$$

Необхідність **розв'язку нелінійних рівнянь**, які не можуть бути вирішені аналітично, привела до розвитку чисельних методів. Один з найбільш часто використовуваних чисельних методів називається **методом Ньютона**

або **методом Ньютона-Рафсона**. Ідея даного методу відносно проста. Припустимо, що розглядається нелінійне рівняння виду $f(x) = 0$, де $f(x)$— функція неперевна на відрізку $[a;b]$ і має на даному відрізку, відмінні від нуля, похідні першого і другого порядків. Тоді, ідея **методу Ньютона** полягає в тому, що на кожній ітерації графік функції $f(x)$ замінюється дотичною (звідки інша назва цього методу — **метод дотичних**) і точку перетину кожної з цих дотичних з віссю абсцис приймають за чергове наближення до шуканого кореня.



Зазначимо, що перша дотична проводиться через точку $K_0(x_0, y_0)$ — кінець відрізка, для якого виконується умова $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$. В результаті вона перетне вісь OXв деякій точці x_1. Далі, обчислюється значення функції $f(x_1)$ і в знайденій точці знову виконується побудова дотичної. Продовжуючи даний процес далі, отримують послідовність значень $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$, яка збігається до точного **розв'язку рівняння** $f(x)=0$.

Вивдемо розрахункові формули методу для **рішення нелінійного рівняння**. Для цього, на першому кроці, запишемо рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$, яку ми будували в точці $K_0(x_0, y_0)$:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \quad (1)$$

Вона перетнула вісь OX в деякій точці $(x_1; 0)$. Координати отриманої точки будуть задовольняти рівняння даної дотичної:

$$0=f'(x_0)(x_1-x_0)+f(x_0) \quad (2)$$

Звідси, знаходимо перше наближення до шуканого корення $x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$. На наступному кроці, запишемо

рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ в точці $K_1(x_1, y_1=f(x_1))$:

$$y=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1) \quad (3)$$

Зазначимо, що дана дотична також перетинає вісь OX в деякій точці $(x_2; 0)$. Підставляючи координати отриманої точки в рівняння (3), отримуємо $x_2=x_1-f(x_1)/f'(x_1)$. Звідси, приходимо до висновку, що у загальному випадку **формула методу дотичних** матиме вигляд:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (4)$$

Зауваження: *ітераційний процес методу дотичних необхідно продовжувати до тих пір поки модуль різниці між наступним і попереднім наближенням не стане меншим як завгодно малого наперед заданого числа* ε*(* $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$*).*

Приклад 4

Використовуючи **метод Ньютона** знайти, з точністю $\varepsilon = 0.01$, **розв'язок нелінійного рівняння** $f(x) = x^3 + x - 5 = 0$на проміжку $[-2;2]$.

Отже, на першому кроці, визначимо першу та другу похідні заданої функції $f(x) = x^3 + x - 5$:

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 + 1; \quad f''(x) = 6 \cdot x;$$

Після цього, перевіримо виконання умови збіжності на кінцях заданого інтервалу:

$$f(-2) \cdot f''(-2) = -15 \cdot (-12) = 180 > 0; \quad f(2) \cdot f''(2) = 5 \cdot 12 = 60 > 0;$$

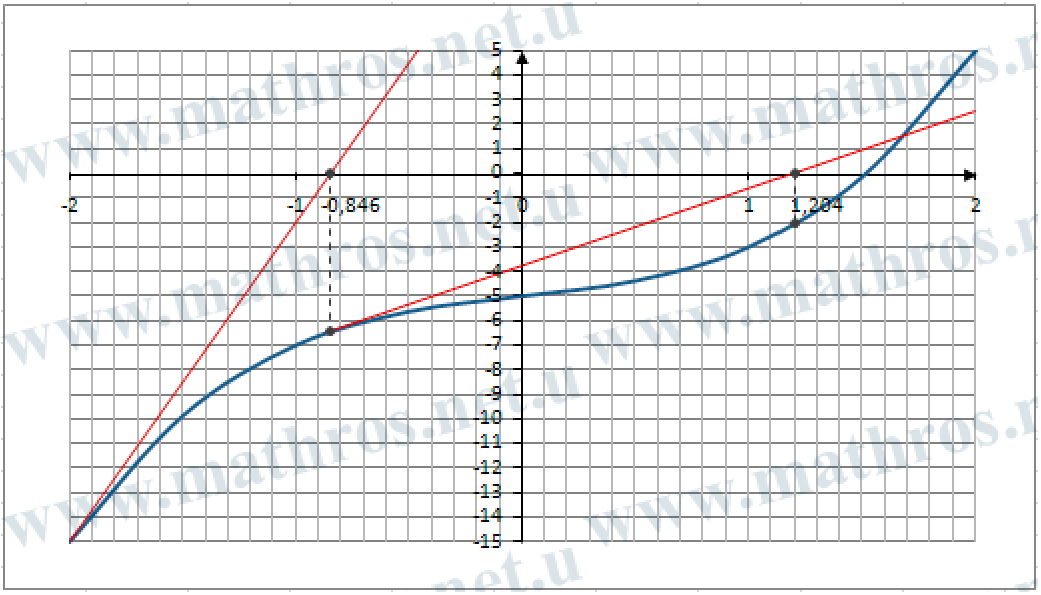
Виходячи з того, що умова збіжності виконується для обох кінців проміжку $[-2;2]$, то в якості початкового наближення візьмемо, наприклад, значення лівого кінця $x_0 = -2$.

Далі, скориставшись формулою (4), знаходимо перше наближення до шуканого кореня:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -2 - \frac{-15}{13} = -2 + 1.154 = -0.846; \quad |x_1 - x_0| = |-0.846 + 2| = 1.154;$$

Зважаючи на те, що для отриманого значення умова зупинки не виконується, переходимо до ітерації номер два, тобто, аналогічним чином підставляємо значення першого наближення у формулу (4), і, таким чином, отримуємо наступне наближення:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0.846 - \frac{-6.452}{3.147} = -0.846 + 2.05 = 1.204; \quad |x_2 - x_1| = |1.204 + 0.846| = 2.05;$$

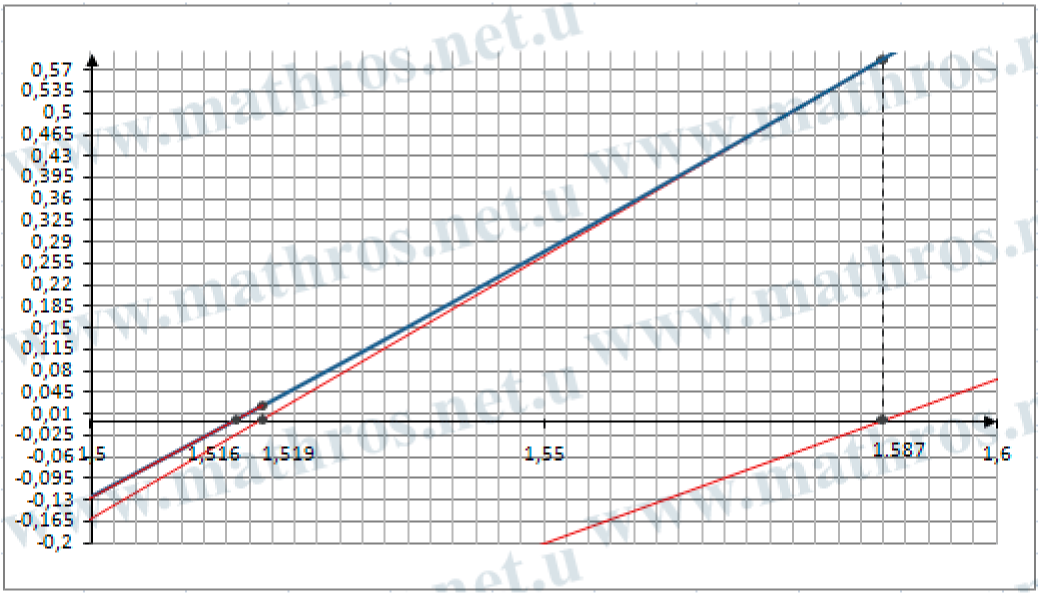


Як видно, умова зупинки для другого наближення також не виконується, тому продовжуючи ітераційний процес **методу Ньютона** далі, на п'ятій ітерації отримаємо значення для якого умова зупинки виконується, і яке приймаємо в якості наближеного **рішення нелінійного рівняння**:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.204 - \frac{-2.051}{5.349} = 1.204 + 0.383 = 1.587; \quad |x_3 - x_2| = |1.587 - 1.204| = 0.383;$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1.587 - \frac{0.584}{8.556} = 1.587 - 0.068 = 1.519; \quad |x_4 - x_3| = |1.519 - 1.587| = 0.068;$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 1.519 - \frac{0.024}{7.922} = 1.519 - 0.003 = 1.516; \quad |x_5 - x_4| = |1.516 - 1.519| = 0.003;$$



Блок-схема алгоритму знаходження розв'язку нелінійного рівняння методом дотичних