**Заняття 18**

**Як обчислити об`єм тіла обертання за допомогою визначеного інтегралу?**

Наряду з **знаходженням площі пласкої фігури за допомогою визначеного інтегралу** важливим додатком теми є обчислення **об`єму тіла обертання**. Матеріал простий, але студент повинен бути підготовленим: необхідно вміти вирішувати **невизначені інтеграли** середньої складності і застосовувати формулу Ньютона-Лейбніца в **визначеному інтегралі**. Як і для задачі знаходження площі, потрібні впевнені навички побудови креслень – це майже саме важливе (оскільки інтеграли самі по собі частіше будуть легкими). Засвоїти грамотну и швидку техніку побудови графіків можна за допомогою методичних матеріалів **Графіки і властивості Елементарних функцій** і Геометричне перетворення графіків.
Взагалі в інтегральному численні дуже багато цікавих додатків, за допомогою визначеного інтегралу можна обчислити площу фігури, об`єм тіла обертання, довжину дуги, площу поверхні обертання і багато іншого. Тому буде весело, будь ласка, налаштуйтесь, на оптимістичний лад!

Представте деяку пласку фігуру на координатній площині. Представили? ... Цікаво, хто що представив… =))) Її площу ми вже знаходили. Але, крім того, дану фігуру можна ще і обертати, причому обертати двома способами:

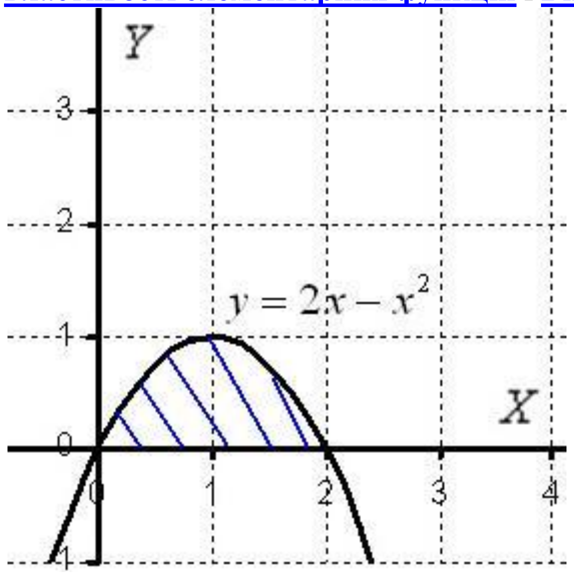
**– навколо вісі абсцис** $OX$ **;**
**– навколо вісі ординат** $OY$ **.**

В даній презентації будуть розібрані обидва випадки. Особливо цікавим є другий спосіб обертання, він викликає найбільші складнощі, але рішення практично таке ж, як і в більш розповсюдженому обертанні навколо вісі абсцис. В якості бонусу я повернуся до **задачі знаходження площі фігури**, і розповім вам, як знаходити площу другим способом – по вісі $OY$. Почнемо з найбільш популярного різновиду обертання.

**Обчислення об`єму тіла, що утворилося обертанням пласкої фігури навколо вісі** $OX$
**Приклад 1**

Обчислити об`єм тіла, що утворилося обертанням фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ навколо вісі $OX$.

**Рішення**: Як і в задачі на знаходження площі, **рішення починається з рисунку пласкої фігури**. Тобто, на площині $XOY$ необхідно побудувати фігуру, обмежену лініями $y = 2x - x^2$, $y = 0$, при цьому не забуваємо, що рівняння $y = 0$ задає вісь $OX$. Як раціональніше і швидше виконати рисунок, можна дізнатися на сторінках **Графіки і властивості елементарних функцій** і **Визначений інтеграл. Як обчислити площу фігури**.



Шукана плаcка фігура заштрихована синім кольором, саме вона і обертається навколо вісі $OX$ В результаті обертання виходить така дещо яйцеподібна літаюча тарілка, яка симетрична відносно вісі $OX$. Річ в тому, що у тіла є математична назва, але в довіднику щось з`ясовувати лінь, тому їдемо далі.

**Як обчислити об`єм тіла обертання?**

**Об`єм тіла обертання можна обчислити за формулою**:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

В формулі перед інтегралом обов`язково присутнє число $\pi$. Так повелося – все, що в житті обертається, пов`язано з цією константою.

Як розставити границі інтегрування «а» і «бе», думаю, легко здогадатися з виконаного рисунку.

Функція $f(x)$ … що це за функція? Давайте подивимось на рисунок. Пласка фігура обмежена графіком параболи $f(x) = 2x - x^2$ зверху. Це і є та функція, яка і розуміється в формулі.

В практичних завданнях пласка фігура іноді може розташовуватися і нижче вісі $OX$. Це нічого не змінює – підінтегральна функція в формулі підноситься до квадрату: $f^2(x)$, таким чином **інтеграл завжди невід`ємний**, що логічно.

Обчислюємо об`єм тіла обертання, застосовуючи дану формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left( \frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^2 = \pi \cdot \left( \frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0 \right) = \frac{16\pi}{15}$$

Як я вже зазначала, інтеграл майже завжди виходить простим, головне, бути уважним.

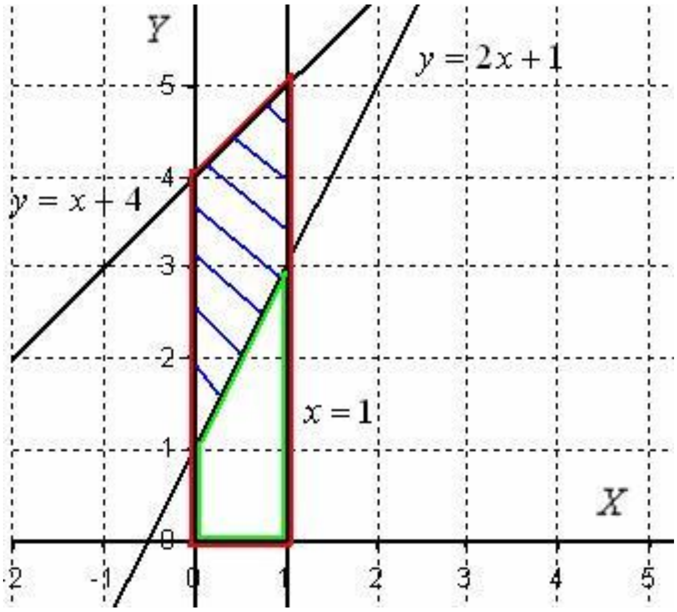
**Відповідь**: $V = \frac{16\pi}{15}\, ед^3. \approx 3{,}35\, ед^3.$

У відповіді треба обов`язково зазначити розмірність – кубічні одиниці $ед^3$. Тобто, в нашому тілі обертання приблизно 3,35 «кубиків». Чому саме кубічні *одиниці*? Тому що найбільш універсальне формулювання. Можуть бути кубічні сантиметри, можуть бути кубічні метри, можуть бути кубічні кілометри і т.д.

**Приклад 2**

Обчислити об`єм тіла, отриманого при обертанні навкруги вісі абсцис фігури, що обмежена лініями $y = 2x + 1$, $y = x + 4$, $x = 0$ и $x = 1$

**Рішення**: Зобразимо на рисунку пласку фігуру, обмежену лініями $y = 2x + 1$, $y = x + 4$, $x = 0$, $x = 1$, не забуваючи при цьому, що рівняння $x = 0$ задає вісь $OY$:




Шукана фігура заштрихована синім кольором. При її обертанні навколо вісі $OX$ виходить такий сюрреалістичний бублик з чотирма кутами.
Об`єм тіла обертання обчислимо як *різницю об``ємів тіл*.
Спочатку розглянемо фігуру, яка обведена червоним кольором. При її обертанні навколо вісі $OX$ виходить усічений конус. Позначимо об`єм цього усіченого конуса через $V_1$.
Розглянемо фігуру, яка обведена зеленим кольором. Якщо обертати дану фігуру навколо вісі $OX$, то виходить теж усічений конус, тільки трохи менший. Позначимо його об`єм через $V_2$.
І, вочевидь, різниця об`ємів $V = V_1 - V_2$ – в точності об`єм нашого «бублику».
Використовуємо стандартну формулу для знаходження об`єму тіла обертання:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

1) Фігура, обведена червоним кольором обмежена зверху прямою $y = x + 4$, тому:

$$V_1 = \pi \int_0^1 (x+4)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 8x + 16)dx = \pi \left( \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 16x \right)\Big|_0^1 = \pi \left( \frac{1}{3} + 4 + 16 \right) = \frac{61\pi}{3}$$

2) Фігура, обведена зеленим кольором обмежена зверху прямою $y = 2x + 1$, тому:

$$V_2 = \pi \int_0^1 (2x+1)^2 dx = \pi \int_0^1 (4x^2 + 4x + 1)dx = \pi \left( \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x \right)\Big|_0^1 = \pi \left( \frac{4}{3} + 2 + 1 \right) = \frac{13\pi}{3}$$

3) Об`єм шуканого тіла обертання: $V = V_1 - V_2 = \frac{61\pi}{3} - \frac{13\pi}{3} = \frac{48\pi}{3} = 16\pi$

**Відповідь**: $V = 16\pi\ од.^3 \approx 50{,}3\ од^3.$

Цікаво, що в даному випадку рішення можна перевірити, використовуючи шкільну формулу для обчислення об`єму усіченого конусу.
Саме рішення частіше оформлюють коротше, приблизно так:

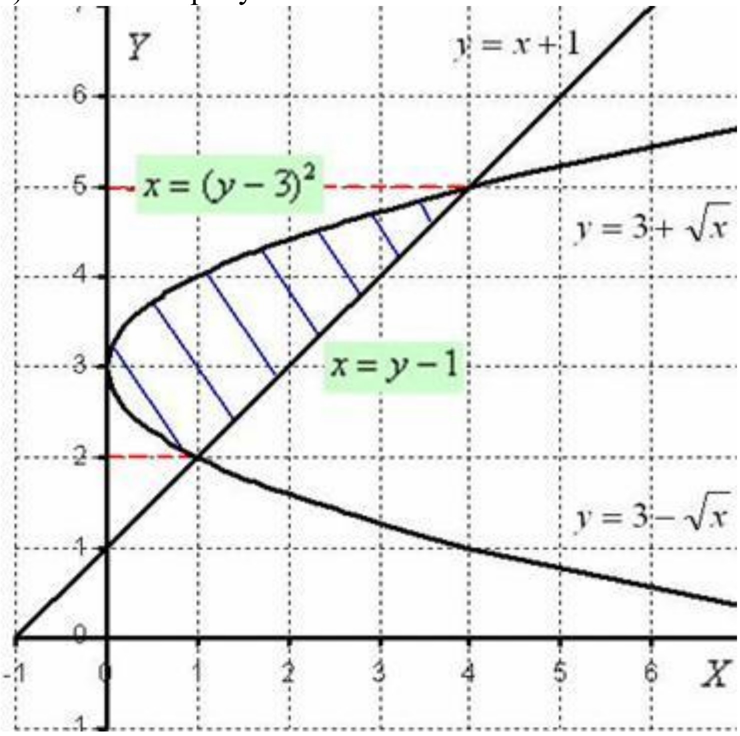
$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 (x+4)^2 dx - \pi \int_0^1 (2x+1)^2 dx = \ldots$$

**Обчислення об`єму тіла, що утворилося обертанням плаской фігури навколо вісі $OY$**

Другий параграф буде ще цікавішим, ніж перший. Завдання на обчислення об`єму тіла обертання навколо вісі ординат – теж достатньо частий гість в контрольних роботах. Попутно буде розглянута [задача про знаходження площі фігури](задача про знаходження площі фігури) другим способом – інтегруванням по вісі $OY$, це дозволить вам не тільки покращати свої навички, але і навчить знаходити найбільш вигідний шлях рішення.

**Приклад 3**

Дана пласка фігура, обмежена лініями $y = 3+\sqrt{x}$, $y = 3-\sqrt{x}$, $y = x+1$.
1) Знайти площу пласкої фігури, обмеженої даними лініями.
2) Знайти об`єм тіла, отриманого обертанням пласкої фігури, обмеженої даними лініями, навколо вісі $OY$.
**Увагв!** Отже якщо ви хочете ознайомитися тільки з другим пунктом, спочатку обов`язково прочитайте перший!
**Рішення**: Задача складається з двох частин. Почнемо з площі.
1) Виконаємо рисунок:




Легко помітити, що функція $y = 3+\sqrt{x}$ задає верхню гілку параболи, а функція $y = 3-\sqrt{x}$ – нижню гілку параболи. Перед нами тривіальна парабола, яка «лежить на боку».
Необхідна фігура, площу якої треба знайти, заштрихована синім кольором.
Як знайти площу фігури? Її можна знайти «звичайним» способом, який розглядався в презентації **Визначений інтеграл. Як обчислити площу фігури**. Причому, площа фігури знаходиться як сума площин:
– на відрізку $[0;1]$ $3+\sqrt{x} \geq 3-\sqrt{x}$;
– на відрізку $[1;4]$ $3+\sqrt{x} \geq x+1$.

Тому:
$$S = \int_0^1 (3+\sqrt{x}-(3-\sqrt{x}))dx + \int_1^4 (3+\sqrt{x}-(x+1))dx$$

Чим в даному випадку поганий звичайний шлях рішення? По-перше, виходять два інтеграли. По-друге, під інтегралами корені, а корені в інтегралах – не подарунок, до того ж можна заплутатися в підстановці границь інтегрування. Насправді, інтеграли, звісно, не убивчі, але на практиці все буває значно сумніше, просто я підібрала для задачі функції «кращі».
Є більш раціональний шлях рішення: він полягає в переході до зворотних функцій і інтегрування по вісі $OY$.
Як перейти до зворотних функцій? Грубо кажучи, треба виразити «ікс» через «ігрек».
Спочатку розберемося з параболою:
$$y = 3+\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = y-3 \Rightarrow x = (y-3)^2$$
Цього достатньо, але впевнимося, що таку ж функцію можна вивести з нижньої гілки:
$$y = 3-\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = 3-y \Rightarrow x = (3-y)^2 \Rightarrow x = (y-3)^2$$

Для самоперевірки рекомендую усно або на чорнетці підставити координати 2-3 точок параболи в рівняння $x=(y-3)^2$, вони обов`язково повинні задовольняти даному рівнянню.
З прямою все простіше: $y=x+1 \Rightarrow x=y-1$
Тепер дивимось на вісь $OY$: будь ласка, періодично нахиляйте голову вправо на 90 градусів в ході пояснення (це не прикол!). Необхідна нам фігура лежить на відрізку $[2;5]$, який позначений червоним пунктиром. При цьому на відрізку $[2;5]$ пряма $x=y-1$ розташована вище параболи $x=(y-3)^2$, а значить, площу фігури слід шукати за вже знайомою вам формулою: $S=\int\limits_a^b (f(y)-g(y))dy$. Що змінилося в формулі? Тільки літера, і не більше того.
***! Примітка**: границі інтегрування по вісі $OY$ слід розставляти **строго знизу вверх**!*
Знаходимо площу:
На відрізку $[2;5]$ $y-1 \ge (y-3)^2$, тому:

$$S=\int\limits_2^5 (y-1-(y-3)^2)dy=\int\limits_2^5 (y-1)dy-\int\limits_2^5 (y-3)^2 dy=$$

$$=\frac{1}{2}(y-1)^2\Big|_2^5-\frac{1}{3}(y-3)^3\Big|_2^5=\frac{1}{2}(16-1)-\frac{1}{3}(8-(-1))=\frac{15}{2}-3=4\frac{1}{2}$$

Зверніть увагу, як я виконала інтегрування, це самий раціональний спосіб, і в наступному пункті завдання буде зрозуміло – чому.
Для студентів, що сумніваються в корректності інтегрування, знайду похідні:

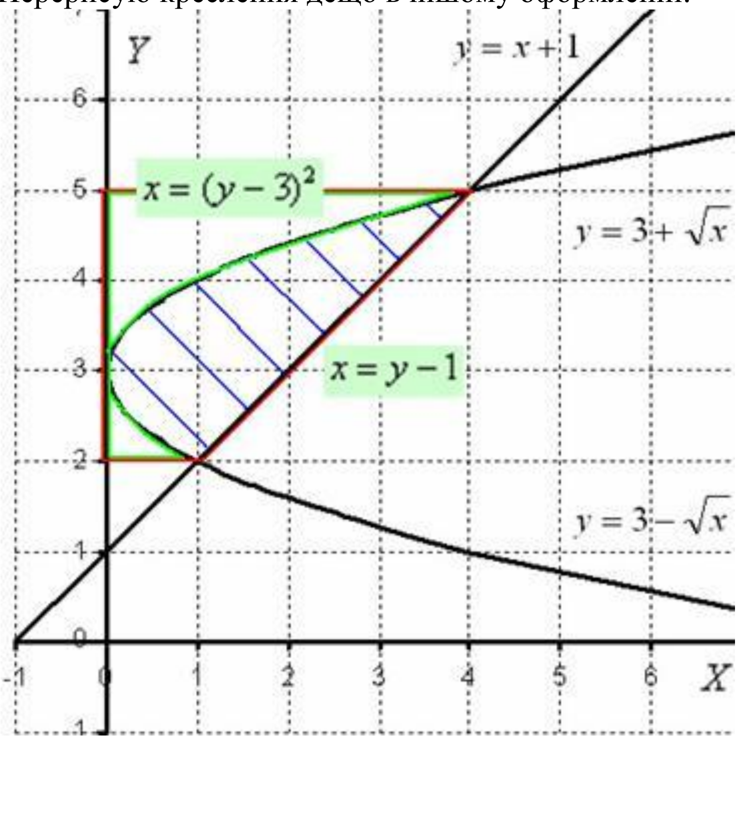
$$\left(\frac{1}{2}(y-1)^2-\frac{1}{3}(y-3)^3\right)'=\frac{1}{2}\cdot 2(y-1)\cdot(y-1)'-\frac{1}{3}\cdot 3(y-3)^2\cdot(y-1)'=$$

$$=(y-1)\cdot(1-0)-(y-3)^2\cdot(1-0)=(y-1)-(y-3)^2$$

Отримана вхідна підінтегральна функція, значить інтегрування виконано правильно.

**Відповідь**: $S=4\frac{1}{2}\,од^2.$

2) Обчислимо об`єм тіла, утвореного обертанням даної фігури, навколо вісі $OY$.
Перерисую креслення дещо в іншому оформленні:



Отже, фігура, заштрихована синім кольором, обертається навколо вісі $OY$. В результаті виходить «метелик, що завис», яка крутиться навколо своєї вісі.

Для знаходження об`єму тіла обертання будемо інтегрувати по вісі $OY$. Спочатку треба перейти до зворотних функцій. Це вже зроблено і ретельно розписано в попередньому пункті.

Тепер знову нахиляємо голову вправо і вивчаємо нашу фігуру. Вочевидь, що об`єм тіла обертання, слід знайти як різницю об`ємів.

Обертаємо фігуру, обведену червоним кольором, навколо вісі $OY$, в результаті отримуємо усічений конус. Позначимо цей об`єм через $V_1$.

Обертаємо фігуру, обведену зеленим кольором, навколо вісі $OY$ і позначаємо через $V_2$ об`єм отриманого тіла обертання.

Об`єм нашого метелика дорівнює різниці об`ємів $V = V_1 - V_2$.

Використовуємо формулу для знаходження об`єму тіла обертання:

$$V = \pi\int_a^b f^2(y)dy$$

В чому відмінність від формули попереднього параграфу? Тільки в літері.

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_2^5 (y-1)^2 dy - \pi\int_2^5 ((y-3)^2)^2 dy = \pi\int_2^5 (y-1)^2 dy - \pi\int_2^5 (y-3)^4 dy =$$

$$= \frac{\pi}{3}(y-1)^3\Big|_2^5 - \frac{\pi}{5}(y-3)^5\Big|_2^5 = \frac{\pi}{3}(64-1) - \frac{\pi}{5}(32-(-1)) = 21\pi - \frac{33\pi}{5} = \frac{72\pi}{5}$$

А ось і перевага інтегрування, про яке я недавно говорила, легше знайти

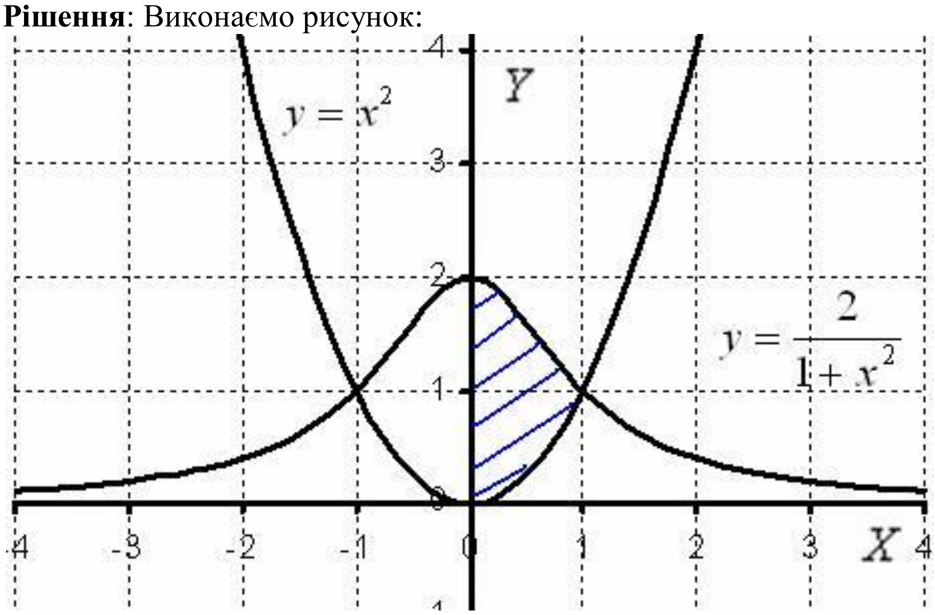
$\int (y-3)^4 dy = \frac{1}{5}(y-3)^5$, чим попередньо підносити підінтегральну функцію в 4-у степінь.

**Відповідь:** $V = \frac{72\pi}{5}$ $ед.^3 \approx 45{,}24\, ед^3$.

**<u>Приклад 4</u>**

Обчислити об`єм тіла, отриманого обертанням навколо вісі $OY$ фігури, обмеженої кривими $y = \frac{2}{1+x^2}$ и $y = x^2$.

**Рішення**: Виконаємо рисунок:




Попутно знайомимося з графіками деяких інших функцій. Такий ось цікавий графік парної функції $y = \frac{2}{1+x^2}$ ….

Для цілі знаходження об`єму тіла обертання достатньо використати правую половину фігури, яку я заштрихувала синім кольором. Обидві функції є парними, їх графіки симетричні відносно вісі $OY$, симетрична і наша фігура. Таким чином, заштрихована права частина, що обертається навколо вісі $OY$, все одно співпаде з лівою нештрихованою частиною.
Перейдемо до зворотних функцій, тобто, виразимо «ікси» через «ігреки»:

$$y = \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow 1 + x^2 = \frac{2}{y} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{y} - 1}$$

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

Зверніть увагу, що правій гілці параболи $y = x^2$ відповідає зворотна функція $x = \sqrt{y}$. Лівій невикористаній гілці параболи відповідає зворотна функція $x = -\sqrt{y}$. В таких випадках нерідко виникають сумніви, яку ж функцію обрати? Сумніви легко, розвіюються, візьміть будь-яку точку правої гілки і підставте її координати в функцію $x = \sqrt{y}$. Координати підійшли, значить, функція $x = \sqrt{y}$ задає саме правую гілку, а не ліву.

До речі, та ж історія і з функцією $y = \frac{2}{1+x^2}$. Чайнику, не завжди буває одразу зрозуміло, яку зворотну функцію обрати: $x = \sqrt{\frac{2}{y} - 1}$ або $x = -\sqrt{\frac{2}{y} - 1}$. В дійсності я і сама завжди страхуюся, підставляючи в знайдену зворотну функцію пару точок графіку.
Тепер нахиляємо голову вправо і помічаємо наступну річ:
– на відрізку $[0;1]$ над віссю $OY$ розташований графік функції $x = \sqrt{y}$;
– на відрізку $[1;2]$ над віссю $OY$ розташований графік функції $x = \sqrt{\frac{2}{y} - 1}$;
Логічно передбачити, що об`єм тіла обертання треба шукати ве як суму об`ємів тіл обертання!
Застосовуємо формулу:

$$V = \pi \int_a^b f^2(y)dy$$

В даному випадку:

$$V = V_1 + V_2 = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy + \pi \int_1^2 \left( \sqrt{\frac{2}{y} - 1} \right)^2 dy = \pi \int_0^1 y dy + \pi \int_1^2 \left( \frac{2}{y} - 1 \right) dy =$$

$$= \frac{\pi}{2}(y^2)\Big|_0^1 + \pi(2\ln y - y)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}(1-0) + \pi(2\ln 2 - 2 - 0 + 1) = \frac{\pi}{2} + \pi(2\ln 2 - 1) = \pi\left(2\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$$

**Відповідь**: $V = \pi\left(2\ln 2 - \frac{1}{2}\right) \text{ ед.}^3 \approx 2{,}78 \text{ ед.}^3$

В **задачі знаходження площі фігури** додавання площ використовується часто, а додавання об`ємів тіл обертання,рідкість, раз такий різновид майже не випав з мого поля зору. Все-таки добре, що своєчасно підвернувся розглянутий приклад – вдалося витягти немало корисного.
Окрім всього перерахованого, іноді лінії можуть бути задані параметрично, і **такі задачі** теж розглянуті!
І на останок: як знайти об`єм тіла, якщо воно **не є** тілом обертання? Застосовуємо **загальний принцип інтегрування**.