Заняття 17

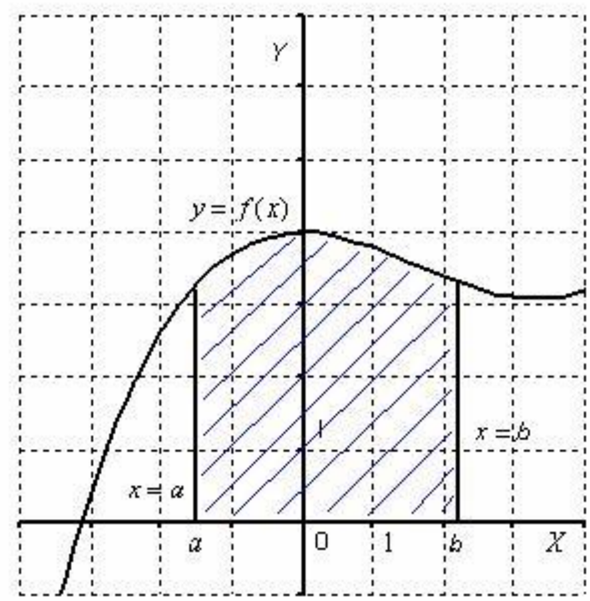
Визначений інтеграл. Як обчислити площу фігури

В цій презентації ми розберемо типову і найбільш розповсюджену задачу **– як за допомогою визначеного інтегралу обчислити площу пласкої фігури**. Для успішного засвоєння матеріалу, необхідно:
1) Розбиратися в невизначених інтегралах хоча б на середньому рівні. Таким чином, чайникам для початку слід ознайомитися з презентацією **Невизначений інтеграл. Приклади рішень**.
2) Вміти застосовувати формулу Ньютона-Лейбніца і обчислювати визначений інтеграл. Налагодити теплі дружні стосунки з визначеними інтегралами можна в презентації **Визначений інтеграл. Приклади рішень**.

В дійсності, для того щоб знаходити площу фігури не треба так вже багато знань з невизначеного і визначеного інтегралу. **Завдання «обчислити площу за допомогою визначеного інтегралу» завжди передбачає побудову креслення (рисунку)**, тому більш актуальним питанням будуть ваші знання і навички побудови рисунку. В зв`язку з цим корисно освіжити в пам`яті графіки основних елементарних функцій, а, як мінімум, вміти будувати пряму, параболу і гіперболу. Із задачею знаходження площі за допомогою визначеного інтегралу всі знайомі ще зі школи, і ми мало підемо вперед від шкільної програми.

Матеріали даного практикуму викладені просто, ретельно і з мінімумом теорії.
Почнемо з криволінійної трапеції.

Криволінійною трапецією називається пласка фігура, що обмежена віссю OX, прямими $x = a$, $x = b$ і графіком неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $y = f(x)$, яка не змінює знак на цьому проміжку. Нехай дана фігура розташована *не нижче* ніж вісь абсцис:



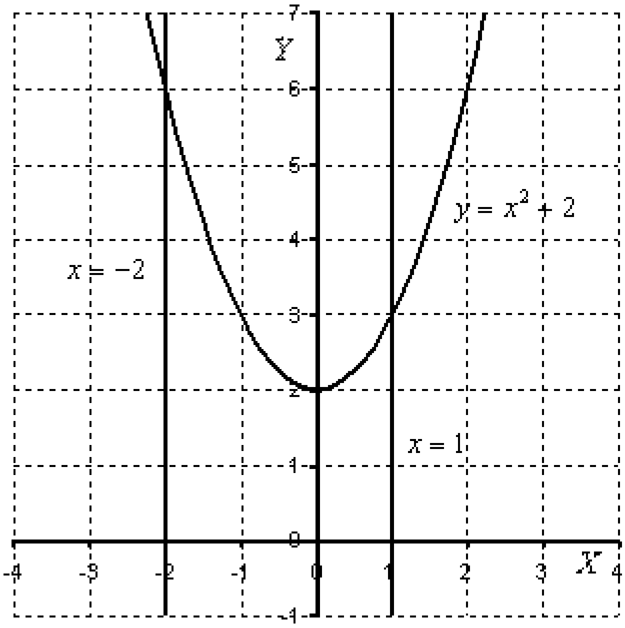
Тоді **площа криволінійної трапеції чисельно дорівнює визначеному інтегралу** $\int_a^b f(x)dx$.
У будь-якого визначеного інтегралу (який існує) є дуже добрий геометричний сенс. В презентації **Визначений інтеграл. Приклади рішень** я говорила, що визначений інтеграл – це число. А зараз прийшов час констатувати ще один корисний факт. З **точки зору геометрії визначений інтеграл – це ПЛОЩА**.

Тобто, визначеному **інтегралу (якщо він існує) геометрично відповідає площа деякої**

фігури. Наприклад, розглянемо визначений інтеграл $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{x}+1}$. Підінтегральна функція $y=\frac{x}{\sqrt{x}+1}$ задає на площині криву, що розташована вище вісі OX (бажаючі можуть виконати креслення), а сам визначений інтеграл $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{x}+1}$ чисельно дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції.

Приклад 1

Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y=x^2+2$, $y=0$, $x=-2$, $x=1$.
Це типове формулювання завдання. **Перший і найважливіший момент рішення – побудова рисунку**. Причому, рисунок необхідно побудувати **ПРАВИЛЬНО**.
При побудові рисунку я рекомендую наступний порядок: **спочатку** краще побудувати всі прямі (якщо вони є) і тільки **потім** – параболи, гіперболи, графіки інших функцій. Графіки функцій вигідніше будувати **поточкові**.
В даній задачі вирішення може виглядати так.
Виконаємо рисунок (зверніть увагу, що рівняння $y=0$ задає вісь OX):



Штрихувати криволінійну трапецію я не буду, тут очевидно,про яку площу йде мова.
Рішення продовжується так:
На відрізку $[-2;1]$ графік функції $y=x^2+2$ розташований **над віссю** OX, тому:

$$S=\int_{-2}^{1}(x^2+2)dx=\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_{-2}^{1}=\frac{1}{3}+2-\left(-\frac{8}{3}-4\right)=\frac{1}{3}+2+\frac{8}{3}+4=9$$

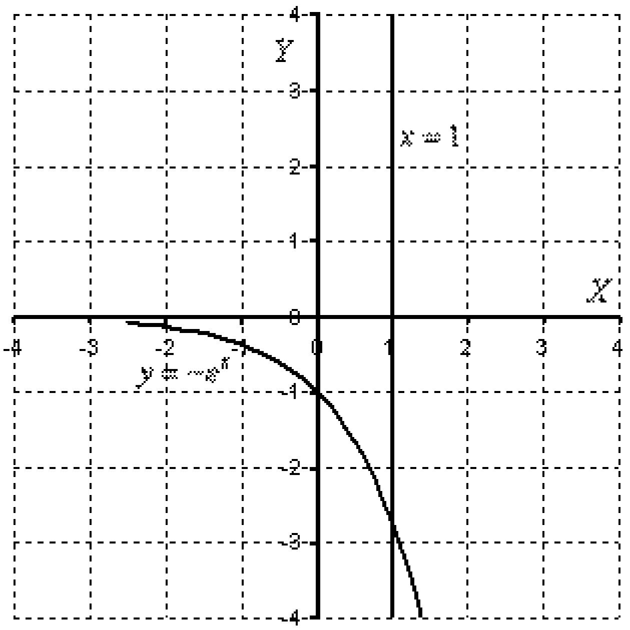
Відповідь: $S=9\ од^2$
В кого виникли труднощі з обчисленням визначеного інтегралу і застосування формули Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x)dx=F(X)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$, зверніться до презентації **Визначений інтеграл. Приклади рішень**.
Після того, як завдання виконано, завжди корисно поглянути на рисунок і прикинути, чи реальна вийшла відповідь. В даному випадку «на око» підраховуємо кількість кліточок в рисунку – ну, приблизно 9 набереться, схоже на правду. Зовсім зрозуміло, що якщо б в нас вийшов, скажімо, відповідь: 20 квадратних одиниць, то, вочевидь, що десь допущена

помилка – в розглянуту фігуру 20 клітинок явно не вміщується, від сили десяток. Якщо відповідь буде від`ємною, то завдання теж виконано некоректно.

Приклад 2

Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y=-e^x$, $x=1$ і координатними вісями.

Рішення: Виконаємо рисунок:



Якщо криволінійна трапеція розташована **під віссю** OX (або, *не вище* даної вісі), то її площу можна знайти за формулою: $S=-\int_a^b f(x)dx$

В даному випадку:

$$S=-\int_0^1(-e^x)dx=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e^1-e^0=e-1$$

Відповідь: $S=(e-1)\ ед^2\approx 1{,}72\ ед^2$

Увага! Не слід плутати два типи задач:

1) Якщо Вам запропоновано вирішити просто визначений інтеграл без будь-якого геометричного сенсу, то він може бути від`ємним.

2) Якщо Вам запропоновано знайти площу фігури за допомогою визначеного інтегралу, то площа завжди додатна! Саме тому в тільки но розглянутій формулі фігурує мінус.

На практиці частіше за все фігура розташована і в верхній і в нижній півплощині, а тому, від простих шкільних задачок переходимо до більш складних прикладів.

Приклад 3

Знайти площу плаской фігури, що обмежена лініями $y=2x-x^2$, $y=-x$.

Рішення: Спочатку треба виконати рисунок. Взагалі то кажучи, при побудові рисунку в задачах на площу нас більше за все цікавлять точки перетину ліній. Знайдемо точки перетину параболи $y=2x-x^2$ і прямої $y=-x$. Це можна зробити двома способами.

Перший спосіб – аналітичний. Вирішуємо рівняння:

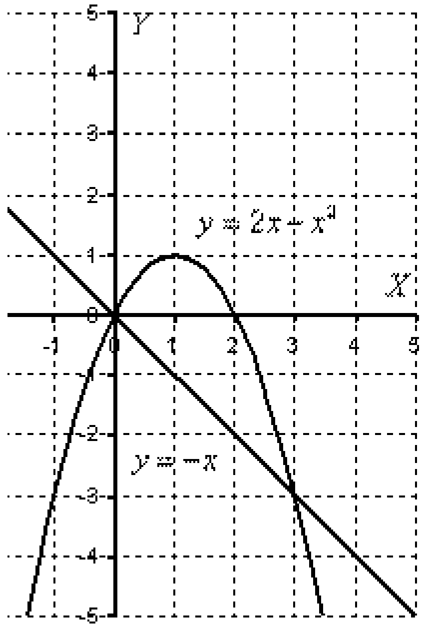
$2x-x^2=-x$

$3x-x^2=0$

$x(3-x)=0$

$x_1=0, x_2=3$

Значить, нижня границя інтегрування $a = 0$, верхня границя інтегрування $b = 3$.
Цим способом краще, за можливості, не користуватися.
Вигідніше і швидше побудувати лінії поточково, при цьому границі інтегрування з`ясовуються самі по собі. Тим не менш, аналітичний спосіб знаходження границь все ж таки доводиться іноді застосовувати, якщо, наприклад, графік достатньо великий, або поточкова побудова не виявила границь інтегрування (вони можуть бути дробовими або ірраціональними). И такий приклад, ми теж розглянемо.
Повертаємося до нашої задачі: раціональніше спочатку побудувати пряму і тільки потім параболу. Виконаємо рисунок:



Повторюся, що при поточковомій побудові границі інтегрування частіше за все з`ясовуються «автоматом».

А тепер робоча формула: Якщо на відрізку $[a;b]$ деяка неперервна функція $f(x)$ **більша або дорівнює** деякій неперервній функції $g(x)$, то площа фігури, що обмежена графіками даних функцій і прямими $x = a$, $x = b$, можна знайти за формулою: $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$
Тут вже не треба думати, де розташована фігура – над віссю або під віссю, і, грубо кажучи, **важливо, який графік ВИЩЕ** (відносно іншого графіку), **а який – НИЖЧЕ**.
В розглянутому прикладі зрозуміло, що на відрізку $[0;3]$ парабола розташовується вище, ніж пряма, а тому від $2x - x^2$ необхідно відняти $-x$
Завершення рішення може виглядати так:
Шукана фігура обмежена параболою $y = 2x - x^2$ зверху і прямою $y = -x$ знизу.
На відрізку $[0;3]$ $2x - x^2 \geq -x$, згідно відповідній формулі:

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - 0 + 0 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Відповідь: $S = 4\frac{1}{2}$ $ед^2$
Насправді шкільна формула для площі криволінійної трапеції в нижній півплощині (див. простенький приклад №2) – окремий випадок формули $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$. Оскільки вісь

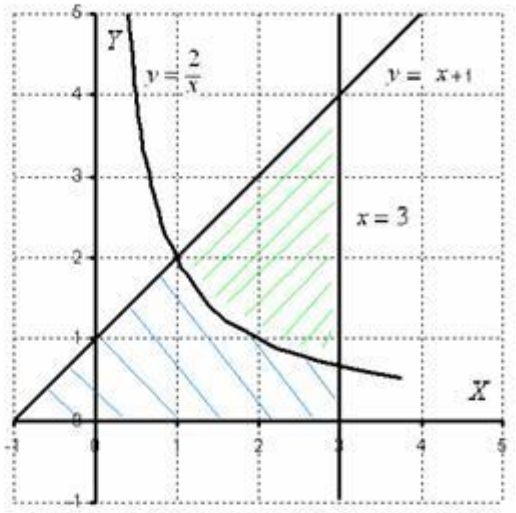
OX задається рівнянням $y=0$, а графік функції $g(x)$ розташований *не вище* вісі OX, то

$$S=\int_a^b (0-g(x))dx=-\int_a^b g(x)dx$$

Приклад 4

Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y=\frac{2}{x}$, $y=x+1$, $y=0$, $x=3$.

Рішення: Спочатку виконаємо рисунок:



…Ех, рисунок вийшов так собі, але майже все розбірливо.

Фігура, площу якої нам треба знайти, заштрихована синім кольором (уважно дивіться на умову – чим обмежена фігура!). Але на практиці з неуважності нерідко виникає «глюк», що треба знайти площу фігури, яка заштрихована зеленим кольором!

Цей приклад ще корисний і тим, що в ньому площа фігури обчислюється за допомогою двох визначених інтегралів. Дійсно:

1) На відрізку $[-1;1]$ над віссю OX розташований графік прямої $y=x+1$;

2) На відрізку $[1;3]$ над віссю OX розташований графік гіперболи $y=\frac{2}{x}$.

Зрозуміло, що площі можна (і необхідно) приплюсувати, тому:

$$S=\int_{-1}^{1}(x+1)dx+\int_{1}^{3}\frac{2dx}{x}=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{1}+2(\ln x)\Big|_1^3=\frac{1}{2}+1-\left(\frac{1}{2}-1\right)+2(\ln 3-\ln 1)=$$

$$=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+1+2(\ln 3-0)=2+2\ln 3=2(1+\ln 3)$$

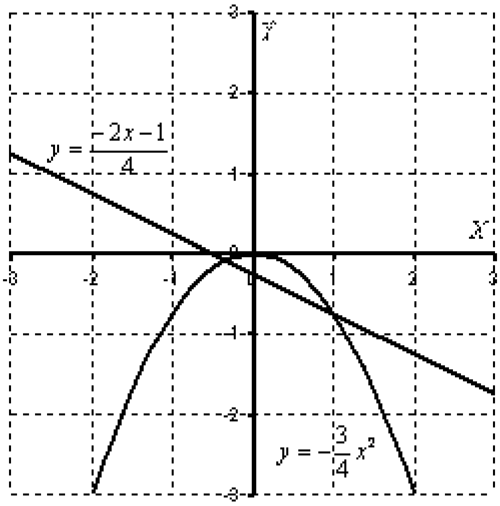
Відповідь: $S=2(1+\ln 3)\ од^2 \approx 4{,}2\ од^2$

Переходимо ще до одного змістовного завдання.

Приклад 5

Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $3x^2+4y=0$, $2x+4y+1=0$

Представимо рівняння в «шкільному» вигляді $y=-\frac{3}{4}x^2$, $y=\frac{-2x-1}{4}$ і виконаємо поточковий рисунок:



З рисунку видно, що верхня границя в нас «гарна»: $b = 1$.
Але чому дорівнює нижня границя?! Зрозуміло, що це не ціле число, але яке? Можливо $a = -\frac{1}{3}$? Но де гарантія, що рисунок виконаний з ідеальною точністю, може виявитися що $a = -\frac{1}{4}$. Або корінь. А якщо ми взагалі неправильно побудували графік?
В таких випадках доводиться витрачати додатковий час і поточнювати границі інтегрування аналітично.

Знайдемо точки перетину прямої $y = \frac{-2x-1}{4}$ і параболи $y = -\frac{3}{4}x^2$.
Для цього вирішуємо рівняння:

$$\frac{-2x-1}{4} = -\frac{3}{4}x^2$$

$$3x^2 = 2x+1$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$D = 4+12 = 16; \sqrt{D} = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = 1$$

Дійсно, $a = -\frac{1}{3}$.
Подальше рішення тривіальне, головне, не заплутатися в підстановках і знаках, обчислення тут не саміе прості.
На відрізку $\left[-\frac{1}{3};1\right]$ $-\frac{3}{4}x^2 \geq \frac{-2x-1}{4}$, за відповідною формулою:

$$S = \int_{-1/3}^{1}\left(-\frac{3}{4}x^2 - \left(-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\right)dx = \int_{-1/3}^{1}\left(\frac{1}{4}+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}x^2\right)dx = \left(\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{4}\right)\Big|_{-1/3}^{1} =$$

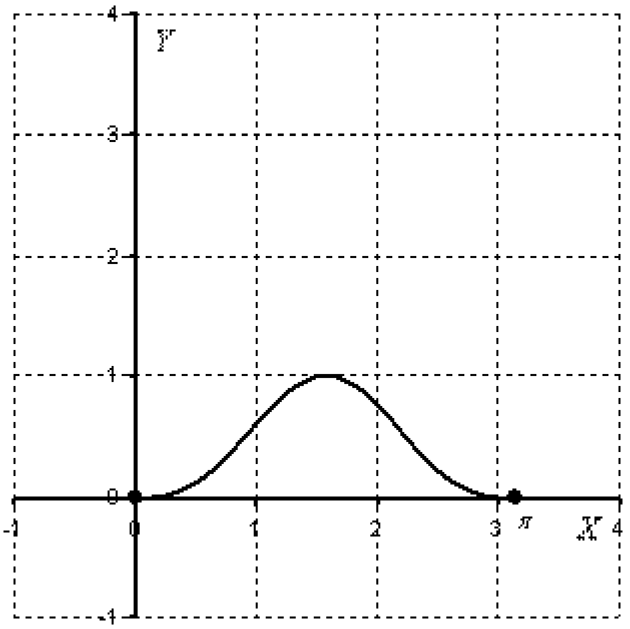
$$= \frac{1}{4}(x+x^2-x^3)\Big|_{-1/3}^{1} = \frac{1}{4}\left(1+1-1-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(1+\frac{5}{27}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{32}{27} = \frac{8}{27}$$

Відповідь: $S = \frac{8}{27}$ $ed.^2 \approx 0,3$ $ed.^2$

Ну, і на завершення презентації, розглянемо завдання складніші.

Приклад 6

Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y=\sin^3 x$, $y=0$, $0\le x\le\pi$
Рішення: Зобразимо дану фігуру на рисунку.



З границями інтегрування тут проблем немає, вони слідують прямо з умови: $0\le x\le\pi$ – «ікс» змінюється від нуля до «пі». Оформлюємо подальше рішення:
На відрізку $[0;\pi]$ графік функції $y=\sin^3 x$ розташований над віссю OX, тому:

$$S=\int_0^{\pi}\sin^3 x dx\overset{(1)}{=}\int_0^{\pi}\sin^2 x\sin xdx\overset{(2)}{=}\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)\sin xdx\overset{(3)}{=}(*)$$

(1) Як інтегруються синуси і косинуси в непарних степенях можна подивитися в презентації **Интеграли від тригонометричних функцій**. Це типовий прийом, відщипуємо один синус.
(2) Використовуємо основну тригонометричну тотожність у вигляді $\sin^2 x=1-\cos^2 x$
(3) Проведемо заміну змінної $t=\cos x$, тоді:
$dt=d(\cos x)=-\sin xdx\Rightarrow\sin xdx=-dt$
Нові границі інтегрування:
$t_1=\cos 0=1;$
$t_2=\cos\pi=-1$
В кого зовсім погані справи з замінами, прошу пройти на презентацію **Метод заміни в невизначеному інтегралі**. Кому не дуже зрозумілий алгоритм заміни в визначеному інтегралі, перейдіть до презентації **Визначений інтеграл. Приклади рішень**.

$$(*)=-\int_1^{-1}(1-t^2)dt\overset{(4)}{=}\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt=\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=\left(1-\frac{1}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right)=1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

(4) Тут ми використали властивість визначеного інтегралу $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$, розташувавши границі інтегрування в «звичному» порядку

Відповідь: $S=1\frac{1}{3}$ ед^2
Ось і всі основні принципові прийоми знаходження площ. Окрім розглянутих методів інтегрування, іноді доводиться застосовувати формулу інтегрування частинами в визначеному інтегралі, що не представляє собою особливих труднощів.