Заняття 16

Визначений іннтеграл. Приклади рішень

Для того щоб навчитися вирішувати визначені інтеграли необхідно:
1) Вміти знаходити неовизначені інтеграли.
2) Вміти обчислювати визначений інтеграл.
Як бачите, для того щоб засвоїти визначений інтеграл, треба достатньо добре орієнтуватися в «звичайних» невизначених інтегралах.
В загальному вигляді визначений інтеграл записується так:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Що додалося в порівнянні з невизначеним інтегралом? Додалися *границі інтегрування*.
Нижня границя інтегрування стандартно позначається літерою a.
Верхнія границя інтегрування стандартно позначається літерою b.
Відрізок $[a;b]$ називається відрі*зком інтегрування*.
До того, як ми перейдемо до практичних прикладів, невеликий екскурс по визначеному інтегралу.
Що таке визначений інтеграл? Вважаю дещо передчасним розповідати про розбиття відрізку і границю інтегральних сум, тому поки я скажу, що визначений інтеграл – це ЧИСЛО. Так-так, саме звичайне число.
Чи є у визначеного інтегралу геометричний сенс? Є. І дуже гарний. Дуже популярна задача – обчислення площі за допомогою визначеного інтегралу.
Що значить вирішити визначений інтеграл? Вирішити визначений інтеграл – це значить, знайти число.
Як вирішити визначений інтеграл? За допомогою знайомої зі школи формули Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формулу краще переписати в конспект, вона повинна бути перед очима протягом всієї презентації.
Етапи вирішення визначеного інтегралу наступні:
1) Спочатку знаходимо первісну функцію $F(X)$ (невизначений інтеграл). Зверніть увагу, що константа C в визначеному інтегралі **не додається**. Позначення $\Big|_a^b$ є суто технічним, і вертикальна паличка не несе ніякого математичного сенсу. Навіщо потрібний самий запис $F(X)\Big|_a^b$? Підготовка для застосування формули Ньютона-Лейбніца.
2) Підставляємо значення верхньої границі в первісну функцію: $F(b)$.
3) Підставляємо значення нижньої границі в первісну функцію: $F(a)$.
4) Розраховуємо (без помилок!) різницю $F(b)-F(a)$, тобто, знаходимо число.
Готово.
Чи завжди існує визначений інтеграл? Ніт, не завжди.
Наприклад, інтеграла $\int_{-5}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ не існує, оскільки відрізок інтегрування $[-5;-2]$ не входить до області визначення підінтегральної функції (значення під квадратним коренем не можуть бути від`ємними). А ось менш очевидний приклад: $\int_{-2}^{3} tgx dx$. Тут на відрізку інтегрування

$\left[-2;3\right]$ **тангенс** терпить **бескінечні рзриви** в точках $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$, і тому такого визначеного інтегралу теж не існує. До речі, хто ще не прочитав методичний матеріал **Графіки і основні властивості елементарних функцій** – самий час зробити це зараз. Буде здорово допомагати протягом всього курсу вищої математики.

Для того щ**об визначений інтеграл взагалі існував, достатньо щоб підінтегральна функція була неперервною на відрізку інтегрування**.

З вищезазначеного випливає перша важлива рекомендація: перед тим, як приступити до вирішення БУДЬ-ЯКОГО визначеного інтегралу, необхідно впевнитися в тому, що підінтегральна функція **неперервна на відрізку інтегрування**. В спрощеному варіанті ситуація виглядає приблизно так:

$\int_{-5}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2(\sqrt{x})\Big|_{-5}^{-2}$???! Не можна підставляти від\`ємні числа під корінь! Що за жах?! Початкова неуважність.

Якщо для вирішення (в контрольній роботі, на заліку, іспиті) Вам запропонований інтеграл схожий на $\int_{-5}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ або $\int_{-2}^{3}tgx dx$, то треба дати відповідь, що даного визначеного інтегралу не існує і обгрунтувати – чому.

! Примітка*: в останньому випадку слово «визначеного» опускати не можна, так як інтеграл з точковими розривами розбивається на декілька, в даному випадку на 3 невласних інтеграли,і формулювання «даного інтегралу не існує» стає некоректною.*

Чи може визначений інтеграл дорівнювати від\`ємному числу?** Може. І від\`ємному числу. І нулю. Можемо отримати бескінечність, але це вже буде **невласний інтеграл, якому відведена окрема лекція.

Чи може нижня границя інтегрування бути більшою за верхню границю інтегрування? Може, і така ситуація реально зустрічатися на практиці.

$\int_{6}^{0}(1-x)dx$ – інтеграл преспокійно обчислювати за формулою Ньютона-Лейбніца.

Без чого не обходиться вища математика? Звісно ж, без всіляких властивостей. Тому розглянемо деякі властивості визначеного інтегралу.

У визначеному інтегралі можна переставити верхню і нижню границі, змінивши при цьому знак:

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=-\int_{b}^{a}f(x)dx$$

Наприклад, у визначеному інтегралі перед інтегруванням $\int_{6}^{0}(1-x)dx$ доцільно змінити границі інтегрування на «звичний» порядок:

$\int_{6}^{0}(1-x)dx=-\int_{0}^{6}(1-x)dx=\int_{0}^{6}(x-1)dx$ – в такому вигляді інтегрувати значно зручніше.

Як і для невизначеного інтегралу, для визначеного інтегралу справедливі **властивості лінійності**:

$$\int_{a}^{b}kf(x)dx=k\int_{a}^{b}f(x)dx,\ \text{где}\ k=const$$

$\int_{a}^{b}(f(x)\pm g(x))dx=\int_{a}^{b}f(x)dx\pm\int_{a}^{b}g(x)dx$ – це справедливо не тільки для двох, але і для будь-якої кількості функцій.

У визначеному інтегралі можна проводити **заміну змінної інтегрування**, правда, в порівнянні з невизначеним інтегралом тут є своя специфіка,про яку ми ще поговоримо. Для визначеного інтегралу справедлива **формула інтегрування частинами**:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Приклад 1

Обчислити визначений інтеграл

$$\int_1^2 2x^2 dx$$

Рішення:

$$\int_1^2 2x^2 dx \overset{(1)}{=} 2\int_1^2 x^2 dx \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

(1) Виносимо константу за знак інтегралу.

(2) Інтегруємо за таблицею за допомогою самої популярної формули $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Константу $\frac{1}{3}$,що з`явиласяя. доцільно відділити від $x^3$ і винести за дужку. Робити це не обов`язково, але бажано – навіщо зайві обчислення

(3) Використовуємо формулу Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Спочатку підставляємо в x^3 верхню границю, потім – нижню границю. Проводимо подальші обчислення і отримуємо кінцеву відповідь.

Прикладм2

Обчислити визначений інтеграл

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2)dx$$

Вирішення:

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2)dx \overset{(1)}{=} 8\int_{-2}^4 dx + 2\int_{-2}^4 xdx - \int_{-2}^4 x^2 dx \overset{(2)}{=} 8(x)\Big|_{-2}^4 + 2\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-2}^4 - \frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-2}^4 \overset{(3)}{=}$$

$$= 8(4-(-2)) + (4^2 - (-2)^2) - \frac{1}{3}(4^3 - (-2)^3) = 8\cdot 6 + (16-4) - \frac{1}{3}(64+8) =$$

$$= 48 + 12 - 24 = 36$$

(1) Використовуємо властивості лінійності визначеного інтегралу.

(2)Інтегруємо за таблицею, при цьому всі константи виносимо – вони не будуть приймати участі в підстановці верхньої і нижньої границі.

(3) Для кожного з трьох доданків застосовуємо формулу Ньютона-Лейбніца:

$$F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

СЛАБИЙ ЛАНЦЮГ у визначеному інтегралі – це помилка обчислень і ПУТАНИНА В ЗНАКАХ, що доволі часто виникає. Будьте уважні! Особливу увагу загострюю на третьому доданку: $-\frac{1}{3}(4^3 - (-2)^3) = -\frac{1}{3}(64+8)$ – перше місце в хіт-параді помилок з неуважності, дуже часто машинально пишуть $-\frac{1}{3}(4^3 - (-2)^3) = -\frac{1}{3}(64-8)$ (особливо, коли підстановка верхньої і нижньої границі проводиться усно і не розписується так ретельно). Слід зазначити, що розглянутий спосіб рішення визначеного інтегралу – не єдиний. При деякому досвіді, рішення можна значно скоротити. Наприклад, я сама звикла вирішувати подібні інтеграли так:

$$\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx=\left(8x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{4}=$$

$$=\left(32+16-\frac{64}{3}\right)-\left(-16+4+\frac{8}{3}\right)=\frac{80}{3}+\frac{28}{3}=36$$

Тут я усно застосовую правила лінійності, усно проінтегрувала за таблицею. В мене получилася всього одна дужка: $\left(8x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{4}$ (на відміну від трьох дужок в першому способі). І в «целікову» первісну функцію, я спочатку підставила 4, потім –2, знову ж виконавши всі дії подумки.

Які недодіки у короткого способу рішення? Тут все не дуже добре з точки зору раціональності обчислень, але особисто мені все одно – звичайні дроби я розраховую на калькуляторі.

Окрім того, існує підвищений ризик допустити помилку в обчисленнях, таким чином, студенту-чайнику краще застосовувати перший спосіб.

Однак безсумнівною перевагою другого способу є швидкість рішення, компактність запису і той факт, що первісна $8x+x^2-\frac{x^3}{3}$ знаходиться в одній дужці.

Порада: перед тим, як використати формулу Ньютона-Лейбніца, корисно провести перевірку: а сама-то первісна знайдена правильно?

Так, при застосуванні до прикладу, що розглядається: перед тим,як в первісну функцію $8x+x^2-\frac{x^3}{3}$ підставляти верхню і нижню границі, бажано перевірити, а чи правильно взагалі знайдений невизначений інтеграл? Диференціюємо:

$$\left(8x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)'=8(x)'+(x^2)'-\frac{1}{3}(x^3)'=8\cdot 1+2x-\frac{1}{3}\cdot 3x^2=8+2x-x^2$$

Отримана вхідна підінтегральна функція, значить, невизначений інтеграл знайдено вірно. Тепер можна і формулу Ньютона-Лейбніца застосувати.

Така перевірка буде не зайвою при обчисленні будь-якого визначеного інтегралу.

Заміна змінної у визначеному інтегралі

Для визначеного інтегралу справедливі всі типи замін, що і для невизначеного інтегралу. Таким чином, якщо з замінами у Вас не дуже, слід уважно ознайомитися з презентацією **Метод заміни в невизначенму інтегралі**.

В цьому параграфі не має нічого страшного або складного. Новизна полягає в питанні, я**к змінити границі інтегрування при заміні**.

В прикладах я намагатимусь привести такі типи замін, які ще ніде не зустрічалися.

Приклад 3

Обчислити визначений інтеграл

$$\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}$$

Головне питання тут зовсім не в визначеному інтегралі, а в тому, як правильно провести заміну. Дивимось в **таблицю інтегралів** і прикидаємо, на що в нас більше за все схожа підінтегральна функція? Вочевидь, що на довгий логарифм: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C$.

Але є одна неув`язочка, в табличному інтегралі під коренем x^2, а в нашому – «ікс» в четвертій степені. З розмірковувань випливає і ідея заміни – непогано було б нашу четверту степінь як-небудь перетворити на квадрат. Це реально.

Спочатку готуємо наш інтеграл до заміни:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2)^2+16}} = (*)$$

З вищевказаних міркувань напрошується заміна: $t = x^2$

Таким чином, в знаменнику буде все добре: $\sqrt{t^2+16}$.

З`ясовуємо, у що перетвориться частина xdx підінтегрального виразу, що залишилася, для цього знаходимо диференціал dt :

$$dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$$

На відміну від заміни в невизначеному інтегралі у нас додається додатковий етап.
Знаходимо нові границі інтегрування.

Це доволі просто. Дивимось на нашу заміну $t = x^2$ і старі границі інтегрування $a = 0$, $b = \sqrt{3}$.

Спочатку підставляємо у вираз заміни $t = x^2$ нижню границю інтегрування, тобто, нуль:
$t_1 = 0^2 = 0$

Потім підставляємо у вираз заміни $t = x^2$ верхню границю інтегрування, тобто, корінь з трьох:
$t_2 = (\sqrt{3})^2 = 3$

Готово. И всього-лише…
Продовжуємо рішення.

$$(*) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2+16}} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left(\ln\left|t+\sqrt{t^2+16}\right|\right)\Big|_0^3 \overset{(3)}{=} \frac{1}{2}\left(\ln\left(3+\sqrt{25}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0+16}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 4) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}35$$

(1) У відповідності з заміною **записуємо новий інтеграл з новими границями інтегрування**.

(2) Це найпростіший табличний інтеграл, інтегруємо за таблицею. Константу $\frac{1}{2}$ краще залишити за дужками (можна цього і не робити), щоб вона не заважала в подальших обчисленнях. Справа відчіркуємо лінію з вказанням нових границь інтегрування $\Big|_0^3$ – це підготовка для застосування формули Ньютона-Лейбніца.

(3) Використаємо формулу Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Відповідь намагаємося записати в максимально компактному вигляді, тут я застосувала властивості логарифмів.

Ще одна відмінність від невизначеного інтегралу полягає в тому, що, після того, як ми провели заміну, **ніяких зворотних замін проводити не треба**.

Якщо ми підносимо функцію під знак диференціалу, то змінювати границі інтегрування не треба! Чому? Тому що в цьому випадку <u>не має фактичного переходу до нової змінної</u>. Наприклад:

$$\int_1^2 e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 e^{2x}d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e^2)$$

И тут піднесення більш зручніше академічної заміни $t = 2x$ з подальшим «розписом» нових границь інтегрування. Таким чином, якщо **визначений інтеграл не дуже складний, то завжди намагайтеся піднести функцію під знак диференціалу**! Це швидше, це компактніше, і це звичайно – в чому ви впевнитеся ще десятки разів!

Метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі
Тут нового ще менше. Все, що викладено в презентації **Інтегрування частинами в невизначеному інтегралі** в повній мірі справедливе і для визначеного інтегралу.
Плюсом йде тільки одна деталь, в формулі інтегрування частинами додаються границі інтегрування:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Формулу Ньютона-Лейбніца тут необхідно застосовувати двічі: для добутку uv і, після того, як ми візьмемо інтеграл $\int_a^b vdu$.
Тип інтегралу для прикладу я знову ж таки підібрала такий, який ще ніде не зустрічався.
Приклад не самий простий, але дуже і дуже цікавий.

Приклад 4

Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\pi/4} xtg^2 xdx$$

Вирішуємо.

$$\int_0^{\pi/4} xtg^2 xdx = (*)$$

Інтегруємо частинами:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = tg^2 xdx \Rightarrow v = \int tg^2 xdx = tgx - x$$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

В кого виникли труднощі з інтегралом $\int tg^2 xdx$, подивіться презентацію **Інтеграли від тригонометричних функцій**, там він ретельно розібраний.

$$(*) \overset{(1)}{=} (x(tgx - x))\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}(tgx - x)dx \overset{(2)}{=} \frac{\pi}{4}\cdot\left(tg\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - 0\cdot(tg0 - 0) - \int_0^{\pi/4} tgxdx + \int_0^{\pi/4} xdx \overset{(3)}{=}$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}(x^2)\Big|_0^{\pi/4} \overset{(4)}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \ln|\cos 0| + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16} - 0^2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 + \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(1) Записуємо рішення у відповідності з формулою інтегрування частинами.
(2) Для добутку $x(tgx - x)$ застосовуємо формулу Ньютона-Лейбніца. Для інтегралу, що залишився, використовуємо властивості лінійності, розділяючи його на два інтеграли. **Не плутаємося в знаках!**
(3) Беремо два інтеграли, що залишилися. Інтеграл $\int tgxdx$ також розібраний в презентації **Інтеграли від тригонометричних функцій**
(4) Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца для двох знайдених первісних.
Далі відповідь доводимо «до розуму». Повторююсь, будьте ДУЖЕ УВАЖНИМИ при підстановках і заключних обчисленнях. Тут припускаються помилок частіше за все.
Якщо чесно, я недолюблюю формулу $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ і, за можливістю, … обходжуся взагалі без неї! Розглянемо другий спосіб вирішення,зс моєї точки зору він більш раціональний.

Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\pi/4} xtg^2 x dx$$

На першому етапі я знаходжу невизначений інтеграл:

[illegible]

Інтегруємо частинами:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = tg^2 x dx \Rightarrow v = \int tg^2 x dx = tgx - x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = x(tgx - x) - \int (tgx - x)dx = xtgx - x^2 - \int tgxdx + \int xdx =$$

$$= xtgx - x^2 + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} = xtgx - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x|$$

Первісна функція знайдена. Константу C в даному випадку додавати не має сенсу.
В чому перевага такого підходу? Не треба «таскати за собою» границі інтегрування, дійсно, змучитися можна десяток разів записувати дрібні значки границь інтегрування

На другому етапі я проводжу перевірку.
Теж логічно. Якщо я неправильно знайшла первісну функцію, то неправильно вирішу і визначений інтеграл. Це краще з`ясувати негайно, диференціюємо відповідь:

$$\left(xtgx - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x|\right)' = (x)'tgx + x(tgx)' - \frac{1}{2}(x^2)' + (\ln|\cos x|)' =$$

$$= 1 \cdot tgx + x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = tgx + \frac{x}{\cos^2 x} - x - \frac{\sin x}{\cos x} =$$

$$= tgx + \frac{x}{\cos^2 x} - x - tgx = \frac{x}{\cos^2 x} - x = \frac{x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{x\sin^2 x}{\cos^2 x} = xtg^2 x$$

Отримана вхідна підінтегральна функція, значить, первісна функція знайдена вірно.

Третій етап – застосування формули Ньютона-Лейбніца:

$$\int_0^{\pi/4} xtg^2 x dx = \left(xtgx - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}tg\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \left(0 \cdot tg0 - \frac{0^2}{2} + \ln\cos 0\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - (0 - 0 + 0) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

И тут є суттєва вигода! В «моєму» способі рішення значно менший ризик заплутатися в підстановках і обчисленнях – формула Ньютона-Лейбніца застосовується всього лише один раз. Якщо чайник вирішує подібний інтеграл за формулою $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ (першим способом), то стовідсотково де-небудь припуститься помилки.

Розглянутий алгоритм вирішення можна застосувати для будь-якого визначеного інтегралу.

Шановний студент, роздрукуй і збережи:

Що робити, якщо даний визначений інтеграл, який здається складним або не одразу зрозуміло, як його вирішити?

1) Спочатку знаходимо невизначений інтеграл (первісну функцію). Якщо на першому ж етапі відбудеться облом, далі застосовувати Ньютона і Лейбніца немає сенсу. Шлях лише один – підвищувати свій рівень знань і навичок в вирішенні **невизначених інтегралів**.
2) Перевіряємо знайдену первісну функцію диференціюванням. Якщо вона знайдена невірно, третій крок буде тільки зайвою витратою часу.

3) Використовуємо формулу Ньютона-Лейбніца. Всі обчислення проводимо ДУЖЕ УВАЖНО – тут самий слабкий ланцюг завдання.