Заняття 15

Інтегрування коренів (іррациональних функцій).
Приклади вирішень

В презентації ми розберемо найпростіші невизначені інтеграли від ірраціональних функцій, дещо більш громіздкі (з різними коренями), і закінчиться все біноміальними інтегралами.

Інтеграли від коренів. Типові методи і прийоми рішень

Приклад 1

Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$$

Аналізуючи підінтегральну функцію, приходимо до сумного висновку, що вона зовсім не нагадує табличні інтеграли. Ось якщо б все це добро знаходилося в чисельнику – було б просто. Або кореня внизу не було б. Або многочлену. Ніякі **методи інтегрування дробів** теж не допомагають. Що робити?

Основний прийом вирішення ірраціональних інтегралів – це заміна змінної, яка позбавить нас від ВСІХ коренів в підінтегральній функції.

Зазначу, що ця заміна дещо своєрідна, її технічна реалізація відрізняється від «класичного» способу заміни, який було розглянуто в презентації **Метод заміни в невизначеному інтегралі**.

В даному прикладі треба провести заміну $x = t^2$, тобто, замість «ікса» під коренем в нас з`явиться t^2. Чому заміна саме така? Тому що $\sqrt{t^2} = t$, і в результаті заміни корінь пропаде. Якщо б в підінтегральній функції замість квадратного кореня у нас знаходився б $\sqrt[3]{x}$, то ми б провели заміну $x = t^3$. Якщо б там був $\sqrt[4]{x}$ – то $x = t^4$ і так далі.

Добре, $\sqrt{x}$ в нас перетворився на $\sqrt{t^2} = t$. Що відбудеться з многочленом $(x+3)$?

Складностей немає: якщо $x = t^2$, то $(x+3) = (t^2+3)$.

Залишилося з`ясувати, у що перетвориться диференціал dx. Робиться це так:

Беремо нашу заміну $x = t^2$ і **навішуємо диференціали на обидві частини**:

$d(x) = d(t^2)$

(я розпишу максимально ретельно)

$(x)'dx = (t^2)'dt$

$dx = 2tdt$

Оформлення рішення повинно виглядати приблизно так:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)} = (*)$$

Проведемо заміну: $x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$

$$(*) \overset{(1)}{=} \int \frac{2tdt}{t(t^2+3)} \overset{(2)}{=} 2\int \frac{dt}{t^2+3} \overset{(3)}{=} 2\int \frac{dt}{(\sqrt{3})^2+t^2} \overset{(4)}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{t}{\sqrt{3}} + C \overset{(5)}{=}{}^{t=\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \sqrt{\frac{x}{3}} + C, \text{ где } C = const$$

(1) Проводимо підстановку після заміни (як, що і куди, вже розглянуто).

(2) Виносимо константу за межі інтегралу. Чисельник і знаменник скорочуємо на t.

(3) Отриманий інтеграл є табличним, готуємо його для інтегрування, виділяючи квадрат

(4) Інтегруємо за таблицею, застосовуючи формулу $\int \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a} + C$.

(5) Проводимо зворотну заміну. Як це робиться? Згадуємо: якщо $x = t^2$, то $t = \sqrt{x}$.

Увага! Для вивчення подальших прикладів необхідно добре пропрацювати перший параграф презентації **Інтегрування деяких дробів**.

Приклад 2

Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{\sqrt{x+2}dx}{x-3}$$

Попередній аналіз підінтегральної функції знову показує, що легкого шляху немає. А тому треба позбавлятися від кореня.

$$\int \frac{\sqrt{x+2}dx}{x-3} = (*)$$

Проведемо заміну: $x + 2 = t^2$

За t^2 позначаємо ВЕСЬ вираз під коренем. Заміна з попередніх прикладів $x = t^2$ тут не годиться (точніше, зробити її можливо, але це не позбавить нас від кореня).

Навішуємо диференціали на обидві частини:

$$d(x+2) = d(t^2)$$
$$(x+2)'dx = (t^2)'dt$$
$$dx = 2tdt$$

З чисельником розібралися. Що робити з $(x-3)$ в знаменнику?

Беремо нашу заміну $x+2=t^2$ і виражаємо з неї: $x = t^2 - 2$

Якщо $x = t^2 - 2$, то $x - 3 = t^2 - 2 - 3 = t^2 - 5$

$$(*) \overset{(1)}{=} \int \frac{\sqrt{t^2} \cdot 2tdt}{t^2-5} \overset{(2)}{=} \int \frac{2t^2dt}{t^2-5} \overset{(3)}{=} \int \frac{2(t^2-5)+10}{t^2-5}dt \overset{(4)}{=} \int \left(2 + \frac{10}{t^2-5}\right)dt \overset{(5)}{=} 2\int dt + 10\int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{5})^2} \overset{(6)}{=}$$

$$= 2t + \frac{10}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right| + C \overset{(7)}{=} 2\sqrt{x+2} + \sqrt{5}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{5}}\right| + C, \text{ где } C = const$$

(1) Проводимо підстановку у відповідності з виконаною заміною.

(2) Причісуємо чисельник. Константу тут я намагаюся не виносити за знак інтегралу (можна робити і так, помилкою не буде)

(3) Розкладаємо чисельник в суму. Ще раз рекомендую ознайомитися з першим параграфом презентації **Інтегрування деяких дробів**.

(4) Почленно ділимо чисельник на знаменник.

(5) Застосуємо властивості лінійності невизначеного інтегралу. В другому інтегралі виділяємо квадрат $(\sqrt{5})^2$ для подальшого інтегрування за таблицею.

(6) Інтегруємо за таблицею. Перший інтеграл зовсім простий, в другому застосуємо табличну формулу високого логарифму $\int \frac{dt}{t^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right| + C$.

(7) Проводимо зворотну заміну. Якщо ми проводили заміну $x+2=t^2$, то, назад: $t = \sqrt{x+2}$

Приклад 3

Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{(x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})dx}{x(1+\sqrt[3]{x})}$$

Ось і прийшла розплата за голі чисельники. Коли зустрічається такий інтеграл,зазвичай стає страшно. Але страхи безпідставні, після проведення необхідної заміни підінтегральна

функція спрощується. Задача полягає в наступному: провести вдалу заміну, щоб одразу позбавитися від ВСІХ коренів.
Коли дані різні корені зручно притримуватися наступної схеми рішення. Спочатку виписуємо підінтегральну функцію, при цьому всі корені представляємо у вигляді $x^{\frac{a}{b}}$:

$$\frac{x+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}}{x(1+x^{\frac{1}{3}})}$$

. Нас будуть цікавити **знаменники** степенів:

$$\frac{x+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}}{x(1+x^{\frac{1}{3}})}$$

Записуємо ці знаменники: 2, 3, 3.
Тепер треба знайти *найменше спільне кратне* чисел 2, 3, 3 – таке число, щоб воно ділилося і на 2 і на 3 (в даному випадку), окрім того, це число повинно бути якомога менше.
Вочевидь, що найменшим спільним кратним є число 6. Воно ділиться і на 2 і на 3, окрім того, менше 6 нічого не придумати.

Як ви вже здогадалися, заміна в інтегралі, що розглядається, буде наступною: $x = t^6$
Оформлюємо рішення:

$$\int \frac{(x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})dx}{x(1+\sqrt[3]{x})} = (*)$$

Проведемо заміну: $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$

$$(*) \overset{(1)}{=} \frac{(t^6+\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{(t^6)^2})\cdot 6t^5 dt}{t^6(1+\sqrt[3]{t^6})} \overset{(2)}{=} 6\int \frac{(t^6+t^3+t^4)dt}{t(1+t^2)} \overset{(3)}{=} 6\int \frac{(t^5+t^3+t^2)dt}{t^2+1} \overset{(4)}{=}$$

$$= 6\int \frac{t^3(t^2+1)+(t^2+1)-1}{t^2+1}dt \overset{(5)}{=} 6\int \left(t^3+1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt \overset{(6)}{=}$$

$$= \frac{6}{4}t^4 + 6t - 6arctgt + C \overset{(7)}{=} \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} - 6arctg\sqrt[6]{x} + C, \text{ где } C = const$$

(1) Проводимо підстановку.
(2) Позбавляємося від коренів. Виносимо константу за знак інтегралу. Скорочуємо чисельник і знаменник на t^5.
(3) Скорочуємо чисельник і знаменник ще на t.
(4) Розкладаємо чисельник в суму (як це зробити, вже неодноразово згадувалося).
(5) Почленно ділимо чисельник на знаменник.
(6) Інтегруємо за таблицею. При цьому константу я знову «приліпила» до кожного з трьох доданків (можна цього і не робити, момент несуттєвий).

(7) Проводимо зворотну заміну. Якщо $x = t^6$, то, назад: $t = \sqrt[6]{x}$. В ході зворотної заміни деякі корені краще одразу скоротити (зазвичай це робиться усно). В прикладі, що розглядається, скорочення коренів зустрічалося в першому доданку: $t^4 = \sqrt[6]{x^4} = \sqrt[3]{x^2}$
Як бачите, особливих складнощів немає, не дивлячись на тн, що спочатку інтеграл здавався важким і страшним.

Інтегрування біноміальних інтегралів

Так званий біноміальний інтеграл має наступний вигляд: $\int x^m(a+bx^n)^p dx$. Такий інтеграл береться в трьох випадках.

1) Випадок перший. Самий легкий.
Якщо степінь p – ціле число.

Наприклад: $\int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[5]{x})^2}$

Представимо інтеграл в стандартному вигляді (це краще зробити на чорнетці):

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[5]{x})^2} = \int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{5}})^{-2}dx$$

Ми бачимо, що степінь $p=-2$ – ціла, а, значить, дійсно має місце перший випадок. Біноміальний інтеграл першого типу вирішується практично так само, як інтеграли в попередніх прикладах, тому приводити майже такі ж рішення особливого сенсу немає – я просто покажу, яку заміну тут треба провести.

Дивимось на знаменники дробів:

$$\int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{5}})^{-2}dx$$

Записуємо знаменники: 2, 5. Знаходимо найменше спільне кратне цих чисел. Зрозуміло, це 10: воно ділиться і на 2 і на 5, окрім того – найменша в цьому сенсі.

Після заміни $x=t^{10}$ всі корені гарантовано зникнуть.

2) Випадок другий

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

Якщо $\frac{m+1}{n}$ – ціле число, то необхідно провести заміну $a+bx^n=t^N$, де N – знаменник дробу p.

Зараз у всьому розберемося.

<u>Приклад 4</u>

Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x}$$

Представимо інтеграл в стандартному вигляді $\int x^m(a+bx^n)^p dx$:

$\int \frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x} = \int x^{-1}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}dx$. Взагалі то, формально коректніше було б записати $\int x^{-1}(-1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$, але перестановка доданків в дужках не грає ніякої ролі.

Виписуємо степені:

$m=-1$, $n=2$, $p=\frac{1}{2}$

Одразу перевіряємо, чи відноситься наш інтеграл до першого випадку?

$p=\frac{1}{2}$ – ціле? Ні.

Перевіряємо другий випадок:

$\frac{m+1}{n}=\frac{-1+1}{2}=\frac{0}{2}=0$ – ціле, значить у нас другий випадок

Згідно з правилом для другого випадку, необхідно провести заміну $a+bx^n=t^N$, де N – знаменник дробі p. В прикладі, що розглядається, $p=\frac{1}{2}$, і знаменник цього дробу дорівнює «двійці». Таким чином, щоб гарантовано позбавитися від кореня, треба провести заміну $x^2 - 1 = t^2$.

Оформлюємо рішення:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}dx}{x} = (*)$$

Проведемо заміну $x^2 - 1 = t^2$.

Після цієї підстановки з коренем в нас буде все гаразд: $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{t^2} = t$

Тепер треба з`ясувати, у що перетвориться частина підінтегрального виразу, що залишилася. $\frac{dx}{x}$

Беремо нашу заміну $x^2 - 1 = t^2$ і **навішуємо** диференціали на **обидві** частини:

$$d(x^2 - 1) = d(t^2)$$

$$(x^2 - 1)' dx = (t^2)' dt$$

$$2xdx = 2tdt$$

$$xdx = tdt$$

Ось, незадача, у нас xdx, а нам треба виразити $\frac{dx}{x}$.

Помножимо обидві частини на $\frac{1}{x^2}$:

$$xdx \cdot \frac{1}{x^2} = tdt \cdot \frac{1}{x^2}$$

Таким чином: $\frac{dx}{x} = \frac{tdt}{x^2}$. Вже краще, але хотілося б виразити $\frac{dx}{x}$ **тільки через** t, а в правій частині $\frac{tdt}{x^2}$ – «ікс» в квадраті внизу. Що робити? Згадуємо нашу заміну $x^2 - 1 = t^2$ і виражаємо з неї необхідний нам $x^2 = t^2 + 1$.

В результаті: $\frac{dx}{x} = \frac{tdt}{x^2} = \frac{tdt}{t^2 + 1}$.

Отже, все готово, продовжуємо рішення:

$$(*) \overset{(1)}{=} \int \frac{t \cdot tdt}{t^2 + 1} \overset{(2)}{=} \int \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} \overset{(3)}{=} \int \frac{(t^2 + 1 - 1)dt}{t^2 + 1} \overset{(4)}{=} \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt \overset{(5)}{=}$$

$$= t - arctgt + C \overset{(6)}{=} \sqrt{x^2 - 1} - arctg\sqrt{x^2 - 1} + C, \text{ где } C = const$$

(1) Проводимо підстановку згідно з заміною.
(2) Записуємо компактно чисельник.
(3) Розкладаємо знаменник в суму.
(4) Почленно ділимо чисельник на знаменник.
(5) Інтегруємо за таблицею.
(6) Проводимо зворотну заміну: якщо $x^2 - 1 = t^2$, то $t = \sqrt{x^2 - 1}$

3) Випадок третій. Самий складний.

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

Якщо $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число, то необхідно провести заміну $b + \frac{a}{x^n} = t^N$, де N – знаменник дробу p.

__**Приклад 5**__

Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}dx}{x^2}$$

Представимо інтеграл в стандартному вигляді $\int x^m (a+bx^n)^p dx$:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}dx}{x^2} = \int x^{-2}(x^2+4)^{\frac{1}{2}}dx$$
.

Виписуємо степені і коефіцієнти:

$m=-2$, $n=2$, $p=\frac{1}{2}$, $a=4$, $b=1$

1) Чи відноситься наш інтеграл до першого випадку?

$p=\frac{1}{2}$ – ціле? Ні.

2) Перевіряємо другий випадок:

$\frac{m+1}{n}=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$ – ціле? Ні.

3) $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-2+1}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$ – ціле! Значить, у нас третій випадок.

Згідно з правилом для третього випадку, необхідно провести заміну $b+\frac{a}{x^n}=t^N$, де N – знаменник дробу p. В прикладі, що розглядається, $p=\frac{1}{2}$, і знаменник цього дробу дорівнює знову ж таки «двійці». Коефіцієнти (будьте уважні) $a=4$, $b=1$

Таким чином, щоб гарантовано позбавитися від кореня, треба провести заміну $1+\frac{4}{x^2}=t^2$.

Оформлюємо рішення:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}dx}{x^2} = (*)$$

Проведемо заміну: $1+\frac{4}{x^2}=t^2$.

Розбираємося з коренем. Це важче, ніж в попередніх випадках.

Спочатку з нашої заміни $1+\frac{4}{x^2}=t^2$ треба виразити «ікс квадрат»:

$$\frac{4}{x^2}=t^2-1 \Rightarrow x^2=\frac{4}{t^2-1}$$

Тепер підставляємо $x^2=\frac{4}{t^2-1}$ під корінь:

$$\sqrt{x^2+4}=\sqrt{\frac{4}{t^2-1}+4}=\sqrt{\frac{4+4t^2-4}{t^2-1}}=\sqrt{\frac{4t^2}{t^2-1}}=\frac{2t}{\sqrt{t^2-1}}$$

На другому етапі з`ясовуємо, у що перетвориться **частина** підінтегрального виразу, що залишилася $\frac{dx}{x^2}$. Беремо нашу заміну $1+\frac{4}{x^2}=t^2$ і навішуємо диференціали на обидві частини:

$$d\left(1+\frac{4}{x^2}\right)=d(t^2)$$

$$(1+4x^{-2})'dx=2tdt$$

$$(0+4\cdot(-2)x^{-3})dx=2tdt$$

$$-\frac{8dx}{x^3}=2tdt$$

$$\frac{4dx}{x^3}=-tdt$$

$$\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{4}tdt$$

$$\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{4}txdt$$

Знову проблема, в правій частині в нас є «ікс», а нам треба все виразити через «те».

Беремо раніше знайдений вираз $x^2=\frac{4}{t^2-1}$ і виражаємо $x=\sqrt{\frac{4}{t^2-1}}=\frac{2}{\sqrt{t^2-1}}$

Отже:

$$\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{4}txdt=-\frac{1}{4}t\cdot\frac{2}{\sqrt{t^2-1}}\cdot dt=-\frac{tdt}{2\sqrt{t^2-1}}$$

В результаті ми виразили через «те» і $\sqrt{x^2+4}$ і $\frac{dx}{x^2}$, все готово для продовження рішення:

$$(*)\overset{(1)}{=}\int\frac{2t}{\sqrt{t^2-1}}\cdot\left(-\frac{tdt}{2\sqrt{t^2-1}}\right)\overset{(2)}{=}-\int\frac{t^2dt}{t^2-1}\overset{(3)}{=}-\int\frac{(t^2-1+1)dt}{t^2-1}=-\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=$$

$$=-\int dt-\int\frac{dt}{t^2-1}=-t-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\overset{(4)}{=}-\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}-1}{\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}+1}\right|+C\overset{(5)}{=}$$

$$=-\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}-x}{\sqrt{4+x^2}+x}\right|+C,\ \text{где}\ C=const$$

(1) Проводимо підстановку згідно з заміною.

(2) Спрощуємо вираз.

(3) Змінюємо знак в знаменнику і виносимо мінус за межі інтегралу (можна було не робити, але так зручніше).

(4) Проводимо зворотну заміну. В третьому випадку біноміального інтегралу це теж важче.

Якщо вхідна заміна $1+\frac{4}{x^2}=t^2$, то $t^2=\frac{x^2+4}{x^2}\Rightarrow t=\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$.

(5) Позбавляємося від чотириповерховості в логарифмі.