Заняття 14

Інтегрування дробово-раціональної функції.
Метод невизначених коефіцієнтів

Продовжуємо займатися інтегруванням дробів. Інтеграли від деяких видів дробів ми вже розглядали в презентації **Інтегрування деяких дробів**, і цей урок в деякому сенсі можна вважати продовженням. Для успішного розуміння матеріалу необхідні базові навички інтегрування, тому якщо Ви тільки но долучилися до вивчення інтегралів, то необхідно почати з презентації **Невизначений інтеграл. Приклади рішень**.

Що таке дробово-раціональна функція? Простими словами, дробово-раціональна функція – це дріб, в чисельнику і знаменнику якої знаходяться многочлени або добутки многочленів. При цьому дроби є більш складними, ніж ті, про які йшла мова в попередній презентації **Інтегрування деяких дробів**.

Інтегрування правильної дробово-раціональної функції

Одразу приклад і типовий алгоритм вирішення інтегралу від дробово-раціональної функції.

Приклад 1

Знайти невизначений інтеграл.

$$\int\frac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}$$

Крок 1. Перше, що ми ЗАВЖДИ робимо при вирішенні інтегралу від дробово-раціональної функції – це з`ясовуємо наступне питання: **чи є дріб правильним?** Даний крок виконується усно, і зараз я поясню як:

Спочатку дивимось на чисельник і з`ясовуємо *старшу степінь* многочлену:

$$\int\frac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}$$

Старша степінь чисельника дорівнює двом.

Тепер дивимось на знаменник і з`ясовуємо *старшу степінь* знаменнику. Шлях, що напрошується – це розкрити дужки і привести подібні доданки, але можна зробити простіше, в **кожній** дужці знаходимо старшу степінь

$$\int\frac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}$$

і подумки помножимо: $x\cdot x^2=x^3$ – таким чином, старша степінь знаменника дорівнює трьом. Зрозуміло, що якщо реально розкрити дужки, то ми не отримаємо степені, більшої за третю.

Висновок: Старша степінь чисельника **СТРОГО** менша, ніж старша степінь знаменника, значить, дріб є правильною.

Якщо б в даному прикладі в чисельнику знаходився многочлен 3, 4, 5 і т.д. степені то дріб був би **неправильним**.

Зараз ми будемо розглядати тільки правильні дробово-раціональні функції. Випадок, коли степінь чисельника більша або дорівнює степені знаменника, розглянемо в кінці уроку.

Крок 2. Розкладемо знаменник на множники. Дивимось на наш знаменник:

$$(x-1)(x^2+5x+6)$$

Взагалі то кажучи, тут вже добуток множників, але, тим не менш, задаємося питанням: чи можна розкласти що небудь ще? Об`єктом, безсумнівно, виступає квадратний тричлен. Вирішуємо квадратне рівняння:

$$x^2+5x+6=0$$

$$D=25-24=1$$

Дискримінант більший за нуль, значить, тричлен дійсно розкладається на множники:

Загальне правило: ВСЕ, що в знаменнику МОЖНА розкласти на множники – розкладаємо на множники

Починаємо оформлювати рішення:

$$\int \frac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)} = \int \frac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x+2)(x+3)} = (*)$$

Крок 3. Методом невизначених коефіцієнтів розкладаємо підінтегральну функцію в суму простих (елементарних) дробів. Зараз буде зрозуміліше.

Дивимось на нашу підінтегральну функцію:

$$\frac{(x^2-19x+6)}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

І, знаєте, якось з`являється думка, що непогано було б велику дріб перетворити в декілька маленьких. Наприклад, ось так:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} = \frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

Виникає питання, а можливо взагалі так зробити? **Такий розклад існує і він єдиний**.

Тільки коефіцієнти A, B, C ми *поки* що не знаємо, звідси і назва – метод невизначених коефіцієнтів.

Наступний крок – з`ясувати, чому ж дорівнюють A, B, C.

Будьте уважні, поясню всього один раз!

Отже:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} = \frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

В лівій частині приводимо вираз до спільного знаменнику:

$$\frac{A(x+2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

Тепер позбавляємося знаменника (так як вони однакові):

$$A(x+2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+2) = x^2-19x+6$$

В лівій частині розкриваємо дужки, невідомі коефіцієнти A, B, C при цьому поки що не чіпаємо:

$$A(x^2+5x+6)+B(x^2+2x-3)+C(x^2+x-2) = x^2-19x+6$$

Для того щоб помножити многочлен на многочлен необхідно кожний член одного многочлену помножити на кожний член іншого многочлену.

З точки зору зрозумілого пояснення коефіцієнти A, B, C краще внести в дужки:

$$(Ax^2+5Ax+6A)+(Bx^2+2Bx-3B)+(Cx^2+Cx-2C) = x^2-19x+6$$

Складаємо систему лінійних рівнянь.

Спочатку розшукуємо старші степені:

$$(Ax^2+5Ax+6A)+(Bx^2+2Bx-3B)+(Cx^2+Cx-2C) = x^2-19x+6$$

І записуємо відповідні коефіцієнти в перше рівняння системи:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

Добре запам`ятайте наступний нюанс. Що було б, якщо б в правій частині взагалі не було x^2? Скажімо, було би просто $-19x+6$ без всякого квадрату? В цьому випадку в рівнянні системи треба було б поставити справа нуль: $A+B+C=0$. Чому нуль? А тому що в правій частині завжди можна приписати цей самий квадрат з нулем: $0 \cdot x^2-19x+6$ Якщо **в правій**

частині відсутні які-небудь змінні або (і) вільні члени, то в правих частинах відповідних рівнянь системи ставимо нулі.
Далі відмічаємо всі «ікси»:

$$(Ax^2+5Ax+6A)+(Bx^2+2Bx-3B)+(Cx^2+Cx-2C)=x^2-19x+6$$

Записуємо відповідні коефіцієнти у друге рівняння системи:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 5A+2B+C=-19 \\ \ldots \end{cases}$$

І, в кінці кінців, підбираємо вільні члени.

$$(Ax^2+5Ax+6A)+(Bx^2+2Bx-3B)+(Cx^2+Cx-2C)=x^2-19x+6$$

Система готова:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 5A+2B+C=-19 \\ 6A-3B-2C=6 \end{cases}$$

Вирішуємо систему:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 5A+2B+C=-19 \\ 6A-3B-2C=6 \end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} C=1-A-B \\ 5A+2B+1-A-B=-19 \\ 6A-3B-2(1-A-B)=6 \end{cases} \overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} C=1-A-B \\ 4A+B=-20 \\ 8A-B=8 \end{cases} \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 12A=-12 \Rightarrow A=-1$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} B=-16$$

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} C=18$$

(1) З першого рівняння виражаємо C і підставляємо його в 2-е і 3-е рівняння системи. Можна було б виразити C (або іншу літеру) з іншого рівняння, але в даному випадку вигідно виразити саме з 1-го рівняння, оскільки там найменші *коефіцієнти*.

(2) Приводимо подібні доданки в 2-му і 3-му рівняннях.
(3) Почленно складаємо 2-е і 3-е рівняння, при цьому, отримаємо рівність $12A=-12$, з якого випливає, що $A=-1$
(4) Підставляємо $A=-1$ в друге (або третє) рівняння, звідки знаходимо, що $B=-16$
(5) Підставляємо $A=-1$ і $B=-16$ в перше рівняння, отримаємо $C=18$.
Після вирішення системи завжди корисно зробити перевірку – підставити знайдені значення A, B, C *в кожне* рівняння системи, в результаті все повинно «зійтися».
A, B, C знайдені, при цьому:

$$\frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{-16}{x+2}+\frac{18}{x+3}$$

Чистове оформлення завдання повинно виглядати приблизно так:

$$\int\frac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}=\int\frac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}=(*)$$

Методом невизначених коефіцієнтів розкладемо підінтегральну функцію в суму елементарних дробів:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}=\frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$A(x+2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+2)=x^2-19x+6$$

$$A(x^2+5x+6)+B(x^2+2x-3)+C(x^2+x-2)=x^2-19x+6$$

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 5A+2B+C=-19 \\ 6A-3B-2C=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=1-A-B \\ 4A+B=-20 \\ 8A-B=8 \end{cases} \Rightarrow 12A=-12; A=-1; B=-16; C=18$$

$$(*)=\int\left(-\frac{1}{x-1}-\frac{16}{x+2}+\frac{18}{x+3}\right)dx=-\int\frac{dx}{x-1}-16\int\frac{dx}{x+2}+18\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$=-\ln|x-1|-16\ln|x+2|+18\ln|x+3|+C, \text{ где } C=const$$

Як бачите, основна складність завдання полягала в тому, щоб скласти (правильно!) і вирішити (правильно!) систему лінійних рівнянь. А на останньому етапі все не так складно: використаємо властивості лінійності невизначеного інтегралу і інтегруємо.

Перевірка: Диференціюємо відповідь:

$$(-\ln|x-1|-16\ln|x+2|+18\ln|x+3|+C)'=$$

$$=-(\ln|x-1|)'-16(\ln|x+2|)'+18(\ln|x+3|)'+(C)'=$$

$$=-\frac{1}{(x-1)}\cdot(x-1)'-16\cdot\frac{1}{(x+2)}\cdot(x+2)'+18\cdot\frac{1}{(x+3)}\cdot(x+3)'+0=$$

$$=-\frac{1}{(x-1)}-\frac{16}{(x+2)}+\frac{18}{(x+3)}=$$

$$=\frac{-(x+2)(x+3)-16(x-1)(x+3)+18(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)}=$$

$$=\frac{-(x^2+5x+6)-16(x^2+2x-3)+18(x^2+x-2)}{(x-1)(x^2+5x+6)}=$$

$$=\frac{-x^2-5x-6-16x^2-32x+48+18x^2+18x-36}{(x-1)(x^2+5x+6)}=\frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x^2+5x+6)}$$

Отримана вхідна підінтегральна функція, значить, інтеграл знайдено правильно.

В ході перевірки прийшлося приводити вираз до спільного знаменнику, і це не випадково.

Метод невизначених коефіцієнтів і приведення виразу до спільного знаменника – це взаємно обернені дії.

Повернемося до дробу з першого прикладу: $\frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}$. Неважко помітити, що в знаменнику всі множники РІЗНІ. Виникає питання, а що робити, якщо надана, наприклад, така дріб: $\frac{x^2-19x+6}{x^3(x+2)(x+3)^2(x^2+2x+13)}$? Тут в знаменнику в нас степені, або, математично *кратні множники*. Окрім того, є квадратний тричлен $x^2+2x+13$, який не можна розкласти на множники (легко впевнитись, що дискримінант рівняння $x^2+2x+13=0$ від`ємний, тому на множники тричлен ніяк розкласти не можна). Що робити? Розклад в суму елементарних дробів буде виглядати приблизно так $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$ з невідомими коефіцієнтами A, B, C зверху або якось інакше?

<u>Приклад 2</u>

Представити функцію $\frac{x^2-19x+6}{x^3(x+2)(x+3)^2(x^2+2x+13)}$ у вигляді суми елементарних дробів з невідомими коефіцієнтами.

Крок 1. Перевіряємо, чи правильна в нас дріб

Старша степінь чисельника: 2

Старша степінь знаменника: 8
$2 < 8$, значить, дріб є правильним.
Крок 2. Чи можливо що-небудь розкласти в знаменнику на множнику? Вочевидь, що ні, все вже розкладено. Квадратний тричлен $x^2+2x+13$ не розкладається в добуток по вказаним вище причинам. Добре. Роботи менше.
Крок 3. Представимо дробово-раціональну функцію у вигляді суми елементарних дробів.
В даному випадку, розклад має наступний вигляд:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+2}+\frac{E}{x+3}+\frac{F}{(x+3)^2}+\frac{Gx+H}{x^2+2x+13}=\frac{x^2-19x+6}{x^3(x+2)(x+3)^2(x^2+2x+13)}$$

Дивимось на наш знаменник: $x^3(x+2)(x+3)^2(x^2+2x+13)$
При розкладанні дробово-раціональної функції в суму елементарних дробів можна виділити три принципових моменти:
1) Якщо в знаменнику знаходиться «поодинокий» множник в першій степені (в нашому випадку $(x+2)$), то зверху ставимо невизначений коефіцієнт (в нашому випадку D).
2) Якщо в знаменнику є *кратний* множник x^n, то розкладати треба так:

$$\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\ldots+\frac{A_n}{x^n}$$

– тобто послідовно перебрати всі степені «ікса» від першої до енної степені. В нашому прикладі два кратних множники: x^3 і $(x+3)^2$, ще раз подивіться на приведений мною розклад і впевніться, що вони розкладені саме за цим правилом.
3) Якщо в знаменнику знаходиться многочлен другої степені, що не розкладається (в нашому випадку $x^2+2x+13$), то при розкладу в чисельнику треба записати лінійну функцію з невизначеними коефіцієнтами (в нашому випадку $Gx+H$ з невизначеними коефіцієнтами G і H).

<u>Приклад 3</u>

Знайти невизначений інтеграл.

$$\int\frac{(x^2-6x+8)dx}{x^3+8}$$

Крок 1. Зрозуміло, що дріб є правильним: $2<3$
Крок 2. Чи можна що-небудь розкласти в знаменнику на множники? Можна. Тут сума кубів $x^3+8=x^3+2^3$. Розкладаємо знаменник на множники, використовуючи формулу скороченого множення $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$\int\frac{(x^2-6x+8)dx}{x^3+8}=\int\frac{(x^2-6x+8)dx}{(x+2)(x^2-2x+4)}=(*)$$

Шаг 3. Методом невизначених коефіцієнтів розкладемо підінтегральну функцію в суму елементарних дробів:

$$\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}=\frac{x^2-6x+8}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

Зверніть увагу, що многочлен x^2-2x+4 не можна розкласти на множники (перевірте, що дискримінант від`ємний), тому зверху ми ставимо лінійну функцію $Bx+C$ з невизначеними коефіцієнтами, а не просто одну літеру.
Приводимо дріб до спільного знасенника:

$$\frac{A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{x^2-6x+8}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$A(x^2-2x+4)+B(x^2+2x)+C(x+2)=x^2-6x+8$$

Складаємо і вирішуємо систему:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+2B+C=-6 \\ 4A+2C=8 \end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} B=1-A \\ -2A+2(1-A)+C=-6 \\ 4A+2C=8 \end{cases} \overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} B=1-A \\ -4A+C=-8 \Rightarrow 3C=0 \\ 4A+2C=8 \end{cases}$$

$C=0; A=2; B=-1$

(1) З першого рівняння виражаємо B і підставляємо в друге рівняння системи (це найбільш раціональний спосіб).
(2) Приводимо подібні доданки в другому рівнянні.
(3) Почленно складаємо друге і третє рівняння системи.
Всі подальші розрахунки, в принципі, усні, так як система нескладна.

$$(*) \overset{(1)}{=} \int \left(\frac{2}{x+2} - \frac{x}{x^2-2x+4} \right) dx \overset{(2)}{=} 2\int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{-\frac{1}{2} d(x^2-2x+4) - dx}{(x^2-2x+4)} \overset{(3)}{=}$$

$$= 2\ln|x+2| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+4)} - \int \frac{dx}{x^2-2x+1+3} \overset{(4)}{=}$$

$$= 2\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4) - \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+(\sqrt{3})^2} \overset{(5)}{=}$$

$$= 2\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4) - \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C, \text{ где } C = const$$

(1) Записуємо суму дробів у відповідності зі знайденими коефіцієнтами A, B, C.
(2) Застосовуємо властивості лінійності невизначеного інтегралу. Що відбулося в другому інтегралі? З цим методом Ви можете ознайомитися в останньому параграфі презентації **Інтегрування деяких дробів**.
(3) Ще раз застосуємо властивості лінійності. В третьому інтегралі починаємо виділяти повний квадрат (передостанній параграф презентації **Інтегрування деяких дробів**).
(4) Беремо другий інтеграл, в третьоему – виділяємо повний квадрат.
(5) Беремо третій інтеграл. Готово.

Інтегрування неправильної дробово-раціональної функції

Перейдемо до розгляду випадку, коли старша степінь чисельника більша або дорівнює старшій степені знаменника.

Приклад 4

Знайти невизначений інтеграл.

$$\int \frac{(4x^4+8x^3-3x-3)dx}{x^3+2x^2+x}$$

Зрозуміло, що дана дріб є неправильною: $4 > 3$

Основний метод вирішення інтегралу з неправильної дробово-раціональної функції – це **ділення чисельника на знаменник**.

$$4x^4+8x^3+0x^2-3x-3 \;\Big|\; \underline{x^3+2x^2+x+0}$$

ВСІ степені, яких не вистачає, (і (або) вільні члени) без пропусків записуємо в ОБОХ многочленах з нульовими коефіцієнтами

Тепер маленька задачка, на який множник треба помножити x^3, щоб тримати $4x^4$?

Зрозуміло, що на $4x$:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+8x^3+0x^2-3x-3 & x^3+2x^2+x+0 \\ \hline & 4x \end{array}$$

Далі множимо $4x$ спочатку на x^3, потім – на $2x^2$, потім – на x, потім – на 0 і записуємо результати зліва:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+8x^3+0x^2-3x-3 & x^3+2x^2+x+0 \\ \cline{2-2} 4x^4+8x^3+4x^2+\ 0 & 4x \end{array}$$

Проводимо риску і виконуємо віднімання (з верху віднімаємо низ):

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+8x^3+0x^2-3x-3 & x^3+2x^2+x+0 \\ \cline{2-2} 4x^4+8x^3+4x^2+\ 0 & 4x \\ \cline{1-1} \qquad\qquad -4x^2-3x-3 & \end{array}$$

Старша степінь залишку $-4x^2-3x-3$ дорівнює двом, старша степінь дільника x^3+2x^2+x+0 – більша, вона дорівнює трьом, значить, більше розділити не вдасться. Якщо б спочатку в нас був в чисельнику многочлен п`ятої степені, то алгоритм ділення збільшився би на один крок.

Отже, наше рішення приймає наступний вигляд:

$$\int\frac{(4x^4+8x^3-3x-3)dx}{x^3+2x^2+x}=(*)$$

Ділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+8x^3+0x^2-3x-3 & x^3+2x^2+x+0 \\ \cline{2-2} 4x^4+8x^3+4x^2+\ 0 & 4x \\ \cline{1-1} \qquad\qquad -4x^2-3x-3 & \end{array}$$

$$(*)\overset{(1)}{=}\int\left(4x+\frac{(-4x^2-3x-3)}{x(x^2+2x+1)}\right)dx\overset{(2)}{=}2x^2+\int\frac{(-4x^2-3x-3)}{x(x+1)^2}dx=(*)$$

(1) Що дало ділення? Багато хорошого: тепер в нас два доданки, перший – інтегрується зовсім просто, а другий – **правильна дріб**, яку ми вирішувати вже вміємо.
Після ділення завжди бажано виконувати перевірку.

В розглянутому прикладі можна привести до спільного знаменника $4x+\frac{-4x^2-3x-3}{x(x^2+2x+1)}$, і в результаті отримаємо в точності вхідну неправильну дріб $\frac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+2x^2+x}$

(2) Від першого доданку одразу беремо інтеграл. Знаменник дробу розкладаємо на множники
Далі все йде за схемою:
Методом невизначених коефіцієнтів розкладемо підінтегральну функцію в суму елементарних дробів:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{(-4x^2-3x-3)}{x(x+1)^2}$$

$$A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx=-4x^2-3x-3$$

$$A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx=-4x^2-3x-3$$

$$\begin{cases} A+B=-4 \\ 2A+B+C=-3\Rightarrow B=-1; C=4 \\ A=-3 \end{cases}$$

$$(*)=2x^2+\int\left(-\frac{3}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{4}{(x+1)^2}\right)dx=2x^2-3\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{4}{x+1}+C,\ \text{где}\ C=const$$