Заняття 13

Ітегрування деяких дробів. Методи і прийоми вирішення

В даній презентації ми навчимося знаходити інтеграли від деяких видів дробів. Для успішного засвоєння матеріалу Вам повинні бути добре зрозумілими презентації **Невизначений інтеграл. Приклади рішень** і **Метод заміни змінної в невизначеному інтегралі**.

Як я вже зазначала, в інтегральному численні не має зручної формули для інтегрування дробів $\cancel{\int \frac{u}{v}dx = \frac{\int udx}{\int vdx}}$. І тому спостерігається тенденція: чим «складніша» дріб, тим важче знайти від неї інтеграл. В зв`язку з цим доводиться прибігати до різних хитрощів, про які я зараз розповім.

Метод штучного перетворення чисельника

Приклад 1

Знайти невизначений інтеграл. Виконати перевірку.

$$\int \frac{xdx}{x+3}$$

В презентації **Невизначений інтеграл. Приклади рішень** ми позбавлялися від добутку функцій в підінтегральному виразі, перетворюючи її на суму, яка зручна для інтегрування. Виявляється, що іноді в суму (різницю) можна перетворити і дріб!

Аналізуючи підінтегральну функцію, ми помічаємо, що і в чисельнику і в знаменнику в нас знаходяться многочлени першої степені: x и $x+3$.

Коли в чисельнику і знаменнику знаходяться многочлени **однакової** степені, то допомагає наступний штучний прийом: **в чисельнику ми повинні самостійно організувати <u>такий самий</u> вираз, що і в знаменнику:**

$$\int \frac{xdx}{x+3} = \int \frac{(x+3-3)dx}{x+3}$$

Розміркування можуть бути наступними: «В чисельнику мені потрібно організувати $x+3$, але якщо я додам до «ікса» трійку, то, для того, щоб вираз не змінився – я зобов`язана цю ж трійку і відняти».

Тепер можна почленно розділити чисельник на знаменник:

$$\int \frac{xdx}{x+3} = \int \frac{(x+3-3)dx}{x+3} = \int \left(1 - \frac{3}{x+3}\right)dx$$

В результаті ми досягли, чого і хотіли. Використовуємо перші два правила інтегрування:

$$\int \frac{xdx}{x+3} = \int \frac{(x+3-3)dx}{x+3} = \int \left(1 - \frac{3}{x+3}\right)dx =$$

$$= \int dx - 3\int \frac{dx}{x+3} = x - 3\ln|x+3| + C, \text{ где } C = const$$

Готово. Перевірку при бажанні виконайте самостійно.

Зверніть увагу, що $\frac{1}{x+3}$ в другому інтегралі – це «халявна» складна функція, про особливості її інтегрування я розповідала в презентації **Метод заміни змінної в невизначеному інтегралі**.

До речі, розглянутий інтеграл можні вирішити і методом заміни змінної, позначаючи $t = x+3$, але запис рішення вийде значно довшим.

Приклад 2

Знайти невизначений інтеграл. Виконайте перевірку.

$$\int \frac{x^2 dx}{2x-1}$$

Починаємо підбирати чисельник.

Алгоритм підбору чисельника приблизно такий:

1) В чисельнику мені треба організувати $2x-1$, але там x^2. Що робити? Беру $2x-1$ в дужки і помножую на x: $x(2x-1)$.

2) Тепер спробую розкрити ці дужки, що вийде? $2x^2-x$. Хмм… вже краще, але ніякої двійки при x^2 в чисельнику не має. Що робити? Необхідно домножити на $\frac{1}{2}$:

$\frac{1}{2}x(2x-1)$

3) Знову розкриваю дужки: $x^2-\frac{1}{2}x$. А ось і перший успіх! Необхідний x^2 отримали! Але проблема в тому, що з`явився зайвий доданок $-\frac{1}{2}x$. Що робити? Щоб вираз не змінився, я зобов`язана додати до своєї конструкції ті ж самі $\frac{1}{2}x$:

$\frac{1}{2}x(2x-1)+\frac{1}{2}x$. Жити стало легше. А чи можна ще раз в чисельнику організувати $(2x-1)$?

4) Можна. Спробуємо: $\frac{1}{2}x(2x-1)+\frac{1}{2}(2x-1)$. Розкриваємо дужки другого доданку:

$\frac{1}{2}x(2x-1)+x-\frac{1}{2}$. Пробачте, але в мене взагалі-то було на попередньому кроці $+\frac{1}{2}x$, а не $+x$. Що робити? Необхідно домножити другий доданок на $\frac{1}{2}$:

$\frac{1}{2}x(2x-1)+\frac{1}{4}(2x-1)$

5) Знову для перевірки розкриваю дужки в другому доданку:

$\frac{1}{2}x(2x-1)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$. Ось тепер нормально: отримали $+\frac{1}{2}x$ з кінцевої конструкції пункту 3! Але знову є маленьке «але», з`явився зайвий доданок $-\frac{1}{4}$, значить, я зобов`язана додати до свого виразу $\frac{1}{4}$:

$\frac{1}{2}x(2x-1)+\frac{1}{4}(2x-1)+\frac{1}{4}$

Якщо все виконано правильно, то при розкритті всіх дужок в нас повинен вийти вхідний чисельник підінтегральної функції. Перевіряємо:

$\frac{1}{2}x(2x-1)+\frac{1}{4}(2x-1)+\frac{1}{4}=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=x^2$ Гуд.

Таким чином:

$$\int \frac{x^2dx}{2x-1} = \int \frac{\frac{1}{2}x(2x-1)+\frac{1}{4}(2x-1)+\frac{1}{4}}{2x-1}dx =$$

$$= \int\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4(2x-1)}\right)dx = \frac{1}{2}\int xdx+\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{2x-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\ln|2x-1|+C,$$

$$\text{где } C = const$$

Готово. В останньому доданку я застосувала метод піднесення функції під диференціал. Якщо знайти похідну від відповіді і привести вираз до спільного знаменника, то в нас вийде вхідна підінтегральна функція $\frac{x^2dx}{2x-1}$. Розглянутий метод розкладення x^2 в суму – є не що інше, як зворотна дія по приведенню виразу до спільного знаменника.
Алгоритм підбору чисельника в подібних прикладах краще виконувати на чорнетці.
Окрім алгоритму підбору можна застосувати ділення стовпчиком многочлена на многочлен, ця техніка буде розглянута в наступній презентації **Інтегрування дробово-раціональної функції**.
Увага, важливо! Приклад №1 є типовим і зустрічається часто. В тому числі, подібні інтеграли нерідко виникають в ході рішення інших інтегралів, наприклад, при інтегруванні іраціональних функцій (коренів).
Розглянутий прийом працює і у випадку, якщо **старша степінь чисельника, більша ніж старша степінь знаменника**.

Метод піднесення під знак диференціалу для найпростіших дробів
Переходимо до розгляду наступного типу дробів.

$\int\frac{dx}{ax^2+c}$, $\int\frac{dx}{ax^2-c}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2\pm c}}$, $\int\frac{dx}{\sqrt{c-ax^2}}$ (коефіцієнти a і c не дорівнюють нулю).
Пара прикладів з арксинусом і арктангенсом вже розглядалися в презентації **Метод заміни змінної в невизначеному інтегралі**. Вирішуються такі приклади способом піднесення функції під знак диференціалу і подальшим інтегруванням за допомогою таблиці. Ось ще типові приклади з довгим і високим логарифмом:

Приклад 3

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+3}} = \frac{1}{3}\int\frac{d(3x)}{\sqrt{(3x)^2+3}} = \frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2+3}\right|+C, \text{ где } C = const$$

Приклад 4

$$\int\frac{dx}{2x^2-5} = \int\frac{dx}{(\sqrt{2}x)^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}x)}{(\sqrt{2}x)^2-(\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{5}}{\sqrt{2}x+\sqrt{5}}\right|+C = \frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{5}}{\sqrt{2}x+\sqrt{5}}\right|+C, \text{ где } C = const$$

Тут треба взяти в руки таблицю інтегралів і прослідкувати, за якими формулами і **як** виконується перетворення. Зверніть увагу, **як і навіщо** виділяються квадрати в даних прикладах. В прикладі 4 спочатку необхідно представити знаменник $2x^2-5$ у вигляді $(\sqrt{2}x)^2-(\sqrt{5})^2$, потім піднести $\sqrt{2}x$ під знак диференціалу. А зробити це все треба для того, щоб скористатися стандартною табличною формулою $\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$.

Метод виділення повного квадрату

Інтеграли вигляду $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (коефіцієнти a і b не дорівнюють нулю) вирішуються **методом виділення повного квадрату.**

Такі інтеграли зводяться до одного з чотирьох табличних інтегралів, які ми щойно роздивилися. А досягається це за допомогою знайомих формул скороченого множення: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ або $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

Формули застосовуються саме в такому напрямку, тобто, ідея методу полягає в тому, щоб в знаменнику штучно організувати вирази $a^2+2ab+b^2$ або $a^2-2ab+b^2$, а потім перетворити їх відповідно в $(a+b)^2$ або $(a-b)^2$.

<u>Приклад 5</u>

Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+4x}$$

Це простий приклад, в якому **при доданку x^2 – одиничний коефіцієнт** (а не яке-небудь число або мінус).

Дивимось на знаменник, тут все явно зведеться до випадку $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$. Почнемо перетворення знаменника:

$$x^2+4x=x^2+2\cdot 2x$$

Вочевидь, що треба додати 4. І, щоб вираз не змінився – цю ж четвірку і відняти:

$$x^2+4x=x^2+2\cdot 2x=x^2+4x=x^2+2\cdot 2x+4-4$$

Тепер можна застосувати формулу $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$:

$$x^2+4x=x^2+2\cdot 2x=x^2+4x=x^2+2\cdot 2x+4-4=(x+2)^2-4$$

Після того, як перетворення закінчено ЗАВЖДИ бажано виконувати зворотний хід:

$(x+2)^2-4=x^2+4x+4-4=x^2+4x$, все нормально, помилок не має.

Чистове оформлення розглянутого прикладу повинно виглядати приблизно так:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x}=\int \frac{dx}{x^2+4x+4-4}=\int \frac{dx}{(x+2)^2-4}=\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2-2^2}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x+2-2}{x+2+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x+4}\right|+C, \text{ где } C=const$$

Готово. Піднесенням «халявної» складної функції під знак диференціалу: $d(x+2)$, в принципі, можна було відкинути

<u>Приклад 6</u>

Знайти невизначений інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}}$$

Що робити, коли перед x^2 знаходиться мінус? В цьому випадку, необхідно винести мінус за дужки і розташувати доданки в необхідному нам порядку: $2+2x-x^2=2-(x^2-2x)$.

Константу («двійку» в даному випадку) **не чіпаємо!**

Тепер в дужках додаємо одиничку. Аналізуючи вираз, приходимо до висновку, що і за дужкою необхідно одиничку – додати:

$$2+2x-x^2=2-(x^2-2x)=2+1-(x^2-2x+1)$$

Тут отримали формулу $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$, застосовуємо:

$$2+2x-x^2=2-(x^2-2x)=2+1-(x^2-2x+1)=3-(x-1)^2$$

ЗАВЖДИ виконуємо на чорнетці перевірку:
$3-(x-1)^2=3-(x^2-2x+1)=3-x^2+2x-1=2+2x-x^2$, що і потребувалося перевірити.
Чистове оформлення прикладу виглядає приблизно так:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{2-(x^2-2x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{2+1-(x^2-2x+1)}}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{3-(x-1)^2}}=\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-(x-1)^2}}=\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

где $C=const$

Ускладнюємо задачу

Приклад 7

Знайти невизначений інтеграл:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+4x+7}}$$

Тут при доданку x^2 вже не одиничний коефіцієнт, а «п`ятірка».

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+4x+7}}\overset{(1)}{=}\int\frac{dx}{\sqrt{5\cdot\left(x^2+\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}\right)}}\overset{(2)}{=}\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}}}\overset{(3)}{=}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\cdot\frac{2}{5}x+\frac{7}{5}}}\overset{(4)}{=}\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\cdot\frac{2}{5}x+\frac{4}{25}+\frac{7}{5}-\frac{4}{25}}}\overset{(5)}{=}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{7}{5}-\frac{4}{25}}}\overset{(6)}{=}\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+\frac{2}{5}+\sqrt{\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{7}{5}-\frac{4}{25}}\right|+C\overset{(7)}{=}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+\frac{2}{5}+\sqrt{x^2+\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}}\right|+C,\text{ где } C=const$$

(1) Якщо при x^2 знаходиться константа, то її одразу виносимо за дужки.
(2) І взагалі цю константу завжди краще винести за границі інтегралу, щоб вона не заважала під ногами.
(3) Вочевидь, що все зведеться до формули $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$. Треба розібратися в доданку $2ab$, а саме, отримати «двійку»
(4) Ага, $\frac{2}{5}$. Значить, до виразу додаємо $\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$, і цю ж дріб віднімаємо.
(5) Тепер виділяємо повний квадрат. В загальному випадку також треба відняти $\frac{7}{5}-\frac{4}{25}$, але тут в нас вимальовується формула довгого логарифму $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C$, і дію $\frac{7}{5}-\frac{4}{25}$ виконувати не має сенсу, чому – стане ясно трохи нижче.
(6) Відповідно, можна застосувати формулу $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C$, тільки замість «ікс» в нас $x+\frac{2}{5}$, що не відміняє справедливість табличного інтегралу. Строго кажучи,

пропущено один крок – перед інтегруванням функцію $x+\frac{2}{5}$ слід було піднести під знак диференціалу: $\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{d\left(x+\frac{2}{5}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{7}{5}-\frac{4}{25}}}$, але, як я вже неодноразово зазначала, це часто пропускають.

(7) У відповіді під коренем бажано розкрити всі дужки назад:

$$\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{7}{5}-\frac{4}{25}=x^2+\frac{4}{5}x+\frac{4}{25}+\frac{7}{5}-\frac{4}{25}=x^2+\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}$$

Складно? Це ще не саме складне в інтегральному численні. Хоча, приклади, що розглядаються,не стільки складні, скільки потребують гарної техніки обчислення.

Піднесення чисельника під знак диференціалу

Це заключна частина презентації, тим не менше, інтеграли такого типу зустрічаються доволі часто! Інтеграли, які ми будемо розглядати, схожі на інтеграли попереднього параграфу, вони мають вигляд: $\int\frac{(fx+g)dx}{ax^2+bx+c}$ або $\int\frac{(fx+g)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (коефіцієнти a, b і f не дорівнюють нулю).

Тобто, в чисельнику в нас з`явилася лінійна функція. Як вирішувати такі інтеграли?

<u>Приклад 8</u>

Знайти невизначений інтеграл:

$$\int\frac{(3x+2)dx}{x^2+x-1}$$

Будь ласка, будьте уважні, зараз ми розглянемо типовий алгоритм.

1) Коли даний інтеграл вигляду $\int\frac{(fx+g)dx}{ax^2+bx+c}$ або $\int\frac{(fx+g)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (коефіцієнти a, b і f не дорівнюють нулю), то перше, що ми робимо, це… беремо чорнетку. Річ у тому, що зараз нам доведеться виконати невеликий підбір.

2) Беремо вираз, який знаходиться в знаменнику (неважливо – під коренем або без кореня) під знак диференціалу, в даному прикладі: $d(x^2+x-1)$

3) Розкриваємо диференціал:

$$d(x^2+x-1)=(x^2+x-1)'dx=(2x+1)dx$$

Дивимось на чисельник нашого інтегралу: $(3x+2)dx$

Дещо різні речі вийшли…. А тепер нам потрібно підібрати множник для диференціалу $d(x^2+x-1)$, такий, щоб при його розкритті вийшов, як мінімум, $3x$. В даному випадку підходящим множником є: $\frac{3}{2}d(x^2+x-1)$

4) Для самоконтролю знову розкриваємо наш диференціал:

$$\frac{3}{2}d(x^2+x-1)=\frac{3}{2}(x^2+x-1)'dx=\frac{3}{2}(2x+1)dx=\left(3x+\frac{3}{2}\right)dx$$

Знову дивимось на чисельник нашого інтегралу: $(3x+2)dx$.

Вже ближче, але в нас не той доданок: $+\frac{3}{2}$

5) До нашого диференціалу $\frac{3}{2}d(x^2+x-1)$:

– приписуємо доданок, який в нас спочатку був в підінтегральній функції:

$\frac{3}{2}d(x^2+x-1)+2$

– Віднімаємо (*в даному випадку – віднімаємо,іноді треба, навпаки, додавати)* наше «не той» доданок: $\frac{3}{2}d(x^2+x-1)+2-\frac{3}{2}$

– Обидві константи беремо в дужки і приписуємо справа значок диференціалу:

$\frac{3}{2}d(x^2+x-1)+\left(2-\frac{3}{2}\right)dx$

– Віднімаємо *(в деяких прикладах необхідно додати)* константи:

$\frac{3}{2}d(x^2+x-1)+\frac{1}{2}dx$

6) Виконуємо перевірку:

$$\frac{3}{2}d(x^2+x-1)+\frac{1}{2}dx=\frac{3}{2}(x^2+x-1)'dx+\frac{1}{2}dx=\frac{3}{2}(2x+1)dx+\frac{1}{2}dx=$$

$$=\left(3x+\frac{3}{2}\right)dx+\frac{1}{2}dx=\left(3x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)dx=(3x+2)dx$$

В нас вийшов в точності чисельник підінтегральної функції, значить, підбір виконаний успішно.

Чистове оформлення рішення виглядає приблизно так:

$$\int\frac{(3x+2)dx}{x^2+x-1}\overset{(1)}{=}\int\frac{\frac{3}{2}d(x^2+x-1)+\frac{1}{2}dx}{x^2+x-1}\overset{(2)}{=}$$

$$=\int\left(\frac{\frac{3}{2}d(x^2+x-1)}{x^2+x-1}+\frac{\frac{1}{2}dx}{x^2+x-1}\right)\overset{(3)}{=}\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+x-1)}{x^2+x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x-1}\overset{(4)}{=}$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x-1\right|+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-1-\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x-1\right|+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x-1\right|+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x-1\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x-1\right|+\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+1-\sqrt{5}}{2x+1+\sqrt{5}}\right|+C,\text{ где } C=const$$

(1) Виконуємо на чорнетці підбір чисельника згідно з вищерозглянутим алгоритмом. Обов`язково виконуємо перевірку, чи правильно виконаний підбір. При деякому досвіді вирішення інтегралів підбір неважко виконати і подумки.

(2) Почленно ділимо чисельник на знаменник. В практичному вирішенні задач даний крок можна опускати

(3) Використовуючи властивість лінійності, розділяємо інтеграли. Всі константи доречно винести за знаки інтегралів.

(4) Перший інтеграл фактично є табличним, використаємо формулу $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$ (константу C припишемо пізніше, коли візьмемо другий інтеграл). В другому інтегралі виділяємо повний квадрат (такий тип інтегралів ми розглядали в попередньому параграфі).
Інше справа техніки.