Заняття 11

Метод заміни змінної в невизначеному інтегралі.
Приклади вирішення

В даній презентації ми ознйомимося з одним з найважливіших і найбільш розповсюджених прийомів, які застосовуються в ході рішення невизначених інтегралів – методом заміни змінної.

Технічно метод заміни змінної в невизначеному інтегралі реалізується двома способами:
– **Піднесення функції під знак диференціалу**;
– **Власне заміна змінної**.
Це одне й те саме, але оформлення рішення виглядає по-різному.
Почнемо з більш простого випадку.

Піднесення функції під знак диференціалу

Приклад 1
Знайти невизначений інтеграл. Виконати перевірку.
$$\int \sin(3x+1)dx$$
Дивимось на таблицю інтегралів і знаходимо схожу формулу: $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Но проблема полягає в тому, що в нас під синусом не просто літера «ікс», а складний вираз. Що робити?

Підносимо функцію $(3x+1)$ під знак диференціалу:
$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1)$$
Розкриваючи диференціал, легко перевірити, що:
$$\frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1) = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\cdot(3x+1)'dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\cdot(3+0)dx = \int \sin(3x+1)dx$$
Фактично $\int \sin(3x+1)dx$ и $\frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1)$ – це запис одного і того ж.
Але, тим не менше, залишилося питання, а як ми прийшли до думки, що на першому кроці необхідно записати наш інтеграл саме так: $\frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1)$? Чому так, а не інакше?
Формула $\int \sin x dx = -\cos x + C$ **(і всі інші табличні формули) справедливі і застосовуються НЕ ТІЛЬКИ для змінної** x**, але й для будь-якого складного виразу ЛИШЕ Б АРГУМЕНТ ФУНКЦІЇ** ($3x+1$ – в нашому прикладі) І **ВИРАЗ ПІД ЗНАКОМ ДИФЕРЕНЦІАЛУ БУЛИ ОДНАКОВИМИ**.
Тому роздуми при вирішенні повинні складатися приблизно так: «Мені треба вирішити інтеграл $\int \sin(3x+1)dx$. Я подивився в таблицю і знайшов схожу формулу $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Але в мене складний аргумент $(3x+1)$ і формулою я одразу скористатися не можу. Однак якщо мені вдасться отримати $(3x+1)$ і під знаком диференціалу, то все буде нормально. Якщо я запишу $d(3x+1)$, тоді

$d(3x+1)=(3x+1)'dx=3dx$. Але у вхідному інтегралі $\int \sin(3x+1)dx$ множника-трійки не має, тому, щоб підінтегральна функція не змінилася, мені треба її домножити на $\frac{1}{3}$». В ході приблизно таких роздумів і народжується запис:

$$\int \sin(3x+1)dx=\frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1)$$

Тепер можна користуватися табличною формулою $\int \sin xdx=-\cos x+C$:

$$\int \sin(3x+1)dx=\frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1)=$$

$$=-\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C,\ \text{где } C=const$$

Готово

Єдина відмінність, в нас не літера «ікс», а складний вираз $3x+1$.

Виконаємо перевірку. Відкриваємо таблицю похідних і диференціюємо відповідь:

$$\left(-\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C\right)'=-\frac{1}{3}(\cos(3x+1))'+(C)'=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot(-\sin(3x+1))\cdot(3x+1)'+0=\frac{1}{3}\sin(3x+1)\cdot(3+0)=\sin(3x+1)$$

Отримана вхідна підінтегральна функція, значить, інтеграл знайдено правильно.

Зверніть увагу, що в ході перевірки ми використовували правило диференціювання складної функції $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$. **По суті діла піднесення функції під знак диференціалу і** $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$ **– це два взаємно зворотних правила**.

<u>**Приклад 2**</u>

Знайти невизначений інтеграл. Виконати перевірку.

$$\int \frac{dx}{5-2x}$$

Аналізуємо підінтегральну функцію. Тут в нас дріб, причому в знаменнику лінійна функція (з «іксом» в першій степені). Дивимось в таблицю інтегралів і знаходимо найбільш схожу функцію: $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

Підносимо функцію $5-2x$ під знак диференціалу:

$$\int \frac{dx}{5-2x}=-\frac{1}{2}\int \frac{d(5-2x)}{5-2x}$$

Ті, кому важко одразу зметикувати, на яку дріб треба домножувати, можуть швиденько на чорнетці розкрити диференціал: $d(5-2x)=(5-2x)'dx=(0-2)dx=-2dx$. Отже, отримали $-2dx$, значить, щоб нічого не змінилося, мені необхідно домножити інтеграл на $-\frac{1}{2}$.

Далі використовуємо табличну формулу $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$:

$$\int \frac{dx}{5-2x}=-\frac{1}{2}\int \frac{d(5-2x)}{5-2x}=-\frac{1}{2}\ln|5-2x|+C,\ \text{где } C=const$$

Перевірка:

$$\left(-\frac{1}{2}\ln|5-2x|+C\right)' = -\frac{1}{2}(\ln|5-2x|)' + (C)' =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(5-2x)}\cdot(5-2x)' + 0 = -\frac{1}{2(5-2x)}\cdot(0-2) = \frac{1}{(5-2x)}$$

Отримано вхідну підінтегральну функцію, значить, інтеграл знайдено правильно.

Приклад 3

Знайти невизначений інтеграл. Виконати перевірку.

При деякому досвіді рішення інтегралів, подібніе приклади будуть здаватися легкими:

$$\int e^{7-x}dx = -\int e^{7-x}d(7-x) = -e^{7-x} + C, \text{ где } C = const$$

$$\int (2x+1)^5 dx = \frac{1}{2}\int (2x+1)^5 d(2x+1) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}(2x+1)^6 + C = \frac{1}{12}(2x+1)^6 + C, \text{ где } C = const$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{5}} = 5\int \frac{d\left(\frac{x}{5}\right)}{\cos^2\frac{x}{5}} = 5tg\frac{x}{5} + C, \text{ где } C = const$$

$$\int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{1+(3x)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}arctg(3x) + C, \text{ где } C = const$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-(\sqrt{2}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2^2-(\sqrt{2}x)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right) + C, \text{ где } C = const$$

І так далі.

В кінці даного параграфу хотілося б ще зупинитися на «халявному» випадку, коли в лінійній функції змінна x входить з одиничним коефіцієнтом, наприклад:

$$\int \frac{dx}{x+3}$$

Строго кажучи, рішення повинно виглядати так:

$$\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C, \text{ где } C = const$$

Як бачите, піднесення функції $x+3$ під знак диференціалу пройшло «безболісно», без всіляких домножень. Тому на практиці таке довге рішення зневажають і одразу записують, що $\int \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| + C$.

Метод заміни змінної в невизначеному інтегралі

Переходимо до розгляду загального випадку – методу заміни змінних в невизначеному інтегралі.

Приклад 4

Знайти невизначений інтеграл.

$$\int \sin(3x+1)dx$$

В якості прикладу я взяла інтеграл, який ми розглядали на початку презентації. Як ми вже говорили, для вирішення інтегралу нам сподобалась таблична формула $\int \sin x dx = -\cos x + C$, и все діло хотілося б звести до неї.

Ідея методу заміни полягає в тому, щоб **складні вирази (або деяку функцію) замінити однією літерою**.

В даному випадку напрошується: $t = 3x+1$

Друга за популярністю літера для заміни – це літера z.

Отже:

$$\int \sin\underbrace{(3x+1)}_{t}dx$$

Але при заміні в нас залишається dx! Можливо, багато хто здогадалися, що якщо виконується перехід до нової змінної t, то в новому інтегралі все повинно бути выражено через літеру t, і диференціалу dx там зовсім не місце.

Слідує логічний висновок, що dx необхідно **перетворити в деякий вираз, який залежить тільки від** t.

Дія наступна. Після того, як ми підібрали заміну, в даному випадку, $t = 3x+1$, нам треба знайти диференціал dt. із диференціалами, думаю, дружба вже у всіх налагоджена.

Так як $t = 3x+1$, то

$$dt = d(3x+1) = (3x+1)'dx = 3dx$$

Після разбірок з диференціалом кінцевий результат рекомендую переписати максимально коротко: $dt = 3dx$

Тепер за правилами пропорції виражаємо необхідний нам dx:

$$dx = \frac{dt}{3}$$

В результаті:

$$\int \sin\underbrace{(3x+1)}_{t}\underbrace{dx}_{\frac{dt}{3}}$$

Таким чином:

$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin t dt$$

А це вже самий що не є табличний інтеграл $\int \sin x dx = -\cos x + C$ ([таблиця інтегралів](), відповідно, справедлива і для змінної t).

$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin t dt = -\frac{1}{3}\cos t + C$$

Залишилося провести зворотну заміну. Згадуємо, що $t = 3x+1$.

$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin t dt = -\frac{1}{3}\cos t + C \overset{t=3x+1}{=}$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C, \textit{где } C = const$$

Готово.
Чистове оформлення розглянутого прикладу повинно виглядати приблизно так:
“

$$\int \sin(3x+1)dx = (*)$$

Проведемо заміну: $t = 3x+1$

$$dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

$$(*) = \frac{1}{3}\int \sin t dt = -\frac{1}{3}\cos t + C \overset{t=3x+1}{=}$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C, \textit{где } C = const$$

“

Значок $(*)$ не несе ніякого математичного сенсу, ві позначає, що ми перервали рішення для проміжкових роз`яснень.
Увага! В наступних прикладах знаходження диференціалу dt розписуватися не буде.
А тепер самий час згадати перший спосіб рішення:

$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1) =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C, \textit{где } C = const$$

В чому різниця? Принципової різниці не має. Це фактично одне й те саме. Але **з точки зору оформлення завдання метод піднесення функції під знак диференціалу – коротше**.

Виникає питання. Якщо перший спосіб коротший, то навіщо тоді використовувати метод заміни? Річ в тому, що для ряду інтегралів не так-то просто «підігнати» функцію під знак диференціалу.
<u>Приклад 5</u>
Знайти невизначений інтеграл.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} = (*)$$

Проведемо заміну: $t = 3-4x$ (іншу заміну тут важко придумати)

$$dt = -4dx \Rightarrow dx = -\frac{dt}{4}$$

$$(*) = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\frac{1}{4}\int t^{-\frac{2}{3}}dt = -\frac{1}{4}\cdot 3t^{\frac{1}{3}} + C \overset{t=3-4x}{=} =$$

$$= -\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{3-4x} + C, \textit{где } C = const$$

Як бачите, в результаті заміни вхідний інтеграл значно спростився – звівся до звичайної степеневої функції.
Це і є мета заміни – спростити інтеграл.

~~Просунуті~~ люди запросто вирішать даний інтеграл методом піднесення функції під знак диференціалу:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} = -\frac{1}{4}\int (3-4x)^{-\frac{2}{3}} d(3-4x) = -\frac{1}{4}\cdot 3\cdot (3-4x)^{\frac{1}{3}} + C =$$

$$= -\frac{3\cdot\sqrt[3]{3-4x}}{4} + C, \text{ где } C = const$$

Інша річ, що таке рішення вочевидь далеко не для всіх студентів. Крім того, вже в цьому прикладі використання методу піднесення функції під знак диференціалу *значно підвищує ризик заплутатися в рішенні*.

<u>Приклад 6</u>

Знайти невизначений інтеграл.

$$\int \frac{xdx}{(3x+2)^7} = (*)$$

Заміна: $t = 3x+2$

Залишилось з`ясувати, у що перетвориться xdx

$$dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

Добре, dx ми виразили, але що робити з «іксом», що залишився в чисельнику?!

Час від часу в ході рішення інтегралів зустрічається наступний фокус: x ми виразимо з цієї ж заміни $t = 3x+2$!

$$t = 3x+2 \Rightarrow 3x = t-2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}$$

$$(*) = \int \frac{\left(\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{dt}{3}}{t^7} = \frac{1}{9}\int \frac{(t-2)dt}{t^7} = \frac{1}{9}\int \left(\frac{1}{t^6} - \frac{2}{t^7}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{9}\int \left(t^{-6} - 2t^{-7}\right)dt = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{(-5)}t^{-5} - 2\cdot\frac{1}{(-6)}t^{-6}\right) + C \overset{t=3x+2}{=}$$

$$= \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{5(3x+2)^5} + \frac{1}{3(3x+2)^6}\right) + C, \text{ где } C = const$$

Готово.

<u>Приклад 7</u>

Знайти невизначений інтеграл.

$$\int \frac{xdx}{4x^2+1}$$

Деякі звернули увагу, що в моїй довідковій таблиці не має правила заміни змінної. Зроблено це свідомо. Правило внесло б плутанину в пояснення і розуміння, оскільки в розглянутих прикладах воно не фігурує в явному вигляді.

Настав час розповісти про основну передумову використання методу заміни змінної: **в підінтегральному виразі повинна знаходитися деяка функція $\varphi(x)$ і її похідна $\varphi'(x)$:**

$\int \varphi(x)\cdot\varphi'(x)dx$ (функції $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ можуть бути і не в добутку)

В зв`язку з цим при знаходженні інтегралів доволі часто доводиться заглядати в таблицю похідних.

В прикладі, що розглядається в прикладі, помічаємо, що степінь чисельника на одиницю менше за степені знаменника. В таблиці похідних знаходимо формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$, яка як раз понижує степінь на одиницю. А, значить, якщо позначити за t знаменник, то маємо великі шанси, що чисельник xdx перетвориться у щось хороше.

$$\int \frac{xdx}{4x^2+1} = (*)$$

Заміна: $t = 4x^2+1 \Rightarrow dt = 8xdx \Rightarrow xdx = \frac{dt}{8}$

$$(*) = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{8}\ln|t| + C \overset{t=4x^2+1}{=} \frac{1}{8}\ln|4x^2+1| + C, \text{ где } C = const$$

До речі, тут не так складно піднести функцію під знак диференціалу:

$$\int \frac{xdx}{4x^2+1} = \frac{1}{8}\int \frac{d(4x^2+1)}{4x^2+1} = \frac{1}{8}\ln|4x^2+1| + C, \text{ где } C = const$$

Слід зазначити, що для дробів на кшталт $\int \frac{xdx}{4x^2+2x+1}$, $\int \frac{(x-3)dx}{4x^2+1}$ такий фокус вже не пройде (точніше кажучи, застосовувати треба буде не тільки прийом заміни). Інтегрувати деякі дроби можна навчитися на занятті **Інтегрування деяких дробів**.

Ось ще пара типових прикладів:

Приклад 8

Знайти невизначений інтеграл.

$$\int \frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx = (*)$$

Дивимось в таблицю похідних і знаходимо наш арккосинус: $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. У нас в підінтегральному виразі знаходиться арккосинус і дещо схоже на його похідну.

Загальне правило:

За t позначаємо саму функцію (а не її похідну).

В даному випадку: $t = \arccos 3x$. Залишилось з`ясувати, у що перетвориться частина, що залишилася, підінтегрального виразу $\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

В цьому прикладі знаходження dt я розпишу ретельно тому, що $\arccos 3x$ – складна функція.

$$dt = d(\arccos 3x) = (\arccos 3x)'dx = -\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot (3x)'dx = -\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}}$$

Або коротше: $dt = -\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

За правилом пропорції виражаємо необхідний нам залишок: $\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = -\frac{dt}{3}$

Таким чином:

$$(*) = -\frac{1}{3}\int tdt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}t^2 + C \overset{t=\arccos 3x}{=} -\frac{\arccos^2 3x}{6} + C, \text{ где } C = const$$

Ось тут піднести функцію під знак диференціалу вже не так-то просто.