Заняття 10

Невизначений ітеграл. Приклади ретельного вирішення

В даній презентації почнемо вивчення теми **Невизначений інтеграл**, а також ретельно розберемо приклади вирішення найпростіших (і не зовсім) інтегралів. Наша задача – навчитися вирішувати інтеграли.

Що необхідно знати для успішного освоєння матеріалу? Для того щоб впоратись з інтегральним числення Вам необхідно вміти находити похідні, мінімум, на середньому рівні. З**находження похідних і знаходження невизначених інтегралів (диференціювання і інтегрування) – це два взаємно зворотні дії**, як, наприклад, додавання/віднімання або множення/ділення. Таким чином, без навичок знаходження похідних, на жаль, далі не просунутись.

Отже, почнемо з простого. Подивимось на таблицю інтегралів. Як і в похідних, ми помічаємо декілька правил інтегрування і таблицю інтегралів від деяких елементарних функцій. Неважко помітити, що будь-який табличний інтеграл (да і взагалі будь-який невизначений інтеграл) має вигляд:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ где } C = const$$

Одразу розбираємося в позначеннях і термінах:

$\int$ – значок інтегралу.

$f(x)$ – підінтегральна функція.

dx – значок диференціалу. При запису інтегралу і в ході рішення важливо не загубити даний значок.

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз або «начинка» інтегралу.

$F(x)$ – первісна функція.

$F(x)+C$ – множина первісних функцій. Не треба сильно грузитися термінами, саме важливе, що в будь-якому невизначеному інтегралі до відповіді додається константа C.

Вирішити інтеграл – це означає знайти визначену функцію $F(x)+C$, користуючись деякими правилами, прийомами і таблицею.

Ще раз подивимося на запис:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Подивимось в таблицю інтегралів.

Що відбувається? Ліві частини $\int f(x)dx$ в нас **перетворюються** в інші функції: $F(x)+C$. Спростимо наше визначення.

Вирішити невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ – це означає ПЕРЕТВОРИТИ його на визначену функцію $F(x)+C$, уористуючись деякими правилами, прийомами і таблицею.

Візьмемо, наприклад, табличний інтеграл $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Що відбулося? $\int \sin x dx$ перетворився на функцію $-\cos x + C$.

Як і у випадку з похідними, для того, щоб навчитися знаходити інтеграли, не обов`язково бути в курсі, **що таке інтеграл**, первісна функція з теоретичної точки зору. Достатньо просто виконувати перетворення за деякими формальним правилами. Так, у випадку $\int \sin xdx = -\cos x + C$ зовсім не обов`язково розуміти, чому інтеграл $\int \sin xdx$ перетворюється саме на $-\cos x + C$. Поки можна прийняти цю і інші формули як даність.

Так як диференціювання і інтегрування – протилежні операції, то для будь-якої первісної, яка знайдена <u>правильно</u>, справедливим є наступне:

$(F(x)+C)' = F'(x)+0 = f(x)$

Іншими словами, якщо **продиференціювати правильну відповідь, то обов`язково повинна вийти вхідна підінтегральна функція**.

Повернемося до того ж табличного інтегралу $\int \sin xdx = -\cos x + C$.

Впевнимося в справедливості даної формули. Беремо похідну від правої частини:

$(-\cos x + C)' = -(\cos x)' + (C)' = -(-\sin x) + 0 = \sin x$ – вхідна підінтегральна функція.

Ось, до речі, стало зрозуміліше, чому до функції $F(x)$ завжди приписується константа C. При диференціюванні константа завжди перетворюється в нуль.

Вирішити невизначений інтеграл – це означає знайти **множину** <u>всіх</u> первісних, а не якусь одну функцію. В табличному прикладі, що розглядається $-\cos x + 5$, $-\cos x - \frac{4}{7}$, $-\cos x + \sin 2$, $-\cos x - e^3$ і т. д. – всі ці функції є рішення інтегралу $\int \sin xdx$. Рішень бескінечно багато, тому записують коротко: $\int \sin xdx = -\cos x + C, \text{ где } C = const$

Таким чином, будь-який невизначений інтеграл достатньо легко перевірити (на відміну від похідних, де гарну стопудову перевірку можна виконати хіба що за допомогою математичних програм).

Переходимо до розгляду конкретних прикладів. Почнемо, як і при вивченні похідної, з двох правил інтегрування, які також називають ***<u>властивостями лінійності</u>*** невизначеного інтегралу:

$\int kudx = k\int udx$ – постійний множник можна (і необхідно) винести за знак інтегралу.

$\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$ – інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі двох інтегралів від кожної функції окремо. Дана властивість справедлива для будь-якої кількості доданків.

Як бачите, правила, в принципі, такі ж самі як і для похідних.

<u>Приклад 1</u>

Знайти невизначений інтеграл. Виконати перевірку.

$$\int \left(x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{\sin^2 x} + tg5 \right) dx$$

Розв`язання: Зручніше переписати його в зошит.

$$\int\left(x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{\sin^2 x}+tg5\right)dx\overset{(1)}{=}$$

$$=\int xdx+\int\sqrt{x}dx-\int 3x^5dx+\int\frac{2dx}{x^3}-\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int tg5dx\overset{(2)}{=}$$

$$=\int xdx+\int x^{\frac{1}{2}}dx-3\int x^5dx+2\int x^{-3}dx-\int\frac{dx}{\sin^2 x}+tg5\int dx\overset{(3)}{=}$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}-3\cdot\frac{1}{6}x^6+2\cdot\frac{1}{(-2)}\cdot x^{-2}-(-ctgx)+tg5\cdot x+C\overset{(4)}{=}$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^6}{2}-\frac{1}{x^2}+ctgx+tg5\cdot x+C,\ \text{где}\ C=const$$

(1) Застосовуємо правило $\int(u\pm v)dx=\int udx\pm\int vdx$. Не забуваємо записувати значок диференціалу dx під кожним інтегралом. Чому під кожним? dx **– це повноцінний множник**, якщо розписувати вирішення зовсім детально, то перший крок слід записати так:

$$\int\left(x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{\sin^2 x}+tg5\right)dx=$$

$$=\int\left(xdx+\sqrt{x}dx-3x^5dx+\frac{2dx}{x^3}-\frac{dx}{\sin^2 x}+tg5dx\right)$$

(2) Згідно з правилом $\int kudx=k\int udx$, виносимо всі константи за знаки інтегралів. Зверніть увагу, що в останньому доданку $tg5$ – це константа, її також виносимо.
Крім того, на даному кроці готуємо корені і степені для інтегрування. **Також, як і при диференціюванні, корені треба представити у вигляді $x^{\frac{a}{b}}$. Корені і степені,які розташовані в знаменнику – перенести вгору.**
! *Примітка: на відміну від похідних, корені в інтегралах далеко не завжди слід приводити до вигляду $x^{\frac{a}{b}}$, а степені переносити вгору. Напрклад, $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}$ – це готовий табличний інтеграл, і будь-які китайські хитрощі на кшталт $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\int(x^2+A)^{-\frac{1}{2}}dx$ зовсім не потрібні. Аналогічно: $\int\frac{dx}{x}$ – теж табличний інтеграл, не має ніякого сенсу представляти дріб у вигляді $\int\frac{dx}{x}=\int x^{-1}dx$. Уважно вивчіть таблицю!*
(3) Всі інтеграли в нас табличні. Виконуємо перетворення за допомогою таблиці, використовуючи формули: $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\ (n\neq-1)$, $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-ctgx+C$ і $\int dx=x+C$.

Особливу увагу звертаю на формулу інтегрування степеневої функції $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, вона зустрічається дуже часто, її краще запам`ятати. Слід зазначити, що табличний інтеграл $\int dx=x+C$ – особливий випадок цієї ж формули: $\int dx=\int x^0dx=\frac{1}{1}\cdot x^1+C=x+C$.

Константу C достатньо приплюсувати один раз в кінці виразу (а не ставити їх після

кожного інтегралу).

(4) Записуємо отриманий результат в більш компактному вигляді, всі степені вигляді $x^{\frac{a}{b}}$ знову представляємо у вигляді коренів, степені з від`ємним показником – скидаємо знову в знаменник.
Перевірка. Для того щоб виконати перевірку необхідно продиференціювати отриману відповідь:

$$\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^6}{2}-\frac{1}{x^2}+ctgx+tg5\cdot x+C\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}(x^2)'+\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'-\frac{1}{2}(x^6)'-(x^{-2})'+(ctgx)'+tg5\cdot(x)'+(C)'=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2x+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot 6x^5-(-2)\cdot(x^{-3})-\frac{1}{\sin^2 x}+tg5\cdot 1+0$$

$$=x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{\sin^2 x}+tg5$$

Отримана вхідна **підінтегральна функція**, значить, інтеграл знайдено правильно.
Час від часу зустрічається і інший підхід до перевірки невизначеного інтегралу, від відповіді береться не похідна, а диференціал:

$$d\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^6}{2}-\frac{1}{x^2}+ctgx+tg5\cdot x+C\right)$$

Його необхідно розкрити, і з формально-технічної точки зору – це майже те ж саме, що і знайти похідну. Диференціал розкривається наступним чином: значок d прибираємо, справа над дужкою ставимо штрих, в кінці виразу приписуємо множник dx:

$$d\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^6}{2}-\frac{1}{x^2}+ctgx+tg5\cdot x+C\right)=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^6}{2}-\frac{1}{x^2}+ctgx+tg5\cdot x+C\right)'dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2}(x^2)'+\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'-\frac{1}{2}(x^6)'-(x^{-2})'+(ctgx)'+tg5\cdot(x)'+(C)'\right]dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cdot 2x+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot 6x^5-(-2)\cdot(x^{-3})-\frac{1}{\sin^2 x}+tg5\cdot 1+0\right]dx=$$

$$=\left(x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{\sin^2 x}+tg5\right)dx$$

Отримано вхідний **підінтегральний вираз**, значить, інтеграл знайдено правильно.
Другий спосіб перевірки мені подобається менше, так як необхідно додатково малювати великі дужки і тягнути значок диференціалу dx до кінця перевірки. Хоча він коректніше або «солідніше».
Диференціал розкривається наступним чином:
1) значок d прибираємо;
2) справа над дужкою ставимо штрих (позначення похідної);
3) в кінці виразу приписуємо множник dx.
Наприклад: $d(2x-1)=(2x-1)'dx=(2-0)dx=2dx$

<u>Приклад 2</u>

Знайти невизначений інтеграл. Виконати перевірку.

$$\int x^2(3+4x)^2dx$$

<u>Розв`язання</u>: Аналізуючи інтеграл, ми бачимо, що в нас добуток двох функцій, і ще піднесення до степеню цілого виразу. На жаль, не має гарних і зручних формул для інтегрування добутку і ділення $\cancel{\int uvdx = \int udx \cdot \int vdx}$, $\cancel{\int \frac{u}{v}dx = \frac{\int udx}{\int vdx}}$.

А тому, коли дано добуток або ділення, завжди має сенс подивитися, чи можна перетворити підінтегральну функцію на суму?

Приклад, що розглядається – той випадок, коли можна. Спочатку я наведу повне рішення, коментарі будуть нижче.

$$\int x^2(3+4x)^2dx \overset{(1)}{=} \int x^2(9+24x+16x^2)dx \overset{(2)}{=} \int (9x^2+24x^3+16x^4)dx \overset{(3)}{=}$$

$$= 9\int x^2dx + 24\int x^3dx + 16\int x^4dx \overset{(4)}{=} 9\cdot\frac{1}{3}x^3 + 24\cdot\frac{1}{4}x^4 + 16\cdot\frac{1}{5}x^5 + C \overset{(5)}{=}$$

$$= 3x^3 + 6x^4 + \frac{16}{5}x^5 + C,\ где\ C = const$$

(1) Використовуємо стару-добру формулу квадрату суми $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, позбавляючись від степені.

(2) Вносимо x^2 в дужку, позбавляючись добутку.

(3) Використовуємо властивості лінійності інтегралу (обидва правила одразу).

(4) Перетворюємо інтеграли за табличною формулою $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$.

(5) Спрощуємо відповідь. Тут слід звернути увагу на звичайну неправильну дріб $\frac{16}{5}$ – вона нескоротима і в відповідь входить саме в такому вигляді. Не треба ділити на калькуляторі $\frac{16}{5} = 3{,}2$! Не треба представляти її у вигляді $\frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$!

Перевірка:

$$\left(3x^3 + 6x^4 + \frac{16}{5}x^5 + C\right)' = 3(x^3)' + 6(x^4)' + \frac{16}{5}(x^5)' + (C)' =$$

$$= 3\cdot 3x^2 + 6\cdot 4x^3 + \frac{16}{5}\cdot 5x^4 + 0 = 9x^2 + 24x^3 + 16x^4 =$$

$$= x^2(9+24x+16x^2) = x^2(3^2 + 2\cdot 3\cdot 4x + (4x)^2) = x^2(3+4x)^2$$

Отримана вхідна **підінтегральна функція**, значить, інтеграл знайдено правильно.

В ході перевірки функцію завжди бажано «упаковувати» до первинного вигляду, виносячи в даному випадку x^2 за дужки і застосовуючи формулу скороченого множення в зворотному напрямку: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

<u>Приклад 3</u>

Знайти невизначений інтеграл. Виконати перевірку.

$$\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx$$

В даному прикладі підінтегральна функція представляє собою дріб. Коли ми бачимо в підінтегральному виразі дріб, то першою дукою повинно бути питання: Чи можна яким-небудь чином від цієї дробі позбавитись, чи хоча б її спростити?

Зазначаємо, що в знаменнику знаходиться одинокий корінь з «ікс». Один в полі – не воїн, а значить, можна почленно розділити чисельник на знаменник:

$$\int \frac{2x^3 - \sqrt{x^5} + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(2x^{\frac{5}{2}} - x^2 + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = 2 \cdot \frac{1}{\frac{7}{2}} \cdot x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{4}{7} \cdot \sqrt{x^7} - \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \sqrt{x} + C, \text{ где } C = const$$

Дії з дробовими степенями я не коментую.
Також зверніть увагу, що в вирішенні пропущений один крок, а саме, застосування правил $\int kudx = k\int udx$, $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$. Зазвичай вже при початковому опиті вирішення інтегралів дані властивості вважають саме собою зрозумілим і не розписують ретельно.