Заняття №1

Дослідження функції методами диференціального числення та побудова графіку функції.

Для того, щоб розпочати вивчати тему, необхідно згадати елементарні відомості про **функції і графіки**, і ось зараз робота над важкою темою закінчується закономірним результатом – лекцію на тему **про повне дослідження функції**. Формулюється наступним чином:**Дослідити функцію методами диференціального числення і на основі результатів дослідження побудувати її графік.**

Навіщо досліджувати? В простих випадках вам не важко буде розібратися з елементарими функціями, накреслити їх графіки, що отримані за допомогою **елементарних геометричних перетворень** і т.п. Але властивості і графічне зображення більш складних функцій далеко не очевидні, і саме тому і необхідне ціле дослідження.

Основні етапи вирішення зведені в довідковому матеріалі **Схема дослідження функції**, це ваш путівник по розділу. Студенти заочної форми навчання потребують покрокового пояснення теми, деякі не знають з чого почати і як організувати дослідження, а просунутим студентам, можливо, будуть цікаві лише деякі моменти. Але ким би ви не були, запропонований конспект в найкоротші строки зорієнтує вас в цьому напрямку.

Дослідження функції зазвичай розбивають на 5-6 пунктів:

1) **Область визначення**, **неперервністть**, парність/непарність, періодичність функції.
2) **Асимптоти** графику функції.
3) **Нулі функції, інтервали знакопостійності**.
4) **Зростання, спадання і екстремуми функції**.
5) **Опуклість вгору і опуклість вниз і перегин графіку**.
6) Додаткові точки і графік за результатами дослідження.

Отже, озброївшись, **загальною схемою дослідження**, де розглянута структура і техніка виконання задачі, переходимо до вивчення стратегії і тактики дій.

Приклад 1

Дослідити функцію і за результатами дослідження побудувати графік.

$$f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$$

Рішення:

1) Функція визначена і неперервна на всій числовій прямій: $D(f) = \Re$. Це дуже добре, бо відпадають **вертикальні асимптоти.**

Перевіримо функцію на парність/непарність:

$$f(-x) = (-x)^3 - \frac{5}{2}\cdot(-x)^2 - 2\cdot(-x) + \frac{3}{2} = -x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$$

Після чого слідує шаблонна відписка:

$f(-x) \neq f(x),\ f(-x) \neq -f(x)$, отже дана функція не а ні парною а ні непарню.

Вочевидь, що функція неперіодична.

2) Асимптоти, поведінка функції на бескінечності.

Так як функція неперервна на $\Re$, то вертикальні асимптоти відсутні.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2 - \frac{5}{2}x - 2 + \overset{\to 0}{\frac{3}{2x}}\right) = +\infty$$

Немає і похилих асимптот.

***Примітка**: нагадую, що x^2 більш високого **порядку зростання**, ніж $\frac{5}{2}x$, тому кінцева границя дорівнює саме «**плюс** нескінченність».*

З`ясуємо, як веде себе функція на нескінечності:

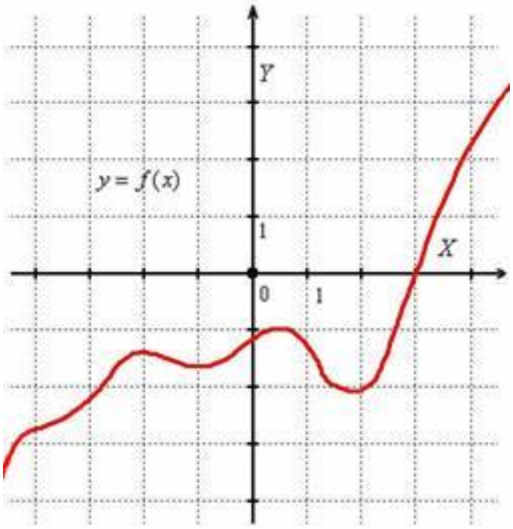
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right) = \pm\infty$$

Іншими словами, якщо йдемо вправо, то графік уходить безкінечно далеко вгору, якщо вліво – безкінчено далеко вниз. Так, тут також дві границі під одним записом. Якщо в вас виникли складнощі з розшифруванням знаків $\pm\infty$ подивіться тему про **нескінчено малі функції**.

Таким чином, функція *не обмежена зверху* і *не обмежена знизу*. Враховуючи, що у нас не має точок разриву, стає зрозумілою і *область значень функції*: $E(f) = \Re$ – теж будь-яке дійсне число.

КОРИСНИЙ ТЕХНІЧНИЙ ПРИЙОМ

Кожний етап завдання приносить нову інформацію про графік функції, тому в ході вирішення зручно використовувати так-званий МАКЕТ. Зобразимо на чорнетці декартову систему координат. Що вже точно відомо? По-перше, у графіка не має асимптот, отже, прямі креслити не треба. По-друге, ми знаємо, як функція веде себе на нескінчености. Відповідно проведеному аналізу, намалюємо перше наближення:



Зауважте, що в силу **неперервності** функції на $\Re$ і того факту, що $E(f) = \Re$, графік повинен, меншою мірою, один раз перетнути вісь OX. А може бути точок перетину декілька?

3) Нулі функції і інтервали знакопостійності.

Спочатку знайдемо точку перетину графіку з віссю ординат. Це просто. Необхідно визначити значення функції при $x = 0$:

$$y = f(0) = 0^3 - \frac{5}{2}\cdot 0^2 - 2\cdot 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Щоб знайти точки перетину з віссю OX (нулі функції) треба вирішити рівняння $f(x) = 0$, і тут нас чекає неприємний сюрприз:

$$x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$$

В кінці причаївся вільний член, який суттєво ускладнює задачу.

Таке рівняння має, як мінімум, один дійсний корінь, і частіше за все цей корінь ірраціональний. Рівняння вирішується за допомогою так званих *формул Кардано*, але це не раціонально. В зв`язку з цим слід усно або на чорнетці спробувати підібрати хоча б один цілий корінь. Перевіримо, чи не є коренями $x = 1,\ x = -1$:

$$f(1) = 1^3 - \frac{5}{2}\cdot 1^2 - 2\cdot 1 + \frac{3}{2} = 1 - \frac{5}{2} - 2 + \frac{3}{2} = -2 \neq 0$$ – не підходить;

$$f(-1) = (-1)^3 - \frac{5}{2}\cdot(-1)^2 - 2\cdot(-1) + \frac{3}{2} = -1 - \frac{5}{2} + 2 + \frac{3}{2} = 0$$ – є!

Тут пощастило. У випадку невдачі можна протестувати ще $x = 2, x = -2$ і $x = 3, x = -3$, а якщо і ці числа не підійшли, то шансів на вигідне рішення рівняння, боюся, дуже мало. Тоді пункт дослідження краще повністю пропустити – може стане що-небудь зрозумілішим на заключному етапі, коли будуть пробиватися додаткові точки. І якщо таки корінь (корні) явно «недобрі», то про інтервали знакопостійності краще взагалі замовчати і ретельніше виконати креслення графіку.

Але в нас є красивий корінь $x = -1$, тому ділимо многочлен $x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ на $(x+1)$ без залишку:

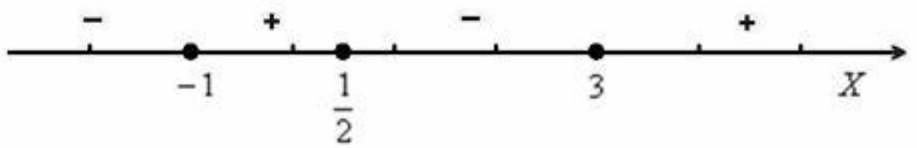
$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 + x^2} & x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} \\
\quad -\frac{7}{2}x^2 - 2x & \\
\quad \underline{-\frac{7}{2}x^2 - \frac{7}{2}x} & \\
\qquad\qquad \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} & \\
\qquad\qquad \underline{\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Алгоритм ділення многочлена на многочлен детально розібраний в першому прикладі теми **Складні границі**.

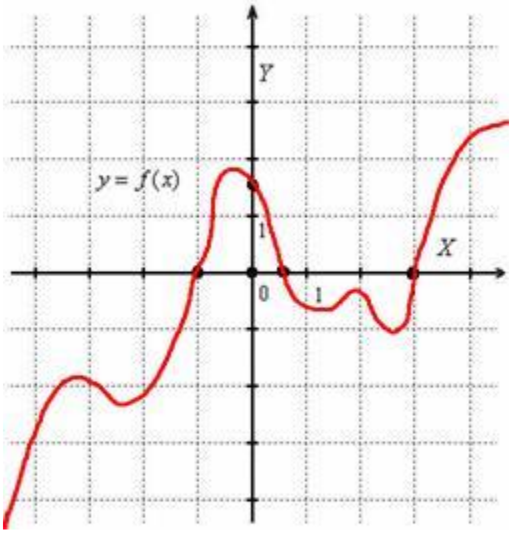
Отже ліва частина вхідного рівняння $x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$ розкладається в добуток:
$(x+1) \cdot \left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 0$

А тепер дещо про здоровий спосіб життя. Я, звісно ж, розумію, що **квадратні рівняння** треба вирішувати кожен день, але сьогодні зробимо виключення: рівняння $x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ має два дійсні корені $x = \frac{1}{2}, x = 3$.

На числовій прямій відкладемо знайдені значення $x = -1, x = \frac{1}{2}, x = 3$ і **методом інтервалів** визначимо знаки функції:



ог таким чином, на інтервалах $(-\infty; -1), \left(\frac{1}{2}; 3\right)$ графік розташований нижче вісі абсцис $(f(x) < 0)$, а на інтервалах $\left(-1; \frac{1}{2}\right), (3; +\infty)$ – вище даної вісі $(f(x) > 0)$. Отримані висновки дозволяють деталізувати наш макет, і друге наближення графіку виглядає наступним чином:



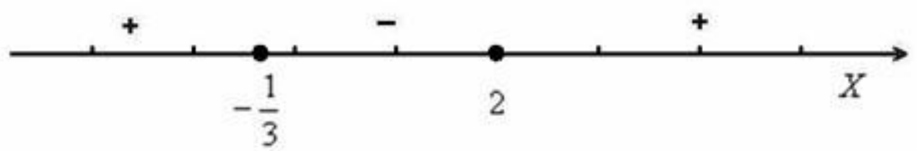
Зверніть увагу, що на інтервалі $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ функція обовёязково повинна мати хоча б один максимум, а на інтервалі $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$ – хоча б один мінімум. Але скільки разів, і де і коли буде «петляти» графік, ми поки не знаємо. До речі, функція може мати і безкінечно багато **екстремумів**.

4) Зростання, спадання і екстремуми функції.

Знайдемо критичні точки:

$$f'(x) = \left(x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)' = 3x^2 - 5x - 2 = 0$$

Дане рівняння має два дійсних корені $x = -\frac{1}{3}, x = 2$. Відкладемо їх на числовій прямій і визначимо знаки похідної:

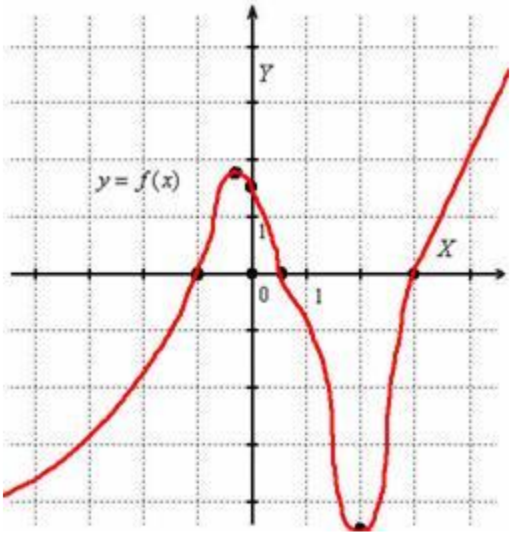


Отже, функція зростає на $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$ і спадає на $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$.

В точці $x = -\frac{1}{3}$ функція досягає максимуму: $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{50}{27} \approx 1{,}85$.

В точціі $x = 2$ функция досягає мінімуму: $f(2) = 8 - 10 - 4 + \frac{3}{2} = -\frac{9}{2} = -4\frac{1}{2}$.

Встановлені факти приводять наш шаблон в доволі жорсткі рамки:



Що і казати, диференціальне числення – штука сильна. Давайте в кінці кінців разберемося з формою графіка:

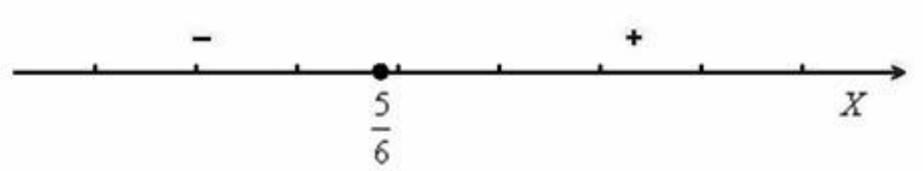
5) Опуклість вгору, опуклість вниз і точки перегину.

Знайдемо критичні точки другої похідної:

$$f''(x) = (3x^2 - 5x - 2)' = 6x - 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{6}$$

Визначимо знаки $f''(x)$:



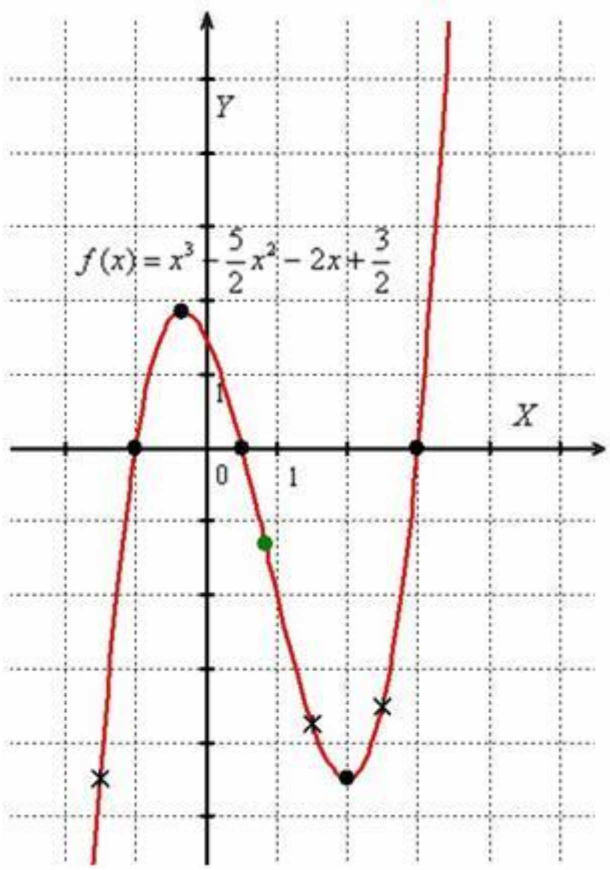
Графік функції є опуклим вгору на $\left(-\infty; \frac{5}{6}\right)$ і опуклим вниз на $\left(\frac{5}{6}; +\infty\right)$. Обчислимо ординату точки перегину: $f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{125}{216} - \frac{125}{72} - \frac{5}{3} + \frac{3}{2} = -\frac{143}{108} \approx -1{,}32$.

Практично все з`ясувалося.

6) Залишилося знайти додаткові точки, які допоможуть більш точно побудувати графік і виконати самоперевірку. В даному випадку їх мало, але відкидати не будемо:

x	–1,5	1,5	2,5	3,5
$f(x)$	–4,5	–3,7	–3,5	6,7

Виконаємо креслення:



Зеленим кольором відзначена точка перегину, хрестиками – додаткові точки. Графік кубічної функції симетричний відносно своєї точки перегину, яка завжди розташована строго посередині між максимумом і мінімумом.

По ходу виконання завдання було приведено три гіпотетичних проміжкових креслення. На практиці ж достатньо намалювати систему координат, відзначити знайдені точки і після кожного пункту дослідження подумки прикидати, як може виглядати графік функції. Студентам з хорошим рівнем підготовки буде не важко провести такий аналіз виключно подумки без застосування чорнетки.