

## 1. Геометричні характеристики плоских перерізів.

### Теоретичні відомості.

Основними геометричними характеристиками плоского перерізу, віднесеного до правосторонньої системи координат  $yOz$ , є:

- площа  $A = \iint da$ ;
- статичні моменти  $S_y = \iint z dA$ ,  $S_z = \iint y dA$ ;
- осьові моменти інерції  $I_y = \iint z^2 dA$ ,  $I_z = \iint y^2 dA$ ;
- відцентровий момент інерції  $I_{yz} = \iint yz dA$ .

В полярній системі координат  $r, \varphi$  вводиться полярний момент інерції  $I_p = \iint r^2 dA$ .

Центр ваги перерізу знаходиться в точці  $C$  з координатами

$$c_y = S_z / A, \quad c_z = S_y / A. \quad (1.1)$$

Координатні вісі  $y_c, z_c$ , що проходять через центр ваги перерізу, називаються *центральною вісями*. Статичні моменти відносно центральних вісей  $S_y = S_z = 0$ .

При паралельному переносі системи координат

$$y = y_c + c_y, \quad z = z_c + c_z \quad (1.2)$$

моменти інерції плоскої фігури в новій системі координат визначаються за формулами

$$\begin{aligned} I_y &= I_{y_c} + c_z^2 A, & I_z &= I_{z_c} + c_y^2 A, \\ I_{yz} &= I_{y_c z_c} + c_y c_z A. \end{aligned} \quad (1.3)$$

При повороті системи координат на кут  $\alpha$  проти годинникової стрілки

$$\bar{y} = y \cos \alpha + z \sin \alpha, \quad \bar{z} = -y \sin \alpha + z \cos \alpha \quad (1.4)$$

моменти інерції перетворюються за формулами

$$\begin{aligned} I_{\bar{y}} &= I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha; \\ I_{\bar{z}} &= I_y \sin^2 \alpha + I_z \cos^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha; \\ I_{\bar{y}\bar{z}} &= I_{yz} \cos 2\alpha - \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Система координат  $u, v$ , з початком в центрі ваги перерізу, в якій відцентровий момент інерції  $I_{uv} = 0$ , називається *головною центральною системою координат*. Її положення відносно вихідної центральної

системи координат  $yCz$  визначається кутом  $\alpha_0$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}. \quad (1.6)$$

Якщо  $I_y = I_z$ , то або всі вісі головні (при  $I_{yz} = 0$ ) або  $\alpha_0 = \pi/4$  (при  $I_{yz} \neq 0$ ). Після визначення кута  $\alpha_0$  головні осьові моменти інерції  $I_u$ ,  $I_v$  знаходяться за першими двома формулами (1.5). Третє рівняння (1.5) можна використовувати для перевірки.

Осьові моменти інерції в головній системі координат набувають екстремальних значень (найбільше і найменше з усіх можливих). Ці величини визначаються з квадратного рівняння і дорівнюють

$$I_{\max, \min} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}. \quad (1.7)$$

Головні радіуси інерції  $i_u$  та  $i_v$  визначаються за формулами

$$i_u = \sqrt{I_u / A}, \quad i_v = \sqrt{I_v / A}. \quad (1.8)$$

За їх допомогою будується еліпс інерції

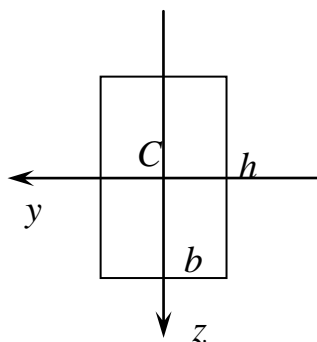
$$\frac{u^2}{i_v^2} + \frac{v^2}{i_u^2} = 1. \quad (1.9)$$

Головні моменти опору визначаються за формулами

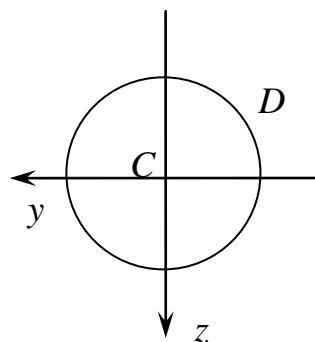
$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}}, \quad W_v = \frac{I_v}{u_{\max}}, \quad (1.10)$$

де  $u_{\max}$ ,  $v_{\max}$  – відповідно відстані до найвіддаленіших точок від осей  $v$  та  $u$ .

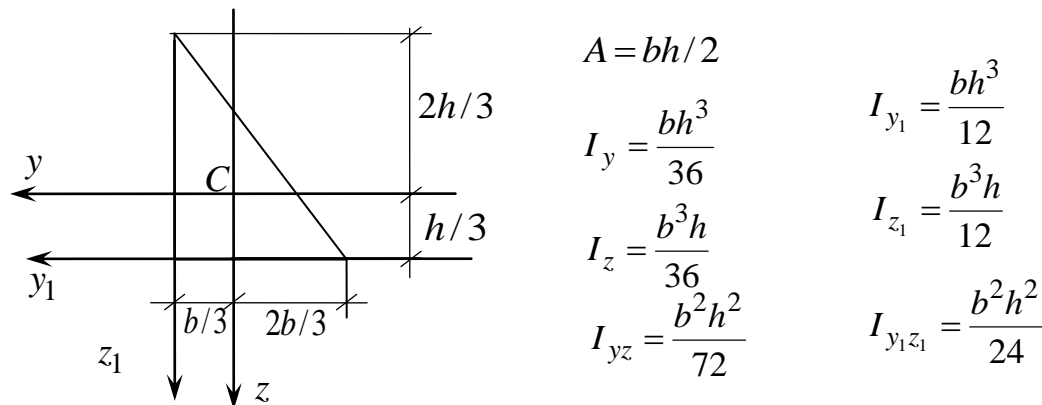
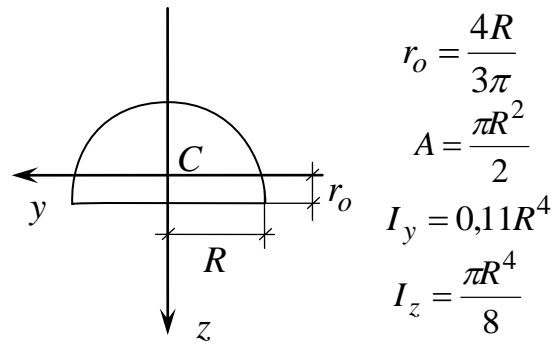
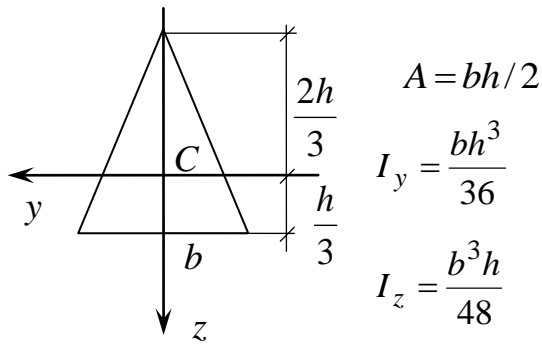
*Геометричні характеристики простих фігур.* Для багатьох фігур головні центральні координати, площа і моменти інерції визначені шляхом інтегрування по площі і приведені в навчальній та довідниковій літературі. Для найпростіших фігур маємо наступні характеристики:



$$\begin{aligned} A &= bh \\ I_y &= \frac{bh^3}{12} \\ I_z &= \frac{b^3h}{12} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi D^2}{4} \\ I_y &= I_z = \frac{\pi D^4}{64} \\ I_p &= \frac{\pi D^4}{32} \end{aligned}$$



Для прокатних балок (двотавр, швелер, кутик) геометричні характеристики беруться з таблиць сортаменту.

Для складних перерізів координати центру ваги  $C(C_{0y}, C_{0z})$  в довільній початковій системі координат  $y_0, z_0$  знаходяться за формулами

$$C_{0y} = \frac{\sum y_{0i} A_i}{A}, \quad C_{0z} = \frac{\sum z_{0i} A_i}{A}, \quad A = \sum A_i, \quad (1.11)$$

де  $y_{0i}, z_{0i}$  – координати центру ваги  $i$ -тої фігури,  $A$  – загальна площа перерізу. Вводимо центральну систему координат  $yCz$ , паралельну до  $y_0, z_0$ , та знаходимо координати центрів ваги складових фігур за формулами паралельного переносу:

$$c_{yi} = y_{0i} - C_{0y}, \quad c_{zi} = z_{0i} - C_{0z}. \quad (1.12)$$

Моменти інерції для складного перерізу обчислюються за формулами

$$I_y = \sum (I_{yi} + c_{zi}^2 A_i), \quad I_z = \sum (I_{zi} + c_{yi}^2 A_i),$$

$$I_{yz} = \sum (I_{y_i z_i} + c_{yi} c_{zi} A_i). \quad (1.13)$$

В формулах (1.11), (1.13) площа та моменти інерції для “вирізаних” складових перерізу беруться зі знаком “мінус”.

### Задача 1.1. Визначення геометричних характеристик симетричного поперечного перерізу

Для заданого поперечного перерізу визначити положення головних центральних осей. Відносно цих осей обчислити моменти інерції та моменти опору. Форма і розміри поперечного перерізу вказані в дод. 4.

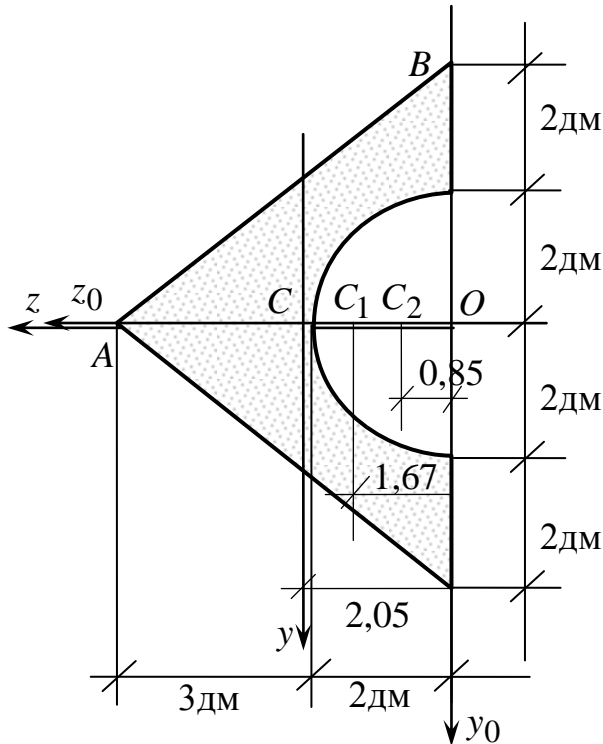


Рис. 1.1

П р и к л а д. Для заданого на рис. 1.1 поперечного перерізу знайти моменти опору.

Р о з в ' я з о к. Бачимо, що переріз має одну вісь симетрії, що лежить горизонтально. Розбиваємо переріз на прості фігури так, щоб вісь симетрії була віссю симетрії для складових, і визначаємо їх геометричні характеристики:

1) для рівнобедреного трикутника з основою  $b = 8 \text{ дм}$  та висотою  $h = 5 \text{ дм}$  центр ваги  $C_1$  лежить на горизонтальній вісі симетрії на відстані  $y_{10} = h/3 = 1,67 \text{ дм}$  від основи,

$$A_1 = \frac{bh}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ см}^2,$$

$$I_{y_1} = \frac{b^3 h}{48} = \frac{8^3 \cdot 5}{48} = 53,3 \text{ дм}^4,$$

$$I_{z_1} = \frac{h^3 b}{36} = \frac{5^3 \cdot 8}{36} = 27,8 \text{ дм}^4;$$

2) для півкола з радіусом  $R = 2 \text{ дм}$  центр ваги  $C_2$  лежить на горизонтальній вісі симетрії на відстані  $y_{20} = \frac{4R}{3\pi} = 0,85 \text{ дм}$  від основи,

$$A_2 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{2} = 6,28 \text{ см}^2,$$

$$I_{y_2} = \frac{\pi R^4}{8} = \frac{3,14 \cdot 2^4}{8} = 6,28 \text{ дм}^4,$$

$$I_{z_2} = 0,11 R^4 = 0,11 \cdot 2^4 = 1,76 \text{ дм}^4.$$

Вводимо початкову систему координат  $y_0, z_0$  та визначаємо координату  $y_{C0}$  центра ваги складного перерізу ( $z_{C0} = 0$  в силу симетрії):

$$y_{C0} = \frac{y_{10} A_1 - y_{20} A_2}{A_1 - A_2} = \frac{1,67 \cdot 20 - 0,85 \cdot 6,28}{20 - 6,28} = \frac{33,4 - 5,34}{13,72} = 2,05 \text{ дм}$$

Позначаємо на рис. 1.1 центр ваги  $C$  та вводимо головну центральну систему координат  $yCz$ . Координати точок  $C_1$ ,  $C_2$  в головній системі координат дорівнюють

$$C_{y1} = y_{10} - y_{C0} = 1,67 - 2,05 = -0,38 \text{ м}; \quad C_{z1} = 0;$$

$$C_{y2} = y_{20} - y_{C0} = 0,85 - 2,05 = -1,2 \text{ м}; \quad C_{z2} = 0.$$

За допомогою формул паралельного переносу знаходимо головні моменти інерції перерізу:

$$I_y = I_{y1} + C_{z1}^2 \cdot A_1 - I_{y2} - C_{z2}^2 \cdot A_2 = 53,3 - 6,28 = 47 \text{ м}^4;$$

$$I_z = I_{z1} + C_{y1}^2 \cdot A_1 - I_{z2} - C_{y2}^2 \cdot A_2 = 27,8 + (-0,38)^2 \cdot 20 - 1,76 - (-1,2)^2 \cdot 6,28 = 27,8 + 2,89 - 1,76 - 9,04 = 19,89 \approx 20 \text{ м}^4.$$

Знаходимо координати найбільш віддалених від осей точок перерізу та підставляємо їх в формули для моментів опору:

$$y_{\max} = y_A = 5 - 2,05 = 2,95 \text{ м}; \quad z_{\max} = z_B = 4 \text{ м};$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{47}{4} = 11,75 \text{ м}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{20}{2,95} = 6,8 \text{ м}^3.$$

## Задача 1.2. Визначення геометричних характеристик складного несиметричного поперечного перерізу

Для поперечного перерізу складної форми визначити положення головних центральних осей. Відносно цих осей обчислити моменти інерції,

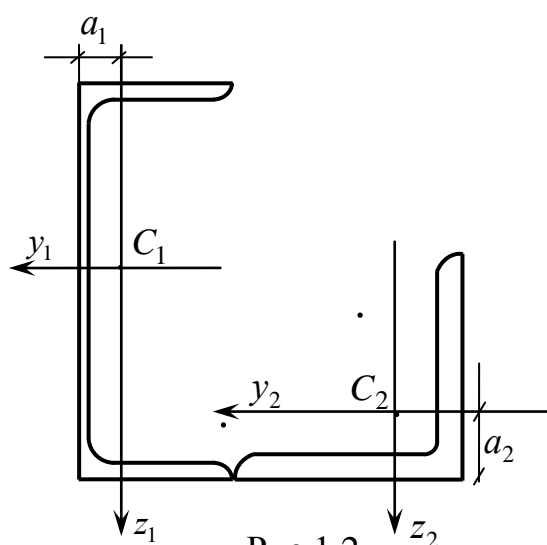


Рис.1.2

моменти опору, радіуси інерції і побудувати еліпс інерції. Форма і розміри поперечного перерізу вказані в дод. 2.

**П р и к л а д.** Для складного поперечного перерізу, що складається із швелера №24 і рівнобічного кутика  $125 \times 125 \times 14$  мм, розташованих як зазначено на рис.1.2, визначити положення головних центральних осей. Відносно цих осей обчислити моменти та радіуси інерції, побудувати еліпс інерції, знайти моменти опору.

**Р о з в ' я з о к.** Задачу розв'язуємо, дотримуючись наступного порядку обчислень.

1. Розбиваємо переріз на прості фігури (у нашому випадку швелер і

кутик). Вводимо локальні системи координат із початком у центрах ваги простих фігур. Проводимо паралельні між собою вісі  $y_1, z_1$  (для швелера) і  $y_2, z_2$  (для кутика). Випишуємо геометричні характеристики складових перерізу із таблиць сортаменту:

швелер №20 :  $A_1 = 23,4 \text{ см}^2$ ,  $h_1 = 20 \text{ см}$ ,  $b_1 = 7,6 \text{ см}$ ,  $a_1 = 2,07 \text{ см}$ ,

$$I_{y_1} = 1520 \text{ см}^4, I_{z_1} = 113 \text{ см}^4, I_{y_1 z_1} = 0.$$

кутик  $125 \times 125 \times 14 \text{ мм}$  :  $A_2 = 33,4 \text{ см}^2$ ,  $b_2 = 12,5 \text{ см}$ ,  
 $a_2 = 3,61 \text{ см}$ ,  $I_{y_2} = I_{z_2} = 482 \text{ см}^4$ ,  $I_{y_2 z_2} = 282 \text{ см}^4$ .

Знак відцентрового моменту інерції для рівнобічного кутика вибираємо з умови, що полицки дають більший внесок у момент (знаки моментів полицок легко визначити по рисунку: у нашому випадку полицки лежать у першому і третьому квадрантах, де добуток  $y_2 z_2 > 0$ , отже  $I_{y_2 z_2} > 0$ ).

Зображуємо переріз на рис. 1.3 відповідно до вибраного масштабу.

2. Для визначення положення центру ваги перерізу вибираємо за початкову одну із введених на рис. 1 систем координат, наприклад, систему  $(y_1, z_1)$ . Визначаємо координати центрів ваги складових фігур в вибраній системі координат (перший індекс відповідає номеру системи координат, другий індекс – номеру фігури):

$$y_{11} = 0, \quad z_{11} = 0,$$

$$y_{12} = -b_1 - b_2 + a_1 + a_2 = -7,6 - 12,5 + 2,07 + 3,61 = -14,42 \text{ см},$$

$$z_{12} = h_1 / 2 - a_2 = 20 / 2 - 3,61 = 6,39 \text{ см}.$$

Площа поперечного перерізу  $A = A_1 + A_2 = 23,4 + 33,4 = 56,8 \text{ см}^2$ .

Визначаємо координати  $y_{1C}, z_{1C}$  центру ваги перерізу в системі координат  $(y_1, z_1)$ :

$$y_{1C} = \frac{\sum y_{1i} A_i}{\sum A_i} = \frac{y_{11} A_1 + y_{12} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 - 14,42 \cdot 33,4}{56,8} = -8,48 \text{ см},$$

$$z_{1C} = \frac{\sum z_{1i} A_i}{\sum A_i} = \frac{z_{11} A_1 + z_{12} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 + 6,39 \cdot 33,4}{56,8} = 3,76 \text{ см}.$$

Позначаємо на рис. 2 центр ваги складного перерізу  $C$  і вводимо центральну систему координат  $y_C z_C$  паралельно до початкової системи  $y_1, z_1$ .

3. Знаходимо координати  $c_{y_i}, c_{z_i}$  центрів ваги простих фігур  $C_1, C_2$  в осях  $y, z$ :

$$c_{y1} = y_{11} - y_{1C} = 0 + 8,48 = 8,48 \text{ см},$$

$$c_{z1} = z_{11} - z_{1C} = 0 - 3,76 = -3,76 \text{ см},$$

$$c_{y2} = y_{12} - y_{1C} = -14,42 + 8,48 = -5,94 \text{ см},$$

$$c_{z2} = z_{12} - z_{1C} = 6,39 - 3,76 = 2,63 \text{ см}.$$

Проведемо перевірку правильності положення знайденого центру ваги перерізу. Обчислюємо статичні моменти площі перерізу відносно центральних осей  $y, z$  (вони повинні дорівнювати нулеві):

$$S_y = \sum c_{zi} A_i = c_{z1} A_1 + c_{z2} A_2 = -3,76 \cdot 23,4 + 2,63 \cdot 33,4 = -87,98 + 87,84 = -0,14 \text{ см}^3 \approx 0,$$

$$S_z = \sum c_{yi} A_i = c_{y1} A_1 + c_{y2} A_2 = 8,48 \cdot 23,4 - 5,94 \cdot 33,4 = 198,43 - 198,39 = -0,034 \text{ см}^3 \approx 0.$$

4. Знаходимо осьові і відцентровий моменти інерції перерізу відносно центральних осей  $y, z$ :

$$I_y = \sum (I_{y_i} + c_{zi}^2 A_i) = (I_{y_1} + c_{z1}^2 A_1) + (I_{y_2} + c_{z2}^2 A_2) = 1520 + (-3,76)^2 \cdot 23,4 + 482 + 2,63^2 \cdot 33,4 = 1520 + 330,8 + 482 + 231 = 2563,8 \text{ см}^4 \approx 2564 \text{ см}^4,$$

$$I_z = \sum (I_{z_i} + c_{yi}^2 A_i) = (I_{z_1} + c_{y1}^2 A_1) + (I_{z_2} + c_{y2}^2 A_2) = 113 + 8,48^2 \cdot 23,4 + 482 + (-5,94)^2 \cdot 33,4 = 113 + 1682,7 + 482 + 1178,5 = 3456,2 \text{ см}^4 \approx 3456 \text{ см}^4,$$

$$I_{yz} = \sum (I_{y_i z_i} + c_{zi} c_{yi} A_i) = (I_{y_1 z_1} + c_{z1} c_{y1} A_1) + (I_{y_2 z_2} + c_{z2} c_{y2} A_2) = 0 + 8,48 \cdot (-3,76) \cdot 23,4 + 282 + (-5,94) \cdot 2,63 \cdot 33,4 = -746,1 + 282 - 521,8 = -986 \text{ см}^4.$$

5. Визначаємо положення головних центральних осей інерції, для чого знаходимо кут  $\alpha_0$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{y_C z_C}}{I_{z_C} - I_{y_C}} = \frac{2 \cdot (-986)}{3456 - 2564} = \frac{-1972}{892} = -2,2108$$

$$2\alpha_0 = -65,66^\circ, \quad \alpha_0 = -32,83^\circ.$$

Знаходимо значення тригонометричних функцій

$$\sin \alpha_0 = \sin(-32,83^\circ) = -0,5422, \quad \cos \alpha_0 = \cos(-32,83^\circ) = 0,8403,$$

$$\sin 2\alpha_0 = \sin(-65,66^\circ) = -0,9111, \quad \cos 2\alpha_0 = \cos(-65,66^\circ) = 0,4121,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \operatorname{tg}(-32,83^\circ) = -0,6452.$$

6. Обчислюємо головні осьові моменти інерції різними способами:

$$a) \quad I_u = I_y \cos^2 \alpha_0 + I_z \sin^2 \alpha_0 - I_{yz} \sin 2\alpha_0 = 2564 \cdot 0,8403^2 +$$

$$+ 3456 \cdot (-0,5422)^2 - (-986) \cdot (-0,9111) = 1810,45 + 1016 - 898,34 = 1928 \text{ см}^4,$$

$$I_v = I_y \sin^2 \alpha_0 + I_z \cos^2 \alpha_0 + I_{yz} \sin 2\alpha_0 = 2564 \cdot (-0,5422)^2 +$$

$$+ 3456 \cdot 0,8403^2 - 986 \cdot (-0,9111) = 753,77 + 2440,3 + 898,34 = 4092,4 \text{ см}^4;$$

$$\text{б) } I_u = I_y - I_{yz} \operatorname{tg} \alpha_0 = 2564 - (-986) \cdot (-0,6452) = 1927,8 \text{ см}^4,$$

$$I_v = I_z - I_{yz} \operatorname{tg} \alpha_0 = 3456 + (-986) \cdot (-0,6452) = 4092,2 \text{ см}^4;$$

в) моменти інерції відносно головних центральних осей повинні співпадати з екстремальними значеннями осьових моментів інерції:

$$I_{\max} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \frac{2564 + 3456}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2564 - 3456}{2}\right)^2 + (-986)^2} =$$

$$I_{\min}$$

$$= 3010 \pm \sqrt{198916 + 972196} = 3010 \pm 1082,2$$

$$I_{\max} = 4092,2 \text{ см}^4 = I_v, \quad I_{\min} = 1927,8 \text{ см}^4 = I_u.$$

Для перевірки обчислимо також відцентровий момент інерції (він повинен дорівнювати нулю)

$$I_{uv} = I_{yz} \cos 2\alpha_0 + (I_y - I_z) \frac{\sin 2\alpha_0}{2} = -986 \cdot 0,4121 +$$

$$+ (2564 - 3456) / 2 \cdot (-0,9111) = -406,33 + 406,35 = 0,02 \text{ см}^4 \approx 0.$$

На рисунку проводимо головні центральні вісі інерції, повернуті на кут  $\alpha_0 = -32,83^\circ$  проти годинникової стрілки (тобто на кут  $32,83^\circ$  за годинниковою стрілкою) від центральних осей  $y, z$ .



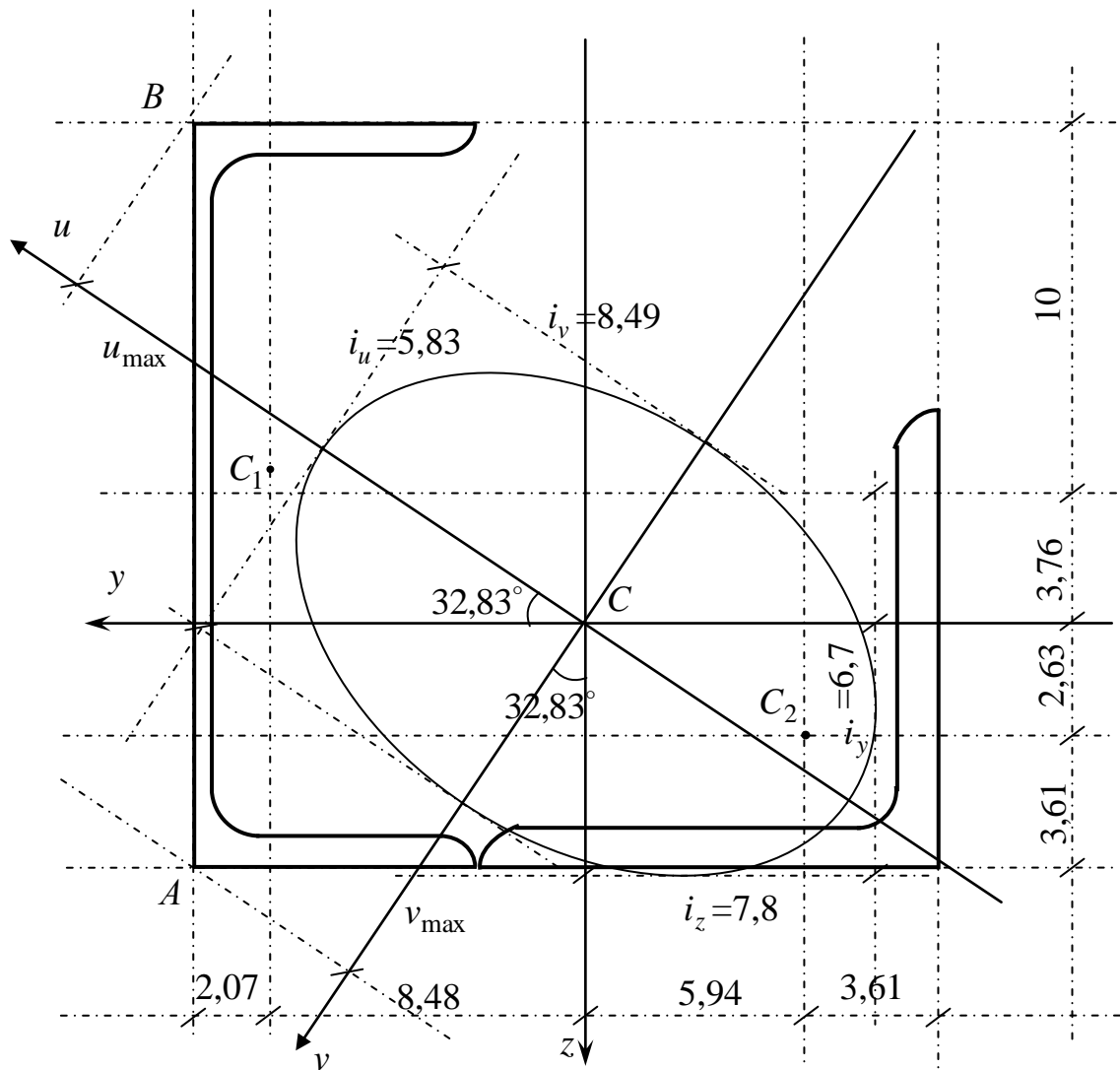


Рис. 1.3

7. Обчислюємо головні радіуси інерції

$$i_u^2 = \frac{I_u}{A} = \frac{1927,8}{56,8} = 34 \text{ см}^2, \quad i_u = 5,83 \text{ см},$$

$$i_v^2 = \frac{I_v}{A} = \frac{4092,2}{56,8} = 72 \text{ см}^2, \quad i_v = 8,49 \text{ см}$$

і будуємо еліпс інерції

$$\frac{u^2}{i_v^2} + \frac{v^2}{i_u^2} = 1.$$

Маючи побудований еліпс інерції, можна графічно визначити осьові моменти інерції перерізу відносно довільної центральної системи координат. Вимірюємо на рисунку значення радіусів інерції  $i_y$  та  $i_z$  відносно осей  $z$  і  $y$  (для цього треба провести паралельні цим осям дотичні до еліпса інерції і виміряти відстань між осями і дотичними)

$$i_y = 6,7 \text{ см}, \quad i_z = 7,8 \text{ см}.$$

По вимірних радіусах інерції обчислимо осьові моменти інерції відносно центральних осей

$$I_y = i_y^2 \cdot A = 6,7^2 \cdot 56,8 = 2550 \text{ см}^4, \quad I_z = i_z^2 \cdot A = 7,8^2 \cdot 56,8 = 3456 \text{ см}^4$$

і порівняємо з визначеними раніше значеннями

$$I_y = 2564 \text{ см}^4, \quad I_z = 3456 \text{ см}^4.$$

Невеликі розбіжності свідчать про правильність аналітичних обчислень і геометричних побудов.

8. Визначаємо головні моменти опору відносно осей  $u, v$  за формулами

$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}}, \quad W_v = \frac{I_v}{u_{\max}},$$

в яких  $u_{\max}$  – відстань до найбільш віддаленої точки перерізу від осі  $v$ ,  $v_{\max}$  – відстань до найбільш віддаленої точки перерізу від осі  $u$ .

Для визначення  $u_{\max}$ ,  $v_{\max}$  знаходимо координати точок  $A$  і  $B$  у центральній системі координат  $y, z$ , а потім скористаємося формулами перетворення координат при повороті координатних осей

$$u_A = y_A \cos \alpha_0 + z_A \sin \alpha_0, \\ v_A = -y_A \sin \alpha_0 + z_A \cos \alpha_0.$$

Для точки  $A$  знаходимо:

$$y_A = 2,07 + 8,48 = 10,55 \text{ см}, \quad z_A = 3,61 + 2,63 = 6,24 \text{ см}, \\ v_{\max} = |-y_A \sin \alpha_0 + z_A \cos \alpha_0| = |-10,55 \cdot (-0,5422) + 6,24 \cdot 0,8403| = 5,72 + 5,24 = 10,96 \text{ см}.$$

Для точки  $B$  знаходимо:

$$y_B = y_A = 10,55 \text{ см}, \quad z_B = -10 - 3,76 = -13,76 \text{ см}, \\ u_{\max} = |y_B \cos \alpha_0 + z_B \sin \alpha_0| = |10,55 \cdot 0,8403 - 13,76 \cdot (-0,5422)| = 8,86 + 7,46 = 16,32 \text{ см}.$$

Вимірюємо на рис.1.3 значення  $u_{\max}$ ,  $v_{\max}$  в масштабі:

$$u_{\max} \approx 16 \text{ см}, \quad v_{\max} \approx 11 \text{ см},$$

що відповідає обчисленим величинам.

Обчислюємо моменти опору відносно головних осей

$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}} = \frac{1928}{10,96} = 176 \text{ см}^3, \quad W_v = \frac{I_v}{u_{\max}} = \frac{4092}{16,3} = 251 \text{ см}^3.$$