

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Київський національний університет будівництва і архітектури

## **ОПІР МАТЕРІАЛІВ**

**Геометричні характеристики плоских перерізів  
Розтягування (стискування) стержнів  
Побудова епюр внутрішніх зусиль в стержневих системах  
Пряме плоске згинання балок**

Методичні рекомендації, завдання та приклади  
до виконання розрахунково-графічних робіт для студентів напрямку підготовки 6.060101 «Будівництво»

Київ 2015

УДК 539.3  
ББК 30.121  
О-61

Укладач: доц. Григор'єва Л. О., канд. фіз.-мат. наук;

Рецензент Шкельов Л.Т., канд. техн. наук, професор

Відповідальний за випуск А.М. Станкевич, канд. техн. наук,  
доцент

*Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів, протокол № 2 від 1 жовтня 2014 року.*

Видається в авторській редакції.

**Опір матеріалів.** Геометричні характеристики плоских перерізів.  
О61 Розтягування (стискування) стержнів. Побудова епюр  
внутрішніх зусиль в стержневих системах. Пряме плоске згинання  
балок: Методичні рекомендації, завдання та приклади до виконання  
розрахунково-графічних робіт для студентів напрямку підготовки  
6.060101 «Будівництво» / Уклад. Л. О. Григор'єва. – К.: КНУБА,  
2015.-64 с.

Методичні рекомендації містять теоретичні відомості, приклади та завдання для розрахунково-графічних робіт з опору матеріалів по темах: геометричні характеристики плоских перерізів, розтягування (стискування) стержнів, побудова епюр внутрішніх зусиль в стержневих системах, пряме плоске згинання балок.

Призначено для студентів санітарно-технічного факультету, але можуть використовуватися студентами інших факультетів будівельних спеціальностей.

## Зміст

Загальні вказівки.....	4
1. Геометричні характеристики плоских перерізів.....	5
Задача 1.1. Визначення геометричних характеристик симетричного перерізу.....	8
Задача 1.2. Визначення геометричних характеристик несиметричного складного перерізу.....	10
2. Розтягування (стискування) стержнів.....	15
Задача 2.1. Перевірка міцності ступінчатої колони.....	17
Задача 2.2. Розрахунок статично-визначеної стержневої системи.....	19
3. Побудова епюр внутрішніх зусиль в стержневих системах.....	21
Задача 3.1. Побудова епюр внутрішніх зусиль для консольної балки.....	26
Задача 3.2. Побудова епюр внутрішніх зусиль для плоскої рами.....	28
Задача 3.3. Побудова епюр внутрішніх зусиль в криволінійних стержнях.....	30
Задача 3.4. Побудова епюр внутрішніх зусиль в горизонтальних рамах під дією вертикального навантаження.....	31
4. Пряме плоске згинання балок.....	33
Задача 4.1. Розрахунок статично визначеної балки.....	37
Список рекомендованої літератури.....	45
Додатки.....	46

## ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Перед виконанням розрахунково-графічних робіт необхідно опрацювати теоретичні відомості і методи розв'язання задач, стисло наведені в тексті методичних рекомендацій. Відповідні розділи теоретичного курсу опору матеріалів більш широко викладено в підручниках, вказаних в списку літератури.

Задачі і вправи виконуються за індивідуальними завданнями, дані для яких вибираються відповідно до шифру, виданого викладачем у вигляді тризначного числа. Перша цифра шифру відповідає варіанту розрахункової схеми, друга і третя цифри шифру – значенням геометричних розмірів і величин силових факторів. Умови задач наведені в тексті методичних вказівок і в додатках.

При оформленні розв'язків контрольних задач і пояснювальної записки до розрахунково-графічної вправи спочатку вказується шифр, наводиться відповідна шифру схема і необхідні вихідні дані, потім викладається розрахунок.

Розрахунки на кожному окремому етапі оформлюються в такій послідовності: розрахункова формула, підстановка в неї конкретних даних, остаточний результат і одиниця розмірності величини. Розв'язки задач і вправ виконуються в одиницях СІ. Кожен окремий етап розрахунку повинен мати заголовок. Розв'язання задач оформлюється на стандартних аркушах паперу формату А4, текст і розрахунки повинні бути написані акуратно і без помарок. Графічні ілюстрації виконуються з дотриманням масштабу і нанесенням всіх необхідних розмірів. До кожної РГР додається титульний лист, зразок якого приведений у дод. 1. При здачі РГР студент повинен захистити основні її положення, відповісти на теоретичні питання і вміти розв'язувати задачі в обсязі відповідного розділу курсу. Наступна робота приймається після здачі попередньої.

Терміни виконання розрахунково-графічних вправ і поточного контролю установлюються відповідно до робочих планів по дисципліні. До іспитів студент допускається тільки після здачі усіх вправ і виконання завдань, передбачених робочим планом.

## 1. Геометричні характеристики плоских перерізів.

### Теоретичні відомості.

Основними геометричними характеристиками плоского перерізу, віднесеного до правосторонньої системи координат  $yOz$ , є:

- площа  $A = \iint da$ ;
- статичні моменти  $S_y = \iint z dA$ ,  $S_z = \iint y dA$ ;
- осьові моменти інерції  $I_y = \iint z^2 dA$ ,  $I_z = \iint y^2 dA$ ;
- відцентровий момент інерції  $I_{yz} = \iint yz dA$ .

В полярній системі координат  $r, \varphi$  вводиться полярний момент інерції  $I_p = \iint r^2 dA$ .

Центр ваги перерізу знаходиться в точці  $C$  з координатами

$$c_y = S_z / A, \quad c_z = S_y / A. \quad (1.1)$$

Координатні вісі  $y_c, z_c$ , що проходять через центр ваги перерізу, називаються *центральною вісями*. Статичні моменти відносно центральних вісей  $S_y = S_z = 0$ .

При паралельному переносі системи координат

$$y = y_c + c_y, \quad z = z_c + c_z \quad (1.2)$$

моменти інерції плоскої фігури в новій системі координат визначаються за формулами

$$\begin{aligned} I_y &= I_{y_c} + c_z^2 A, & I_z &= I_{z_c} + c_y^2 A, \\ I_{yz} &= I_{y_c z_c} + c_y c_z A. \end{aligned} \quad (1.3)$$

При повороті системи координат на кут  $\alpha$  проти годинникової стрілки

$$\bar{y} = y \cos \alpha + z \sin \alpha, \quad \bar{z} = -y \sin \alpha + z \cos \alpha \quad (1.4)$$

моменти інерції перетворюються за формулами

$$\begin{aligned} I_{\bar{y}} &= I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha; \\ I_{\bar{z}} &= I_y \sin^2 \alpha + I_z \cos^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha; \\ I_{\bar{y}\bar{z}} &= I_{yz} \cos 2\alpha - \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Система координат  $u, v$ , з початком в центрі ваги перерізу, в якій

відцентровий момент інерції  $I_{uv} = 0$ , називається *головною центральною системою координат*. Її положення відносно вихідної центральної системи координат  $yCz$  визначається кутом  $\alpha_0$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}. \quad (1.6)$$

Якщо  $I_y = I_z$ , то або всі вісі головні (при  $I_{yz} = 0$ ) або  $\alpha_0 = \pi/4$  (при  $I_{yz} \neq 0$ ). Після визначення кута  $\alpha_0$  головні осьові моменти інерції  $I_u$ ,  $I_v$  знаходяться за першими двома формулами (1.5). Третє рівняння (1.5) можна використовувати для перевірки.

Осьові моменти інерції в головній системі координат набувають екстремальних значень (найбільше і найменше з усіх можливих). Ці величини визначаються з квадратного рівняння і дорівнюють

$$I_{\max, \min} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}. \quad (1.7)$$

Головні радіуси інерції  $i_u$  та  $i_v$  визначаються за формулами

$$i_u = \sqrt{I_u / A}, \quad i_v = \sqrt{I_v / A}. \quad (1.8)$$

За їх допомогою будується еліпс інерції

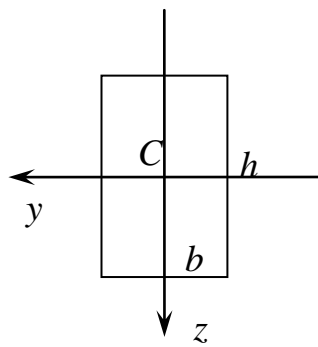
$$\frac{u^2}{i_v^2} + \frac{v^2}{i_u^2} = 1. \quad (1.9)$$

Головні моменти опору визначаються за формулами

$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}}, \quad W_v = \frac{I_v}{u_{\max}}, \quad (1.10)$$

де  $u_{\max}$ ,  $v_{\max}$  — відповідно відстані до найвіддаленіших точок від осей  $v$  та  $u$ .

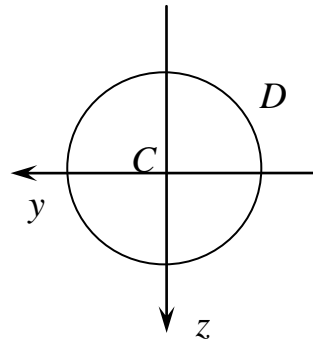
*Геометричні характеристики простих фігур.* Для багатьох фігур головні центральні координати, площа і моменти інерції визначені шляхом інтегрування по площі і приведені в навчальній та довідниковій літературі. Для найпростіших фігур маємо наступні характеристики:



$$A = bh$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

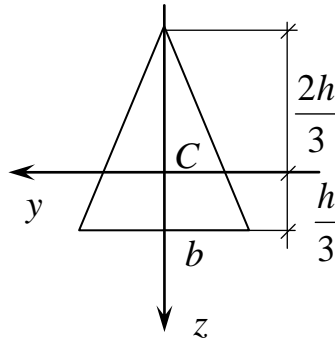
$$I_z = \frac{b^3h}{12}$$



$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}$$

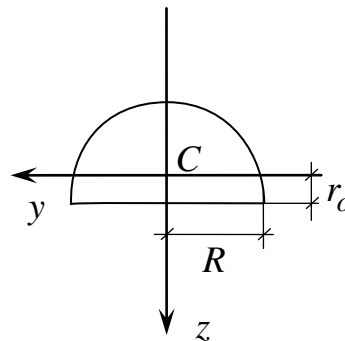
$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$



$$A = bh/2$$

$$I_y = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_z = \frac{b^3h}{48}$$

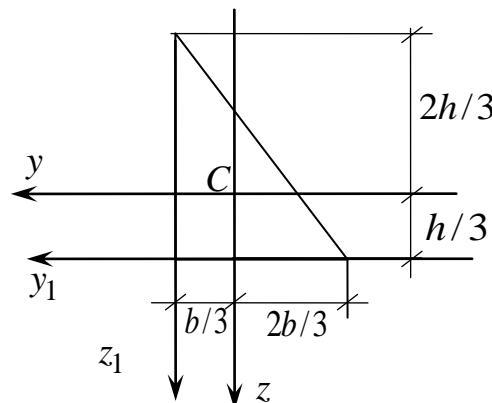


$$r_o = \frac{4R}{3\pi}$$

$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$I_y = 0,11R^4$$

$$I_z = \frac{\pi R^4}{8}$$



$$A = bh/2$$

$$I_y = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_z = \frac{b^3h}{36}$$

$$I_{yz} = \frac{b^2h^2}{72}$$

$$I_{y_1} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{z_1} = \frac{b^3h}{12}$$

$$I_{y_1z_1} = \frac{b^2h^2}{24}$$

Для прокатних балок (двотавр, швелер, кутик) геометричні характеристики беруться з таблиць сортаменту.

Для складних перерізів координати центру ваги  $C(C_{0y}, C_{0z})$  в довільній початковій системі координат  $y_0, z_0$  знаходяться за формулами

$$C_{0y} = \frac{\sum y_{0i} A_i}{A}, \quad C_{0z} = \frac{\sum z_{0i} A_i}{A}, \quad A = \sum A_i, \quad (1.11)$$

де  $y_{0i}, z_{0i}$  – координати центру ваги  $i$ -тої фігури,  $A$  – загальна площа перерізу. Вводимо центральну систему координат  $yCz$ , паралельну до  $y_0, z_0$ , та знаходимо координати центрів ваги складових фігур за формулами паралельного переносу:

$$c_{yi} = y_{0i} - C_{0y}, \quad c_{zi} = z_{0i} - C_{0z}. \quad (1.12)$$

Моменти інерції для складного перерізу обчислюються за формулами

$$I_y = \sum (I_{yi} + c_{zi}^2 A_i), \quad I_z = \sum (I_{zi} + c_{yi}^2 A_i),$$

$$I_{yz} = \sum (I_{y_iz_i} + c_{yi} c_{zi} A_i). \quad (1.13)$$

В формулах (1.11), (1.13) площа та моменти інерції для “вирізаних” складових перерізу беруться зі знаком “мінус”.

### Задача 1.1. Визначення геометричних характеристик симетричного поперечного перерізу

Для заданого поперечного перерізу визначити положення головних центральних осей. Відносно цих осей обчислити моменти інерції та моменти опору. Форма і розміри поперечного перерізу вказані в дод. 4.

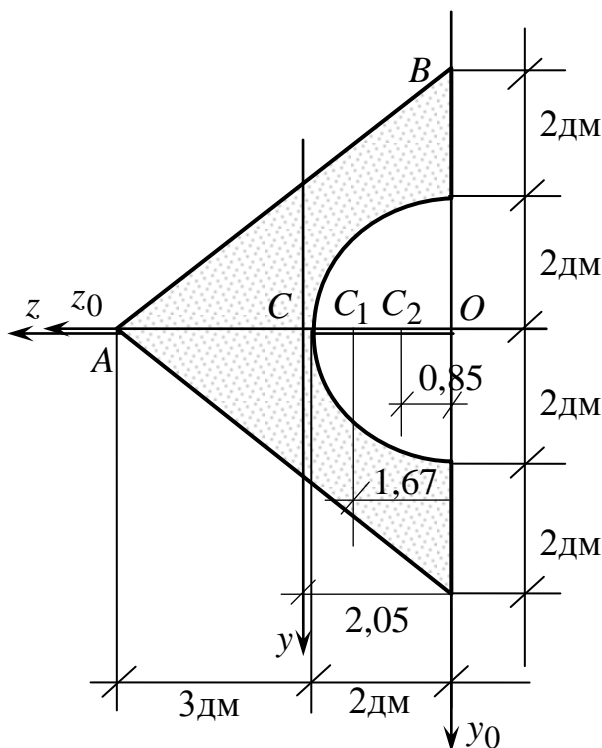


Рис. 1.1

**П р и к л а д.** Для заданого на рис. 1.1 поперечного перерізу знайти моменти опору.

**Р о з в ’ я з о к.** Бачимо, що переріз має одну вісь симетрії, що лежить горизонтально. Розбиваємо переріз на прості фігури так, щоб вісь симетрії була віссю симетрії для складових, і визначаємо їх геометричні характеристики:

1) для рівнобедреного трикутника з основою  $b = 8 \text{ дм}$  та висотою  $h = 5 \text{ дм}$  центр ваги  $C_1$  лежить на горизонтальній вісі симетрії на відстані

$$y_{10} = h/3 = 1,67 \text{ дм від основи,}$$

$$A_1 = \frac{bh}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ см}^2,$$

$$I_{y1} = \frac{b^3 h}{48} = \frac{8^3 \cdot 5}{48} = 53,3 \text{ дм}^4,$$

$$I_{z1} = \frac{h^3 b}{36} = \frac{5^3 \cdot 8}{36} = 27,8 \text{ дм}^4;$$



2) для півкола з радіусом  $R = 2\text{дм}$  центр ваги  $C_2$  лежить на горизонтальній вісі симетрії на відстані  $y_{20} = \frac{4R}{3\pi} = 0,85\text{дм}$  від основи,

$$A_2 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{2} = 6,28\text{см}^2, \quad I_{y_2} = \frac{\pi R^4}{8} = \frac{3,14 \cdot 2^4}{8} = 6,28\text{дм}^4,$$

$$I_{z_2} = 0,11R^4 = 0,11 \cdot 2^4 = 1,76\text{дм}^4.$$

Вводимо початкову систему координат  $y_0, z_0$  та визначаємо координату  $y_{C0}$  центра ваги складного перерізу ( $z_{C0} = 0$  в силу симетрії):

$$y_{C0} = \frac{y_{10}A_1 - y_{20}A_2}{A_1 - A_2} = \frac{1,67 \cdot 20 - 0,85 \cdot 6,28}{20 - 6,28} = \frac{33,4 - 5,34}{13,72} = 2,05\text{дм}$$

Позначаємо на рис. 1.1 центр ваги  $C$  та вводимо головну центральну систему координат  $yCz$ . Координати точок  $C_1, C_2$  в головній системі координат дорівнюють

$$C_{y1} = y_{10} - y_{C0} = 1,67 - 2,05 = -0,38\text{дм}; \quad C_{z1} = 0;$$

$$C_{y2} = y_{20} - y_{C0} = 0,85 - 2,05 = -1,2\text{дм}; \quad C_{z2} = 0.$$

За допомогою формул паралельного переносу знаходимо головні моменти інерції перерізу:

$$I_y = I_{y1} + C_{z1}^2 \cdot A_1 - I_{y2} - C_{z2}^2 \cdot A_2 = 53,3 - 6,28 = 47\text{дм}^4;$$

$$I_z = I_{z1} + C_{y1}^2 \cdot A_1 - I_{z2} - C_{y2}^2 \cdot A_2 = 27,8 + (-0,38)^2 \cdot 20 - 1,76 - (-1,2)^2 \cdot 6,28 = 27,8 + 2,89 - 1,76 - 9,04 = 19,89 \approx 20\text{дм}^4.$$

Знаходимо координати найбільш віддалених від осей точок перерізу та підставляємо їх в формули для моментів опору:

$$y_{\max} = y_A = 5 - 2,05 = 2,95\text{дм}; \quad z_{\max} = z_B = 4\text{дм};$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{47}{4} = 11,75\text{дм}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{20}{2,95} = 6,8\text{дм}^3.$$

## Задача 1.2. Визначення геометричних характеристик складного несиметричного поперечного перерізу

Для поперечного перерізу складної форми визначити положення головних центральних осей. Відносно цих осей обчислити моменти інерції, моменти опору, радіуси інерції і побудувати еліпс інерції. Форма і розміри поперечного перерізу вказані в дод. 2.

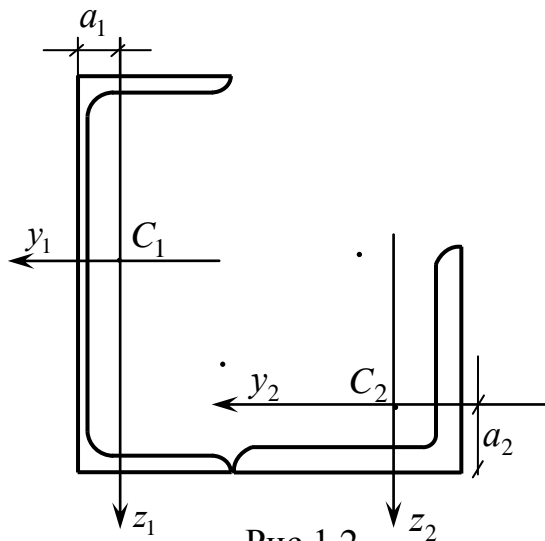


Рис.1.2

П р и к л а д. Для складного поперечного перерізу, що складається із швелера №24 і рівнобічного кутика  $125 \times 125 \times 14$  мм, розташованих як зазначено на рис.1.2, визначити положення головних центральних осей. Відносно цих осей обчислити моменти та радіуси інерції, побудувати еліпс інерції, знайти моменти опору.

Р о з в ' я з о к. Задачу розв'язуємо, дотримуючись наступного порядку обчислень.

1. Розбиваємо переріз на прості фігури (у нашому випадку швелер і кутик). Вводимо локальні системи координат із початком у центрах ваги простих фігур. Проводимо паралельні між собою вісі  $y_1, z_1$  (для швелера) і  $y_2, z_2$  (для кутика). Випишуємо геометричні характеристики складових перерізу із таблиць сортаменту:

швелер №20 :  $A_1 = 23,4 \text{ см}^2$ ,  $h_1 = 20 \text{ см}$ ,  $b_1 = 7,6 \text{ см}$ ,  $a_1 = 2,07 \text{ см}$ ,

$$I_{y_1} = 1520 \text{ см}^4, I_{z_1} = 113 \text{ см}^4, I_{y_1 z_1} = 0.$$

кутик  $125 \times 125 \times 14$  мм :  $A_2 = 33,4 \text{ см}^2$ ,  $b_2 = 12,5 \text{ см}$ ,  $a_2 = 3,61 \text{ см}$ ,  $I_{y_2} = I_{z_2} = 482 \text{ см}^4$ ,  $I_{y_2 z_2} = 282 \text{ см}^4$ .

Знак відцентрового моменту інерції для рівнобічного кутика вибираємо з умови, що полицки дають більший внесок у момент (знаки моментів полицок легко визначити по рисунку: у нашому випадку полицки лежать у першому і третьому квадрантах, де добуток  $y_2 z_2 > 0$ , отже  $I_{y_2 z_2} > 0$ ).

Зображуємо переріз на рис. 1.3 відповідно до вибраного масштабу.

2. Для визначення положення центру ваги перерізу вибираємо за початкову одну із введених на рис. 1 систем координат, наприклад, систему  $(y_1, z_1)$ . Визначаємо координати центрів ваги складових фігур в вибраній системі координат (перший індекс відповідає номеру системи координат, другий індекс – номеру фігури):

$$y_{11} = 0, \quad z_{11} = 0,$$

$$y_{12} = -b_1 - b_2 + a_1 + a_2 = -7,6 - 12,5 + 2,07 + 3,61 = -14,42 \text{ см},$$

$$z_{12} = h_1 / 2 - a_2 = 20 / 2 - 3,61 = 6,39 \text{ см}.$$

Площа поперечного перерізу  $A = A_1 + A_2 = 23,4 + 33,4 = 56,8 \text{ см}^2$ .

Визначаємо координати  $y_{1C}, z_{1C}$  центру ваги перерізу в системі координат  $(y_1, z_1)$ :

$$y_{1C} = \frac{\sum y_{1i} A_i}{\sum A_i} = \frac{y_{11} A_1 + y_{12} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 - 14,42 \cdot 33,4}{56,8} = -8,48 \text{ см},$$

$$z_{1C} = \frac{\sum z_{1i} A_i}{\sum A_i} = \frac{z_{11} A_1 + z_{12} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 + 6,39 \cdot 33,4}{56,8} = 3,76 \text{ см}.$$

Позначаємо на рис. 2 центр ваги складного перерізу  $C$  і вводимо центральну систему координат  $y_C z_C$  паралельно до початкової системи  $y_1, z_1$ .

3. Знаходимо координати  $c_{yi}, c_{zi}$  центрів ваги простих фігур  $C_1, C_2$  в осях  $y, z$ :

$$c_{y1} = y_{11} - y_{1C} = 0 + 8,48 = 8,48 \text{ см},$$

$$c_{z1} = z_{11} - z_{1C} = 0 - 3,76 = -3,76 \text{ см},$$

$$c_{y2} = y_{12} - y_{1C} = -14,42 + 8,48 = -5,94 \text{ см},$$

$$c_{z2} = z_{12} - z_{1C} = 6,39 - 3,76 = 2,63 \text{ см}.$$

Проведемо перевірку правильності положення знайденого центру ваги перерізу. Обчислюємо статичні моменти площі перерізу відносно центральних осей  $y, z$  (вони повинні дорівнювати нулеві):

$$S_y = \sum c_{zi} A_i = c_{z1} A_1 + c_{z2} A_2 = -3,76 \cdot 23,4 + 2,63 \cdot 33,4 = -87,98 + 87,84 = -0,14 \text{ см}^3 \approx 0,$$

$$S_z = \sum c_{yi} A_i = c_{y1} A_1 + c_{y2} A_2 = 8,48 \cdot 23,4 - 5,94 \cdot 33,4 = 198,43 - 198,39 = -0,034 \text{ см}^3 \approx 0.$$

4. Знаходимо осьові і відцентровий моменти інерції перерізу відносно центральних осей  $y, z$ :

$$I_y = \sum (I_{yi} + c_{zi}^2 A_i) = (I_{y1} + c_{z1}^2 A_1) + (I_{y2} + c_{z2}^2 A_2) = 1520 + (-3,76)^2 \cdot 23,4 + 482 + 2,63^2 \cdot 33,4 = 1520 + 330,8 + 482 + 231 = 2563,8 \text{ см}^4 \approx 2564 \text{ см}^4,$$

$$I_z = \sum (I_{zi} + c_{yi}^2 A_i) = (I_{z1} + c_{y1}^2 A_1) + (I_{z2} + c_{y2}^2 A_2) = 113 + 8,48^2 \cdot 23,4 +$$

$$+ 482 + (-5,94)^2 \cdot 33,4 = 113 + 1682,7 + 482 + 1178,5 = 3456,2 \text{ см}^4 \approx 3456 \text{ см}^4,$$

$$I_{yz} = \sum (I_{y_i z_i} + c_{zi} c_{yi} A_i) = (I_{y_1 z_1} + c_{z1} c_{y1} A_1) + (I_{y_2 z_2} + c_{z2} c_{y2} A_2) = 0 +$$

$$+ 8,48 \cdot (-3,76) \cdot 23,4 + 282 + (-5,94) \cdot 2,63 \cdot 33,4 = -746,1 + 282 - 521,8 = -986 \text{ см}^4.$$

5. Визначаємо положення головних центральних осей інерції, для чого знаходимо кут  $\alpha_0$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{y_C z_C}}{I_{z_C} - I_{y_C}} = \frac{2 \cdot (-986)}{3456 - 2564} = \frac{-1972}{892} = -2,2108$$

$$2\alpha_0 = -65,66^\circ, \quad \alpha_0 = -32,83^\circ.$$

Знаходимо значення тригонометричних функцій

$$\sin \alpha_0 = \sin(-32,83^\circ) = -0,5422, \quad \cos \alpha_0 = \cos(-32,83^\circ) = 0,8403,$$

$$\sin 2\alpha_0 = \sin(-65,66^\circ) = -0,9111, \quad \cos 2\alpha_0 = \cos(-65,66^\circ) = 0,4121,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \operatorname{tg}(-32,83^\circ) = -0,6452.$$

6. Обчислюємо головні осьові моменти інерції різними способами:

$$\begin{aligned} \text{а) } I_u &= I_y \cos^2 \alpha_0 + I_z \sin^2 \alpha_0 - I_{yz} \sin 2\alpha_0 = 2564 \cdot 0,8403^2 + \\ &+ 3456 \cdot (-0,5422)^2 - (-986) \cdot (-0,9111) = 1810,45 + 1016 - 898,34 = 1928 \text{ см}^4, \\ I_v &= I_y \sin^2 \alpha_0 + I_z \cos^2 \alpha_0 + I_{yz} \sin 2\alpha_0 = 2564 \cdot (-0,5422)^2 + \\ &+ 3456 \cdot 0,8403^2 - 986 \cdot (-0,9111) = 753,77 + 2440,3 + 898,34 = 4092,4 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\text{б) } I_u = I_y - I_{yz} \operatorname{tg} \alpha_0 = 2564 - (-986) \cdot (-0,6452) = 1927,8 \text{ см}^4,$$

$$I_v = I_z - I_{yz} \operatorname{tg} \alpha_0 = 3456 + (-986) \cdot (-0,6452) = 4092,2 \text{ см}^4;$$

в) моменти інерції відносно головних центральних осей повинні співпадати з екстремальними значеннями осьових моментів інерції:

$$\begin{aligned} I_{\max} &= \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \frac{2564 + 3456}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2564 - 3456}{2}\right)^2 + (-986)^2} = \\ I_{\min} &= 3010 \pm \sqrt{198916 + 972196} = 3010 \pm 1082,2 \end{aligned}$$

$$I_{\max} = 4092,2 \text{ см}^4 = I_v, \quad I_{\min} = 1927,8 \text{ см}^4 = I_u.$$

Для перевірки обчислимо також відцентровий момент інерції (він повинен дорівнювати нулю)

$$I_{uv} = I_{yz} \cos 2\alpha_0 + (I_y - I_z) \frac{\sin 2\alpha_0}{2} = -986 \cdot 0,4121 + \\ + (2564 - 3456) / 2 \cdot (-0,9111) = -406,33 + 406,35 = 0,02 \text{ см}^4 \approx 0.$$

На рисунку проводимо головні центральні вісі інерції, повернуті на кут  $\alpha_0 = -32,83^\circ$  проти годинникової стрілки (тобто на кут  $32,83^\circ$  за годинниковою стрілкою) від центральних осей  $y, z$ .

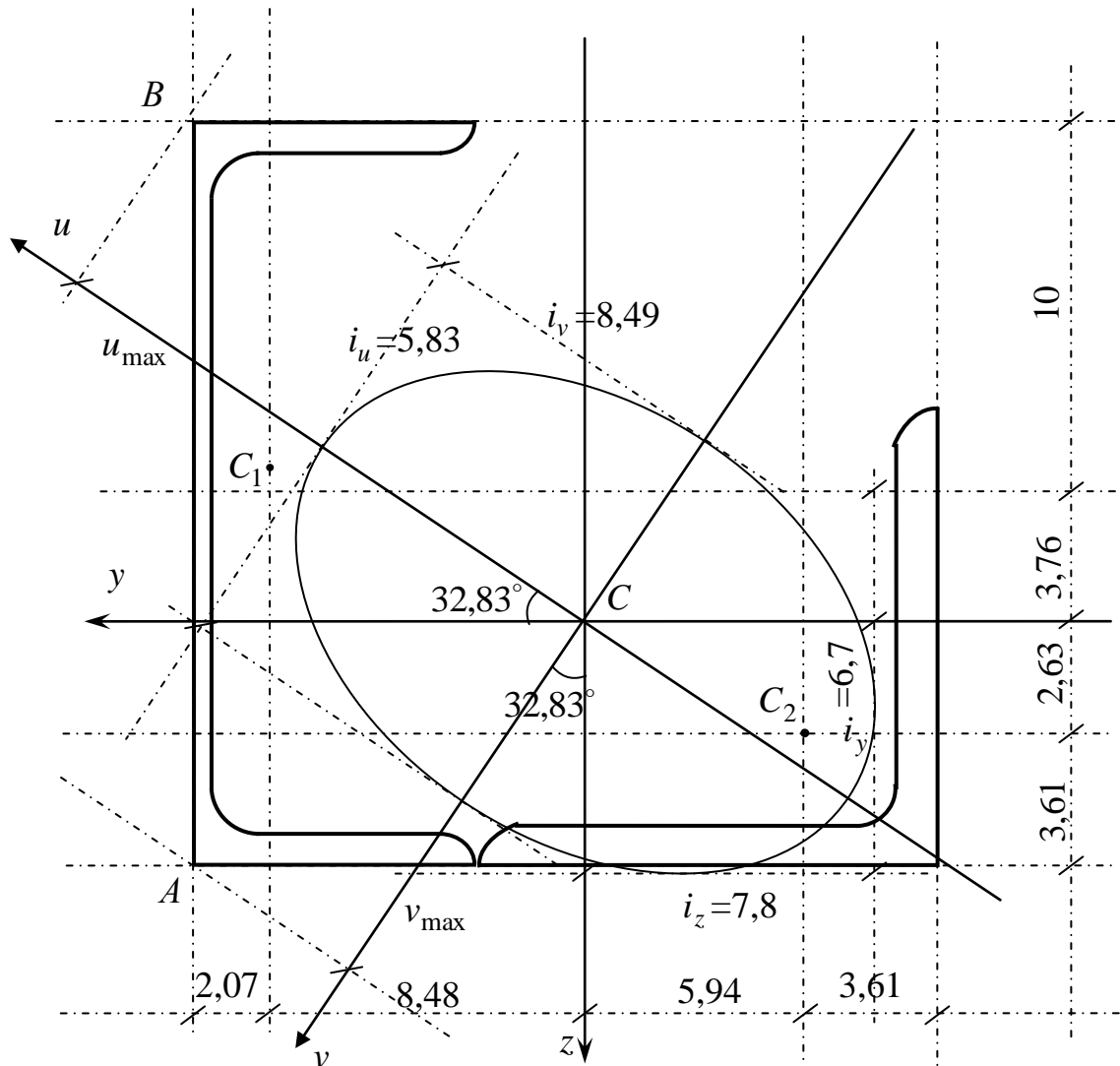


Рис. 1.3

7. Обчислюємо головні радіуси інерції

$$i_u^2 = \frac{I_u}{A} = \frac{1927,8}{56,8} = 34 \text{ см}^2, \quad i_u = 5,83 \text{ см},$$

$$i_v^2 = \frac{I_v}{A} = \frac{4092,2}{56,8} = 72 \text{ см}^2, \quad i_v = 8,49 \text{ см}$$

і будуємо еліпс інерції

$$\frac{u^2}{i_v^2} + \frac{v^2}{i_u^2} = 1.$$

Маючи побудований еліпс інерції, можна графічно визначити осьові моменти інерції перерізу відносно довільної центральної системи координат. Вимірюємо на рисунку значення радіусів інерції  $i_y$  та  $i_z$  відносно осей  $z$  і  $y$  (для цього треба провести паралельні цим осям дотичні до еліпса інерції і виміряти відстань між осями і дотичними)

$$i_y = 6,7 \text{ см}, \quad i_z = 7,8 \text{ см}.$$

По вимірних радіусах інерції обчислимо осьові моменти інерції відносно центральних осей

$$I_y = i_y^2 \cdot A = 6,7^2 \cdot 56,8 = 2550 \text{ см}^4, \quad I_z = i_z^2 \cdot A = 7,8^2 \cdot 56,8 = 3456 \text{ см}^4$$

і порівнюємо з визначеними раніше значеннями

$$I_y = 2564 \text{ см}^4, \quad I_z = 3456 \text{ см}^4.$$

Невеликі розбіжності свідчать про правильність аналітичних обчислень і геометричних побудов.

8. Визначаємо головні моменти опору відносно осей  $u, v$  за формулами

$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}}, \quad W_v = \frac{I_v}{u_{\max}},$$

в яких  $u_{\max}$  – відстань до найбільш віддаленої точки перерізу від осі  $v$ ,  $v_{\max}$  – відстань до найбільш віддаленої точки перерізу від осі  $u$ .

Для визначення  $u_{\max}$ ,  $v_{\max}$  знаходимо координати точок  $A$  і  $B$  у центральній системі координат  $y, z$ , а потім скористаємося формулами перетворення координат при повороті координатних осей

$$u_A = y_A \cos \alpha_0 + z_A \sin \alpha_0, \\ v_A = -y_A \sin \alpha_0 + z_A \cos \alpha_0.$$

Для точки  $A$  знаходимо:

$$y_A = 2,07 + 8,48 = 10,55 \text{ см}, \quad z_A = 3,61 + 2,63 = 6,24 \text{ см},$$

$$v_{\max} = |-y_A \sin \alpha_0 + z_A \cos \alpha_0| = |-10,55 \cdot (-0,5422) + 6,24 \cdot 0,8403| = 5,72 + 5,24 = 10,96 \text{ см}.$$

Для точки  $B$  знаходимо:

$$y_B = y_A = 10,55 \text{ см}, \quad z_B = -10 - 3,76 = -13,76 \text{ см},$$

$$u_{\max} = |y_B \cos \alpha_0 + z_B \sin \alpha_0| = |10,55 \cdot 0,8403 - 13,76 \cdot (-0,5422)| = 8,86 + 7,46 = 16,32 \text{ см.}$$

Вимірюємо на рис.1.3 значення  $u_{\max}$ ,  $v_{\max}$  в масштабі:

$$u_{\max} \approx 16 \text{ см}, \quad v_{\max} \approx 11 \text{ см},$$

що відповідає обчисленим величинам.

Обчислюємо моменти опору відносно головних осей

$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}} = \frac{1928}{10,96} = 176 \text{ см}^3, \quad W_v = \frac{I_v}{u_{\max}} = \frac{4092}{16,3} = 251 \text{ см}^3.$$

## 2. Розтягування (стискування) стержнів. Розрахунок стержневих систем.

**Теоретичні відомості.** При одноосному навантаженні стержня рівнодійна внутрішніх сил в заданому перерізі називається *поздовжньою силою*  $N$ . Для визначення сили  $N$  використовується метод перерізів: стержень розрізається на дві частини, одна з яких відкидається; вплив відкинутої частини на ту, що залишилась, замінюють зусиллям  $N$ . Значення зусилля  $N$  визначається з рівняння рівноваги для частини стержня, що залишилась, і залежить від зовнішніх сил, в тому числі власної ваги.

При навантаженні стержня зосередженими поздовжніми силами без врахування власної ваги поздовжня сила  $N$  залишається постійною в довільному перерізі ділянки стержня між точками прикладання сил. Зусилля  $N$  дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, що діють на відрізану частину стержня.  $N$  додатне, якщо ділянка розтягнута (діє від перерізу), і від'ємне, якщо ділянка стиснута (діє до перерізу).

Графік, що показує зміну  $N$  по довжині стержня, називається *епюрою поздовжніх сил* (епюрою  $N$ ).

При розрахунках на розтягування (стискування) стержнів вважаємо, що для поперечних перерізів стержня виконується *гіпотеза плоских перерізів*: плоскі поперечні перерізи стержня в процесі деформування рухаються як жорсткі тіла, залишаючись плоскими та перпендикулярними до деформованої вісі стержня.

Нормальне напруження в конкретному перерізі стержня з врахуванням гіпотези плоских перерізів визначається за формулою

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.1)$$

де  $A$  – площа поперечного перерізу. Графік, що показує зміну нормальних напружень по довжині стержня, називається епюрою нормальних напружень (епюрою  $\sigma$ ).

Переріз, в якому нормальне напруження має найбільше абсолютне значення ( $\sigma = \sigma_{\max}$ ), називається небезпечним.

В межах пружності  $\sigma \leq \sigma_e$  виконується закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.2)$$

де  $E$  – модуль Юнга (модуль пружності першого роду),  $\varepsilon = \frac{du}{dx}$  – відносна поздовжня деформація.

Видовження  $u_l = \Delta$  ділянки стержня довжиною  $l$  зі сталою жорсткістю на розтяг  $EA$  під дією сталої сили  $N$  знаходиться за формулою

$$\Delta = \frac{Nl}{EA}. \quad (2.3)$$

Умова міцності при осьовому розтягуванні або стискуванні має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq \sigma_{adm}, \quad (2.4)$$

де  $\sigma_{adm}$  – допустимі нормальні напруження для конкретного матеріалу.

Для крихких матеріалів (камінь, бетон, цегла) допустимі значення нормальних напружень на розтягування та стискування суттєво відрізняються, тому оцінка міцності для розтягнутих і стиснутих ділянок проводиться окремо:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^+ &\leq \sigma_{adm}^+, \\ \sigma_{\max}^- &\leq \sigma_{adm}^-. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При перевірці міцності допускається перенапруження

$$\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{adm}}{\sigma_{adm}} \cdot 100\% \leq 5\%. \quad (2.6)$$

При підборі перерізу необхідна площа поперечного перерізу знаходиться за допомогою виразу



$$A_{нб} = \frac{N_{\max}}{\sigma_{adm}}. \quad (2.7)$$

**Задача 2.1. Перевірка міцності ступінчатої колони.** Перевірити міцність заданої в дод. 5 ступінчатої кам'яної колони та визначити переміщення її характерних перерізів, якщо модуль Юнга  $E = 0,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , допустимі напруження  $\sigma_{adm}^+ = 0,3 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{adm}^- = 3 \text{ МПа}$ .

**П р и к л а д .** Двоступінчата кам'яна колона (площа верхнього перерізу  $A_1 = 0,3 \text{ м}^2$ , площа нижнього перерізу  $A_2 = 0,5 \text{ м}^2$ ) навантажена сила-

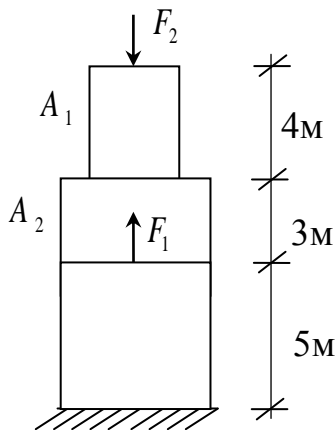


Рис. 2.1

ми  $F_1 = 320 \text{ кН}$ ,  $F_2 = 250 \text{ кН}$  (рис.2.1). Побудувати епюри поздовжньої сили  $N$ , нормальних напружень  $\sigma$  та переміщень поперечних перерізів  $u$  (модуль Юнга  $E = 0,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ). Перевірити міцність колони, якщо допустиме напруження на розтягування  $\sigma_{adm}^+ = 0,3 \text{ МПа}$ , на стискування  $\sigma_{adm}^- = 3 \text{ МПа}$ .

**Р о з в ' я з о к .** 1. Розбиваємо стержень на ділянки по точках прикладання сили та зміни площі поперечного перерізу та номеруємо їх, починаючи з вільного кінця (рис.2.3).

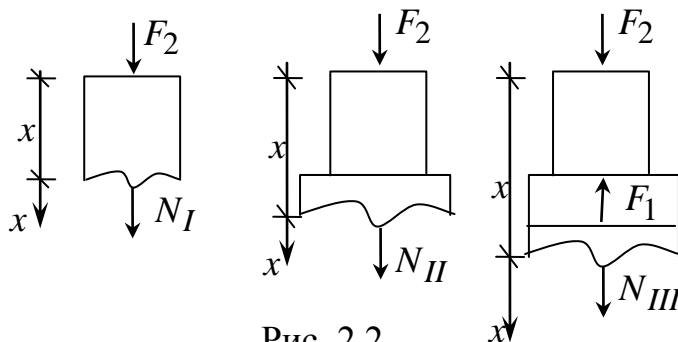


Рис. 2.2

За допомогою методу перерізів знаходимо значення внутрішньої сили  $N$  на кожній з ділянок (рис. 2.2):

Рівняння рівноваги для першої та другої ділянок однакові

$$N_I + F_2 = 0, \quad N_{II} + F_2 = 0, \quad N_I = N_{II} = -F_2 = -250 \text{ кН}.$$

$$\text{Для третьої ділянки маємо} \quad N_{III} + F_2 - F_1 = 0, \\ N_{III} = F_1 - F_2 = 320 - 250 = 70 \text{ кН}.$$

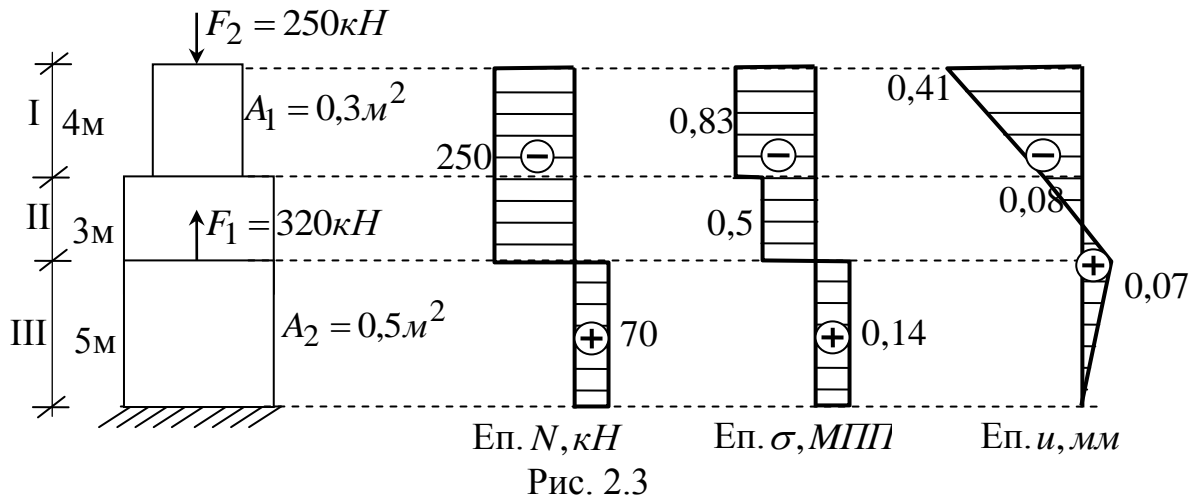
2. Знаходимо нормальні напруження  $\sigma$  на кожній з ділянок:

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_1} = \frac{-250 \cdot 10^3}{0.3} = -833,3 \text{ кПа} = -0.83 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_2} = \frac{-250 \cdot 10^3}{0.5} = -500 \text{ кПа} = -0.5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_2} = \frac{70 \cdot 10^3}{0.5} = 140 \text{ кПа} = 0.14 \text{ МПа}.$$

По знайдених значеннях  $N$  та  $\sigma$  на рис. 2.3 будемо епюри :



3. Робимо перевірку міцності по максимальних напруженнях на стиснутих і розтягнутих ділянках:

$$\sigma_{\max}^- = 0,83 \text{ МПа} \leq \sigma_{adm}^- = 3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^+ = 0,14 \text{ МПа} \leq \sigma_{adm}^+ = 0,3 \text{ МПа}.$$

Міцність колони забезпечено.

4. Визначаємо видовження кожної з ділянок стержня:

$$\Delta_I = \frac{N_I l_I}{EA_1} = \frac{\sigma_I l_I}{E} = \frac{-0,83 \cdot 4}{0,1 \cdot 10^5} = -3,32 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,33 \text{ мм};$$

$$\Delta_{II} = \frac{N_{II} l_{II}}{EA_2} = \frac{\sigma_{II} l_{II}}{E} = \frac{-0,5 \cdot 3}{0,1 \cdot 10^5} = -1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,15 \text{ мм};$$

$$\Delta_{III} = \frac{N_{III} l_{III}}{EA_2} = \frac{\sigma_{III} l_{III}}{E} = \frac{0,14 \cdot 5}{0,1 \cdot 10^5} = 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,07 \text{ мм}.$$

Переміщення характерних перерізів стержня визначаємо, починаючи з закріплення стержня:

$$u(12) = 0;$$

$$u(8) = u(12) + \Delta_{III} = 0 + 0,07 = 0,07 \text{ м};$$

$$u(5) = u(8) + \Delta_{II} = 0,07 - 0,15 = -0,08 \text{ м};$$

$$u(0) = u(5) + \Delta_I = -0,08 - 0,33 = -0,41 \text{ м}.$$

На рис. 2.3 будемо епюру переміщень.

### Задача 2.2. Розрахунок статично визначеної стержневої системи.

Стержнева підвіска, що складається з двох шарнірно закріплених стержнів однакового поперечного перерізу (дод. 6), навантажена силою  $F$ . Потрібно визначити зусилля в стержнях, підібрати площі поперечних перерізів стержнів при  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$  та визначити переміщення точки В прикладання сили.

П р и к л а д. До шарнірно з'єднаних стержнів 1, 2 однакового поперечного перерізу підвішено вантаж вагою  $F = 120 \text{ кН}$ . Потрібно визначити зусилля в стержнях, підібрати площі поперечних перерізів стержнів при  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$  та визначити переміщення точки В прикладання сили.

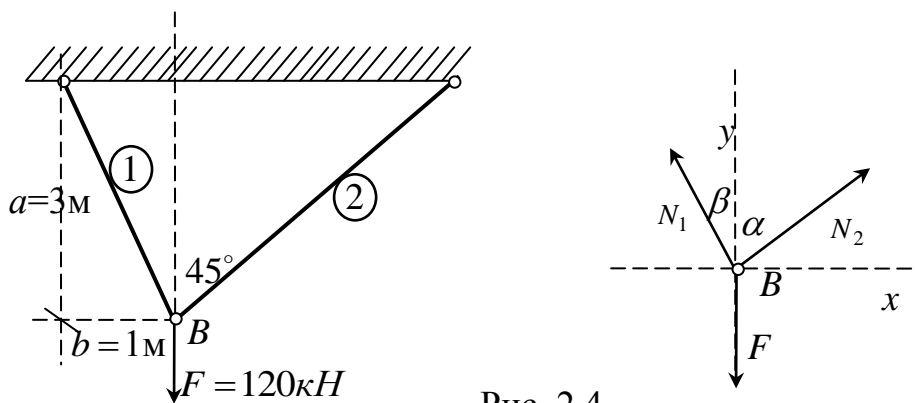


Рис. 2.4

Р о з в' я з а н н я. При такому навантаженні в стержнях 1, 2 виникають внутрішні поздовжні сили  $N_1, N_2$ , які знаходимо з рівняння рівноваги для точки В (рис. 2.4):

$$-N_1 \sin \beta + N_2 \sin \alpha = 0,$$

$$N_1 \cos \beta + N_2 \cos \alpha - F = 0.$$

Знайдемо довжини стержнів та тригонометричні значення для кутів:

$$l_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} = 3,16 \text{ м},$$

$$l_2 = a / \cos 45^\circ = 3\sqrt{2} = 4,24 \text{ м},$$

$$\sin \alpha = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \alpha = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \beta = b / l_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \beta = a / l_1 = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Розв'язуємо систему рівнянь рівноваги:

$$N_1 = N_2 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = N_2 \frac{\sqrt{2}\sqrt{10}}{1} = \sqrt{5}N_2, \quad \sqrt{5}N_2 \frac{3}{\sqrt{10}} + N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0,$$

$$N_2\left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F = 2\sqrt{2}N_2 - F = 0,$$

$$N_2 = \frac{F}{2\sqrt{2}} = \frac{120}{2\sqrt{2}} = 42,4 \text{ кН}, \quad N_1 = \sqrt{5}N_2 = \sqrt{5} \cdot 42,4 = 94,9 \approx 95 \text{ кН}.$$

Підбираємо площу поперечних перерізів стержнів

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq \sigma_{adm} \rightarrow A_{нб} = \frac{N_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{95 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,59 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \approx 6 \text{ см}^2.$$

Визначаємо напруження в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{95 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 15,8 \cdot 10^7 \text{ Па} = 158 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{42,4 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 7,07 \cdot 10^7 \text{ Па} = 70,7 \text{ МПа}.$$

Видовження стержнів

$$\Delta_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = \frac{158 \cdot 10^6 \cdot 3,16}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 249,6 \cdot 10^{-5} \text{ м} \approx 2,5 \text{ мм},$$

$$\Delta_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = \frac{70,7 \cdot 10^6 \cdot 4,24}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 149,8 \cdot 10^{-5} \text{ м} \approx 1,5 \text{ мм}.$$

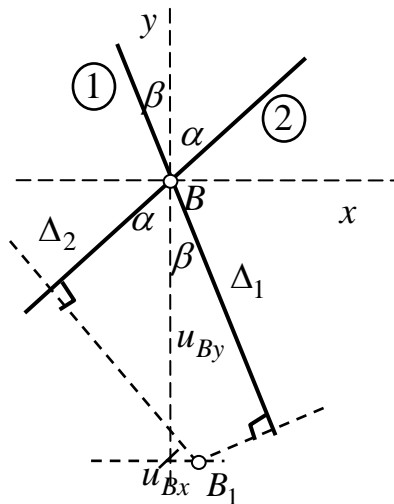


Рис. 2.5

Положення точки  $B$  після деформування системи знайдемо за допомогою *методу засічок*: на кожному з стержнів відкладаємо від точки  $B$  його видовження (або скорочення) та проводимо перпендикуляри до стержнів в отриманих точках. Точка  $B$  переміститься в точку  $B_1$  перетину цих перпендикулярів (див. рис. 2.5). Проекції переміщення точки  $B$   $u_{Bx}, u_{By}$  на осі  $x, y$  знайдемо за допомогою наступного правила: видовження  $\Delta$  стержня дорівнює сумі проекцій переміщень  $u_{Bx}, u_{By}$  на на-

прямок цього стержня. Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \Delta_1 = u_{By} \cos \beta + u_{Bx} \sin \beta, \\ \Delta_2 = u_{By} \cos \alpha - u_{Bx} \sin \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} 3u_{By} + u_{Bx} = \Delta_1 \sqrt{10}, \\ u_{By} - u_{Bx} = \Delta_2 \sqrt{2}, \end{cases}$$

$$u_{By} = \frac{\Delta_2 \sqrt{2} + \Delta_1 \sqrt{10}}{4} = \frac{1,5\sqrt{2} + 2,5\sqrt{10}}{4} = 2,5 \text{ мм},$$

$$u_{Bx} = -\Delta_2 \sqrt{2} + u_{By} = -1,5\sqrt{2} + 2,5 = 0,38 \text{ мм}.$$

Повне переміщення точки  $B$

$$u_B = \sqrt{u_{Bx}^2 + u_{By}^2} = \sqrt{2,5^2 + 0,38^2} = 2,53 \text{ мм}.$$

Рисунок для методу засічок потрібно виконувати в масштабі. В такому випадку значення  $u_{Bx}, u_{By}$  можна перевірити шляхом безпосереднього вимірювання на рисунку.

### 3. Побудова епюр внутрішніх зусиль

**Теоретичні відомості.** Побудова епюр внутрішніх зусиль для балки при плоскому згині. Якщо зовнішнє навантаження лежить в площині, що проходить через одну з головних осей поперечного перерізу та вісь стержня, та перпендикулярне до вісі балки, балка знаходиться в стані *плоского згину*. При цьому в поперечних перерізах виникають поперечна сила  $Q$  та згинальний момент  $M$ .

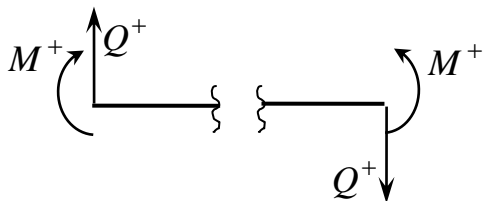


Рис. 3.1

Поперечна сила  $Q$  визначається як алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на перпендикуляр до вісі балки з одного боку від перерізу. Поперечна сила додатна, якщо вона намагається повернути відрізану частину балки

за годинниковою стрілкою.

Згинальний момент  $M$  визначається як алгебраїчна сума моментів всіх сил з одного боку від перерізу відносно точки перерізу. Згинальний момент додатний, якщо він стискує верхні волокна балки (зовнішні волокна рами). Додатні напрямки для сил та моментів з одного боку від перерізу ілюструються рис.3.1 (правило знаків).

Побудова епюр починається з визначення *реакцій в'язей*. В розрахункових схемах плоских конструкцій зустрічаються три типи опор:

- шарнірно–рухома опора (рис. 3.2.а), яку можна замінити однією реакцією  $R_a$ , що діє в напрямку обмеження руху балки;
- шарнірно–нерухома опора (рис. 3.2.б), характеризується двома складовими опорної реакції: горизонтальною  $H_a$  та вертикальною  $R_a$ ;

– жорстке защемлення – опора (рис. 3.2.в) замінюється трьома складовими реакції: горизонтальною силою  $H_a$ , вертикальною  $R_a$  та реактивним моментом  $M_a$ .

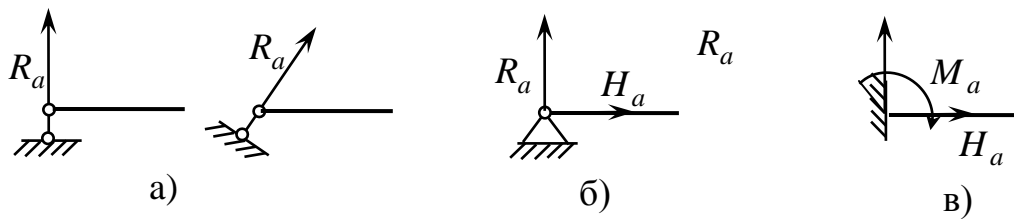


Рис. 3.2

Реакції в'язей визначаються з *рівнянь рівноваги*. Для плоскої системи сил маємо три лінійно-незалежних рівняння рівноваги. Надалі для визначення реакцій шарнірно-закріпленої балки зручно користуватися наступною системою:

$\sum F_x = 0$  – сума проекцій всіх сил на вісь балки дорівнює нулю;

$\sum M_a = 0$  – сума моментів всіх сил відносно закріплення  $A$  дорівнює нулю;

$\sum M_b = 0$  – сума моментів всіх сил відносно закріплення  $B$  дорівнює нулю.

Для перевірки правильності знайдених реакцій використовуємо рівняння  $\sum F_z = 0$  – сума проекцій всіх сил на перпендикуляр до вісі балки дорівнює нулю.

Наявність проміжного шарніру додає ще одне рівняння рівноваги:  $\sum M_C^n = 0$  або  $\sum M_C^n = 0$  – сума моментів всіх сил, що діють зліва (справа) від шарніру  $C$  відносно точки  $C$ , дорівнює нулю.

Якщо кількість невідомих реакцій співпадає з кількістю рівнянь рівноваги, то конструкція є *статично визначеною*.

Якщо невідомих реакцій більше, ніж рівнянь рівноваги, то конструкція є *статично невизначеною*.

Епюри внутрішніх зусиль будуються шляхом застосування методу перерізів на окремих ділянках балки або в характерних точках. Характерними називаються точки прикладання зосереджених сил (включаючи реакції в'язей) або моментів та початку і кінця розподіленого навантаження. Розбиття балки на ділянки також проводиться по характерних точках.

Епюри внутрішніх зусиль будуються на осьовій лінії заданої балки. Додатні значення  $Q$  відкладаються вгору від осьової лінії, від'ємні – вниз. Додатні значення згинального моменту  $M$  відкладаються вниз від осьової лінії, від'ємні – вгору (епюра  $M$  будується на розтягнутих волокнах).

Для згинального моменту  $M$  та поперечної сили  $Q$  виконуються диференціальні залежності, що випливають з рівняння рівноваги елемента довжиною  $dx$ :

$$\frac{dM}{dx} - Q = 0, \quad \frac{dQ}{dx} + q = 0. \quad (3.1)$$

З диференціальних залежностей (3.1) та вищенаведених правил визначення внутрішніх зусиль випливають наступні *правила побудови епюр* згинального моменту  $M$  та поперечної сили  $Q$ :

1. В точці прикладання зосередженої сили на епюрі  $Q$  буде розрив на величину цієї сили, на епюрі  $M$  спостерігається злом.
2. В точці прикладання зосередженого моменту на епюрі  $M$  буде розрив на величину цього моменту, епюра  $Q$  неперервна.
3. На ділянках, де розподілене навантаження відсутнє, епюра  $Q$  буде горизонтальною, епюра  $M$  – похилою прямою.
4. На ділянках прикладання рівномірно розподіленого навантаження епюра  $Q$  – похила пряма, епюра  $M$  – парабола.
5. При  $Q > 0$   $M$  зростає, при  $Q < 0$   $M$  спадає, при  $Q = 0$  на епюрі  $M$  виникає екстремум (вершина параболи).

#### Побудова епюр для плоских рам під дією плоскої системи сил.

Рамами називають системи, що складаються з прямолінійних стержнів, жорстко з'єднаних між собою. Вісь рами являє собою ламану лінію, але кожен ділянку можна розглядати як балку. При

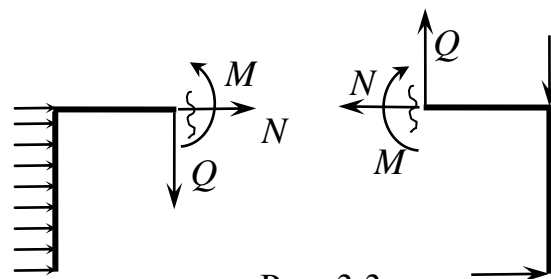


Рис. 3.3

цьому в поперечних перерізах виникають поздовжня сила  $N$ , поперечна сила  $Q$  та згинальний момент  $M$ . Поздовжня сила  $N$  визначається як алгебраїчна сума проекцій всіх сил (включаючи опорні реакції) на вісь балки з одного боку від перерізу (рис. 3.3). Якщо поздовжня сила

викликає розтяг ділянки, до вона додатна, і навпаки. Поперечна сила  $Q$  – алгебраїчна сума проєкцій всіх прикладених до відрізаної частини рами сил на перпендикуляр до вісі, знак “+” в випадку, якщо сила повертає відрізану частину за годинниковою стрілкою. Згинальний момент  $M$  шукаємо як алгебраїчну суму моментів всіх сил, що діють з одного боку від перерізу, відносно точки перерізу; знак “+” маємо, коли стискаються зовнішні волокна рами. Для побудови епюр знаходимо значення  $N, Q, M$  в характерних перерізах, а потім з’єднують знайдені точки згідно до правил побудови епюр. Додатні значення  $N, Q$  відкладаються з зовнішнього боку рами, від’ємні – з внутрішнього. Еюра  $M$  будується на розтягнутих волокнах.

Побудова епюр для плоских криволінійних стержнів. В поперечних перерізах плоского криволінійного бруса діють, як і в рамах, зусилля  $N, Q, M$ . Найчастіше розглядаються стержні малої кривизни, вісь яких є дугою кола ( $h/R < 1/5$ ,  $h$  – висота поперечного перерізу,  $R$  – радіус кола). В такому випадку зручно вводити полярну систему координат, і внутрішні зусилля будуть функціями від кута  $\varphi$ :  $N(\varphi), Q(\varphi), M(\varphi)$ .

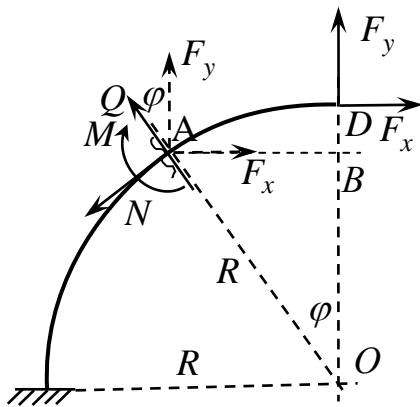


Рис. 3.4

Зусилля в перерізі  $\varphi$  (рис. 3.4)

знаходяться з рівнянь рівноваги для відрізаної частини: сума проєкцій всіх сил на нормаль до перерізу (дотичну до кола)

$$N(\varphi) - F_y \sin \varphi - F_x \cos \varphi = 0,$$

сума проєкцій всіх сил на перпендикуляр до вісі (на радіус кола)

$$Q(\varphi) + F_y \cos \varphi - F_x \sin \varphi = 0,$$

сума моментів всіх сил відносно точки перерізу (точки А)

$$-M(\varphi) + F_y \cdot AB - F_x \cdot BD = -M(\varphi) + F_y \cdot R \sin \varphi - F_x \cdot (R - R \cos \varphi) = 0.$$

Таким чином, для стержня, навантаженого силами  $F_x, F_y$  (рис.3.4)

внутрішні зусилля визначатимуться за формулами

$$\begin{aligned} N(\varphi) &= F_y \sin \varphi + F_x \cos \varphi, & Q(\varphi) &= -F_y \cos \varphi + F_x \sin \varphi, \\ M(\varphi) &= F_y \cdot R \sin \varphi - F_x R \cdot (1 - \cos \varphi). \end{aligned} \quad (3.2)$$



Якщо ділянка стержня навантажена рівномірно розподіленим по дузі кривої навантаженням  $q$ , то рівнодійна від нього дорівнює добутку навантаження  $q$  на довжину хорди, що стягує цю дугу, і прикладена посередині цієї хорди перпендикулярно до неї (рис. 3.5)

Внутрішні зусилля в криволінійному стержні задовольняють диференціальним залежностям, що випливають з рівнянь рівноваги для елементарної ділянки:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\varphi} &= -Q; & \frac{dQ}{d\varphi} &= N + qR; \\ \frac{dM}{d\varphi} &= -QR. \end{aligned} \quad (3.3)$$

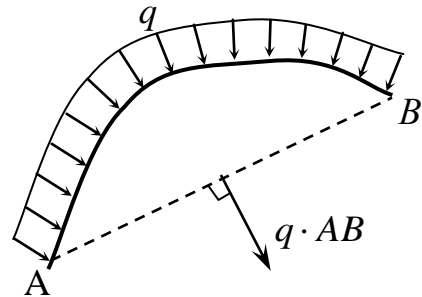


Рис. 3.5

Для побудови епюр обчислюємо значення внутрішніх зусиль в перерізах з певним кроком по  $\varphi$  (наприклад, з кроком  $\pi/6$ ). Знайдені значення внутрішніх зусиль відкладаються на епюрах по нормалі до дуги кола. Додатні значення сил відкладаємо на зовнішніх волокнах стержня, епюра моментів будується на розтягнутих волокнах. В точках прикладання зосереджених сил повинен бути скачок на епюрах сил, в точці прикладання зосередженого моменту – скачок на епюрі моментів. На ділянках, де  $Q=0$ ,  $M$  стала; в точці, де  $Q=0$ , на епюрі  $M$  маємо екстремум.

Побудова епюр для плоскої рами під дією вертикального навантаження. При такому навантаженні в перерізах рами виникають поперечна сила  $Q$ , згинальний момент  $M$  та крутильний момент  $M_k$ . Вони знаходяться як алгебраїчна сума сил та моментів зовнішніх сил, що

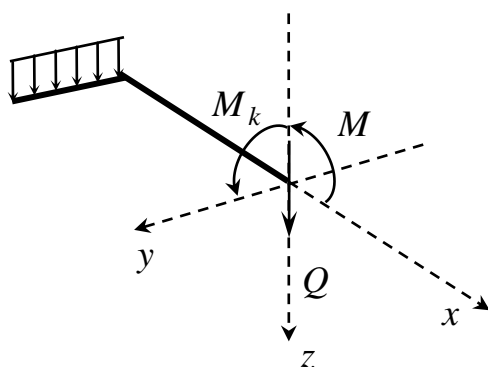


Рис. 3.6

діють з одного боку від перерізу. Будемо вважати, що згинальний момент  $M$  додатній, якщо він стискує верхні волокна балки; крутильний момент додатній, якщо він закручує відрізану частину проти годинникової стрілки (рис 3.6). При повороті вісі рами на  $90^\circ$  кру-

тильний момент стає згинальним, а згинальний стає крутильним. Поперечна сила та згинальний момент на кожній з ділянок задовольняють рівнянням рівноваги (3.1) та правилам побудови епюр.

Внутрішні зусилля при просторовому навантаженні. При просторовому навантаженні внутрішні зусилля в поперечних перерізах стержнів зводяться до головного вектору  $\vec{F}$  і головного моменту  $\vec{M}$ . Введемо систему координат: вісь  $x$  направлена вздовж вісі стержня, осі  $y, z$  є головними центральними вісями поперечного перерізу.

Проектуючи головний вектор  $\vec{F}$  і головний момент  $\vec{M}$  на вісі  $x, y, z$ , отримуємо шість складових внутрішніх зусиль: поздовжня сила  $N$ , поперечні (перерізуючі) сили  $Q_y, Q_z$ , згинальні моменти  $M_y, M_z$  та крутильний момент  $M_k = M_x$  (рис.

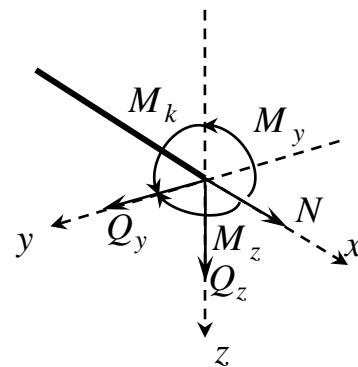


Рис. 3.7

та крутильний момент  $M_k = M_x$  (рис. 3.7). Поздовжня сила  $N$  додатня, якщо вона викликає розтягування; поперечні сили  $Q_y, Q_z$  додатні, якщо вони повертають відрізану частину стержня за годинниковою стрілкою при спостереженні з боку вісей  $z, y$  відповідно; моменти  $M_x, M_y, M_z$  будемо вважати додатніми, якщо вони діють проти годинникової стрілки при спостереженні з боку осей  $x, y, z$  відповідно. Внутрішні зусилля визначаються з рівнянь рівноваги відрізаної частини балки або як алгебраїчна сума проекцій сил на відповідну вісь чи моментів відносно відповідної вісі.

**Задача 3.1. Побудова епюр внутрішніх зусиль для консольної балки.** Для заданої балки (дод. 7) побудувати епюри поперечної сили  $Q$  та згинального моменту  $M$ .

**П р и к л а д.** Для консольної балки (рис. 3.8) визначити внутрішні зусилля методом перерізів на ділянках та побудувати їх епюри.

**Р о з в' я з а н н я.** Для консольної балки визначати реакції в'язей не обов'язково, тому будемо будувати епюри починаючи з незакріпленого кінця. Водимо вісь  $x$  зправа наліво та розбиваємо стержень на ділянки характерними точками. На кожній з ділянок робимо умовний переріз та прикладаємо поперечну силу  $Q(x)$  та згинальний момент

$M(x)$  згідно до правила знаків (рис. 3.1). Інших внутрішніх сил не буде, оскільки балка знаходиться в стані плоского згину. Записуємо систему рівнянь рівноваги для відрізаної частини (рис. 3.9), що складається з суми проєкцій всіх сил на вертикальну вісь та суми моментів всіх сил відносно точки перерізу, та знаходимо  $Q(x)$  та  $M(x)$  на кожній з ділянок. В отримані вирази підставляємо координати початку та кінця ділянки.

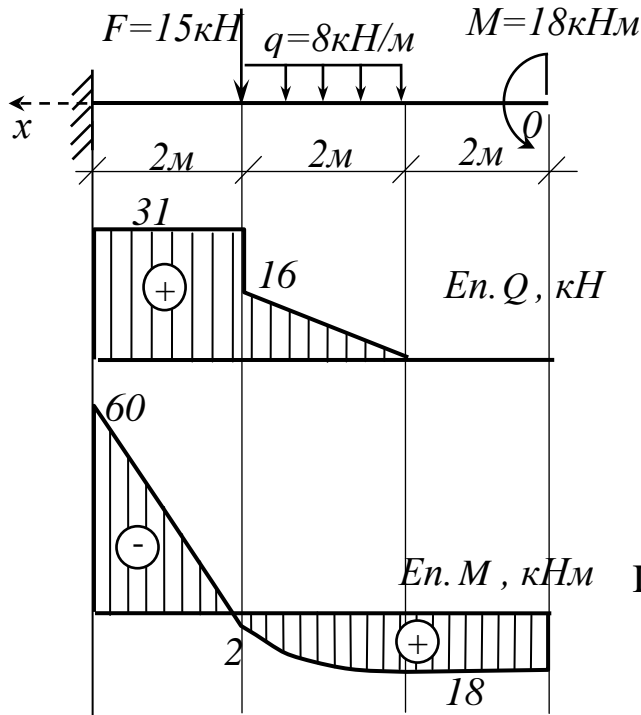


Рис. 3.8

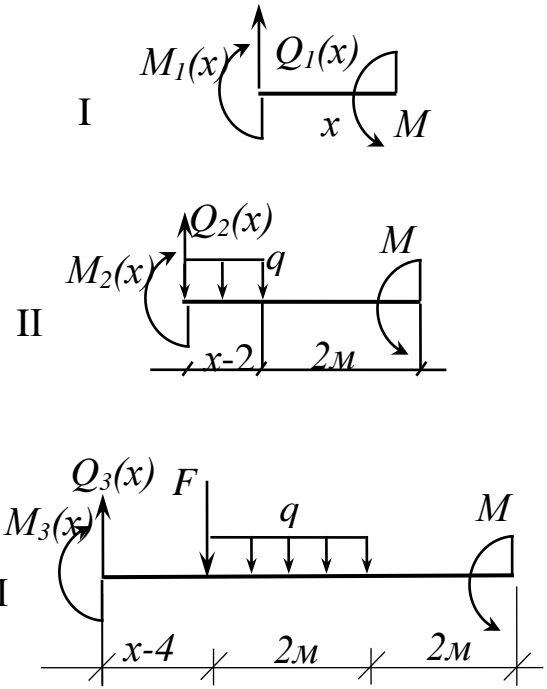


Рис. 3.9

I)  $0 \leq x < 2$ :  $Q_1(x) = 0$ ,  $-M_1(x) + M = 0$ ,  $M_1(x) = M = 18 \text{ кНм}$ ;

II)  $2 < x < 4$ :  $-Q_2(x) + q(x-2) = 0$ ,  $-M_2(x) - q \frac{(x-2)^2}{2} + M = 0$ ,

$Q_2(x) = q(x-2) = 8(x-2)$ ,  $Q_2(2) = 0$ ,  $Q_2(4) = 8(4-2) = 16 \text{ кН}$ ,

$M_2(x) = -q \frac{(x-2)^2}{2} + M = -8 \frac{(x-2)^2}{2} + 18 = -4(x-2)^2 + 18$ ,

$M_2(2) = 18 \text{ кНм}$ ;  $M_2(4) = -4(4-2)^2 + 18 = 2 \text{ кНм}$ ;

III)  $4 < x < 6$ :  $-Q_3(x) + q \cdot 2 + F = 0$ ,

$-M_3(x) - F(x-4) - q \cdot 2(x-3) + M = 0$ ,

$Q_3(x) = 2q + F = 2 \cdot 8 + 15 = 31 \text{ кНм}$ ,

$M_3(x) = -F(x-4) - q \cdot 2(x-3) + M = -15(x-4) - 8 \cdot 2(x-3) + 18 = -31x + 126$ ,

$$M_3(4) = -31 \cdot 4 + 126 = 2 \text{ кНм}; \quad M_3(6) = -31 \cdot 6 + 126 = -60 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюри для поперечної сили  $Q(x)$  та згинального моменту  $M(x)$  по отриманих значеннях.

### Задача 3.2. Побудова епюр внутрішніх зусиль для плоскої рами.

Для заданої плоскої рами під дією плоскої системи сил (дод. 13, 14) побудувати епюри поздовжньої сили  $N$ , поперечної сили  $Q$  та згинального моменту  $M$ .

**П р и к л а д.** Для плоскої рами (рис. 3.10) визначити внутрішні зусилля та побудувати їх епюри.

**Р о з в' я з а н н я.** Рама шарнірно закріплена. Відкидаємо в'язі та прикладаємо невідомі реакції:  $V_A$  вздовж вісі шарнірного закріплення,  $V_B, H_B$  – горизонтальна складова реакції  $R_B$  в шарнірно-нерухомій опорі. Отримуємо схему балки на рис. 3.11.

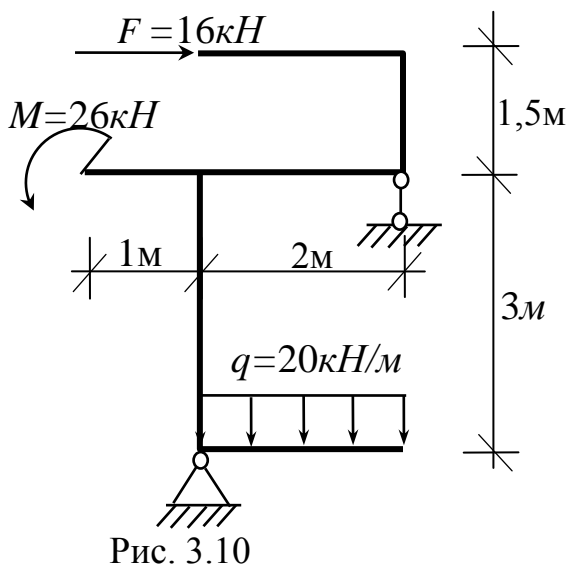


Рис. 3.10

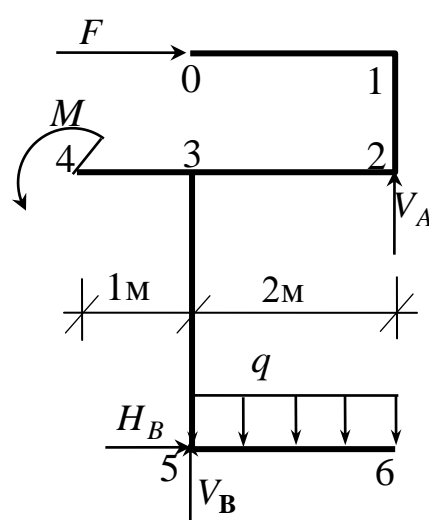


Рис. 3.11

Записуємо систему рівнянь рівноваги та знаходимо реакції в'язей:

$$\sum F_x = F + H_B = 0 \quad \rightarrow \quad H_B = -F = -16 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -q \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 4,5 + M + V_A \cdot 2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$V_A = (q \cdot 2 \cdot 1 + F \cdot 4,5 - M) / 2 = (20 \cdot 2 \cdot 1 + 16 \cdot 4,5 - 26) / 2 = 43 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = -F \cdot 1,5 + M + H_B \cdot 3 - V_B \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0 \quad \rightarrow$$

$$V_B = (-F \cdot 1,5 + M + H_B \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 1) / 2 = (-16 \cdot 1,5 + 26 - 16 \cdot 3 + 20 \cdot 2 \cdot 1) / 2 = -3 \text{ кН}.$$

Вводимо нумерацію характерних точок від 0 до 6. Для кожного з стержнів рами шукаємо внутрішні зусилля  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  як описано вище.

$$\text{Стержень 0-1: } N_{0-1} = -16 \text{ кН}, \quad Q_{0-1} = 0, \quad M_{0-1} = 0;$$

Стержень 1-2:  $N_{1-2} = 0$ ,  $Q_{1-2} = 16 \text{ кН}$ ,

$M_1 = 0$ ,  $M_2 = F \cdot 1,5 = 16 \cdot 1,5 = 24 \text{ кНм}$ ;

Стержень 2-3:  $N_{2-3} = 16 \text{ кН}$ ,  $Q_{2-3} = -V_A = -43 \text{ кН}$ ,

$M_2 = -F \cdot 1,5 = -16 \cdot 1,5 = -24 \text{ кНм}$ ,

$M_3 = -F \cdot 1,5 + V_A \cdot 2 = -16 \cdot 1,5 + 43 \cdot 2 = 62 \text{ кНм}$ ;

Стержень 4-3:  $N_{4-3} = 0$ ,  $Q_{4-3} = 0$ ,  $M_{4-3} = -M = -26 \text{ кНм}$ ;

Стержень 6-5:  $N_{6-5} = 0$ ,  $Q_6 = 0$   $Q_5 = q \cdot 2 = 40 \text{ кН}$ ,

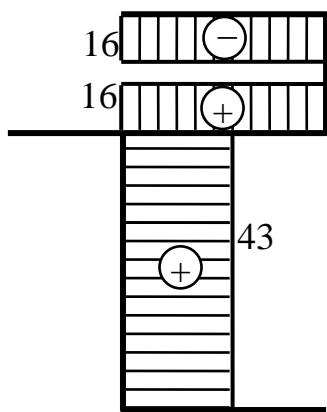
$M_6 = 0$ ,  $M_5 = q \cdot 2 \cdot 1 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ кНм}$ ;

Стержень 5-3:  $N_{5-3} = -V_B + q \cdot 2 = -(-3) + 20 \cdot 2 = 43 \text{ кН}$ ,

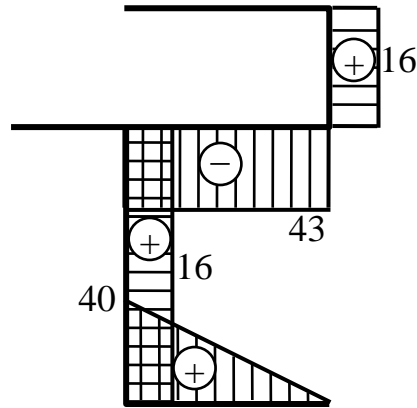
$Q_{5-3} = -H_B = 16 \text{ кН}$ ,  $M_5 = q \cdot 2 \cdot 1 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ кНм}$ ,

$M_3 = q \cdot 2 \cdot 1 - H_B \cdot 3 = 20 \cdot 2 \cdot 1 - (-16) \cdot 3 = 88 \text{ кНм}$ .

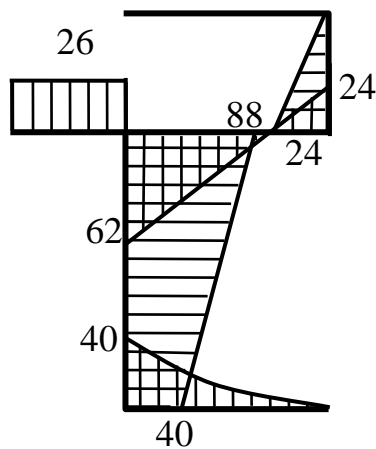
Будуємо епюри (рис. 3.12). Епюра  $M$  будується на розтягнутих волокнах.



Еп.  $N$ , кН



Еп.  $Q$ , кН



Еп.  $M$ , кНм

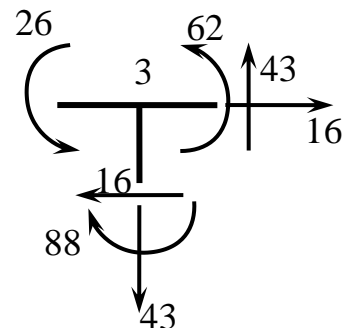


Рис. 3.12

По побудованих епюрах робимо перевірку рівноваги вузла 3.

### Задача 3.3. Побудова епюр внутрішніх зусиль в криволінійних стержнях.

Для заданого плоского криволінійного стержня під дією плоскої системи сил (дод. 17) побудувати епюри поздовжньої сили  $N$ , поперечної сили  $Q$  та згинального моменту  $M$ .

**П р и к л а д.** Для плоского криволінійного стержня (рис. 3.13) визначити внутрішні зусилля та побудувати їх епюри.

**Р о з в' я з а н н я.** Вводимо полярну систему координат з нульовою віссю  $OB$ . Робимо умовний переріз та прикладаємо невідомі внутрішні зусилля  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$ ,  $M(\varphi)$ . Розбиваємо стержень на ділянки та для кожної з них записуємо рівняння рівноваги:

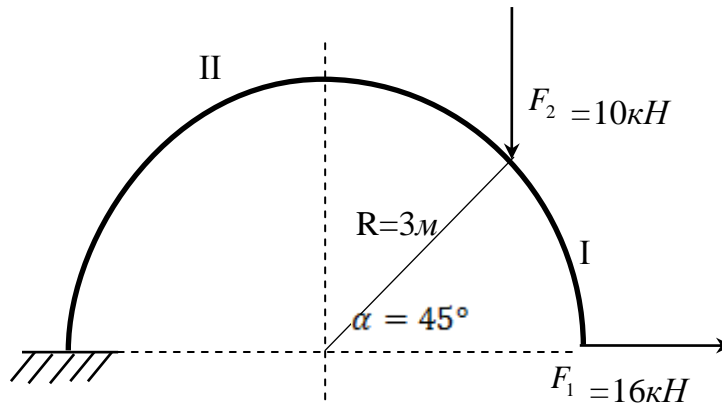


Рис. 3.13

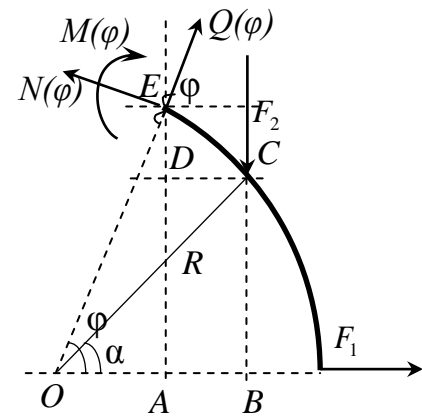


Рис. 3.14

$$\text{I) } 0 \leq \varphi < \alpha: \quad -N_I(\varphi) + F_1 \sin \varphi = 0, \quad Q_I(\varphi) + F_1 \cos \varphi = 0, \\ -M_I(\varphi) + F_1 \cdot EA = 0, \quad EA = OE \sin \varphi = R \sin \varphi;$$

$$\text{Маємо } N_I(\varphi) = F_1 \sin \varphi, \quad Q_I(\varphi) = -F_1 \cos \varphi, \quad M_I(\varphi) = F_1 R \sin \varphi.$$

$$\text{II) } \alpha < \varphi < \pi: \quad -N_{II}(\varphi) + F_1 \sin \varphi + F_2 \cos \varphi = 0, \quad Q_{II}(\varphi) + F_1 \cos \varphi - F_2 \sin \varphi = 0, \\ -M_{II}(\varphi) + F_1 \cdot EA - F_2 \cdot DC = 0, \quad DC = OB - OA = R \cos \alpha - R \cos \varphi;$$

$$\text{Маємо: } N_{II}(\varphi) = F_1 \sin \varphi + F_2 \cos \varphi, \quad Q_{II}(\varphi) = -F_1 \cos \varphi + F_2 \sin \varphi,$$

$$M_{II}(\varphi) = F_1 R \sin \varphi - F_2 R (\cos \alpha - \cos \varphi).$$

Обчислюємо значення внутрішніх зусиль з кроком  $\pi/6$ , включаючи кут  $\alpha$ , та заповнюємо таблицю:

$\varphi$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	$N(\varphi)$	$Q(\varphi)$	$M(\varphi)$
$0 \leq \varphi < \alpha$			$16 \sin \varphi$	$-16 \cos \varphi$	$48 \sin \varphi$
0	1	0	0	-16	0

30°	0,866	0,5	8	-13,9	24
45°	0,707	0,707	11,3	-11,3	33,9
$\alpha < \varphi < \pi$			$16\sin\varphi + 10\cos\varphi$	$-16\cos\varphi + 10\sin\varphi$	$48\sin\varphi - 30(\cos 45^\circ - \cos\varphi)$
45°	0,707	0,707	18,4	-4,2	33,9
60°	0,5	0,866	18,9	-0,7	35,4
90°	0	1	16	10	26,8
120°	-0,5	0,866	8,9	16,7	5,4
150°	-0,866	0,5	-0,7	18,9	-23,2
180°	-1	0	-10	16	-51,2

По знайдених значеннях будуємо епюри:

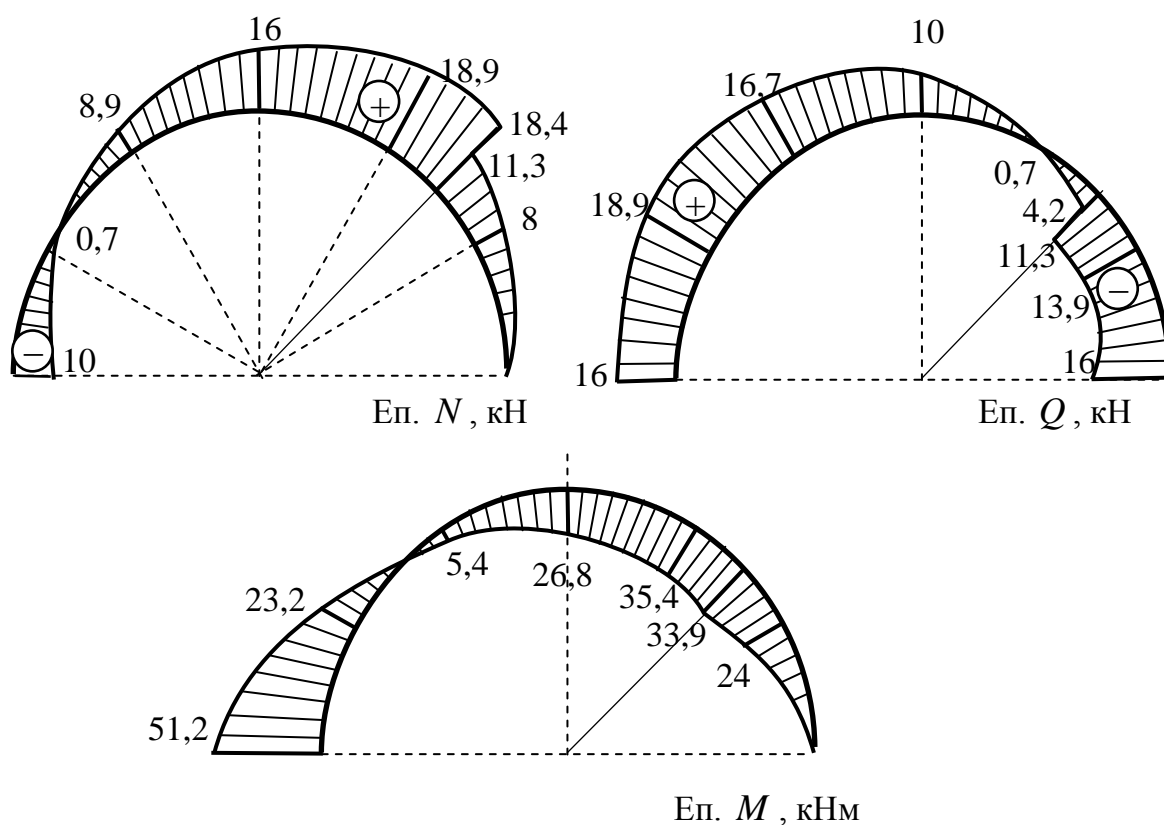


Рис. 3.15

### Задача 3.4. Побудова епюр внутрішніх зусиль в горизонтальній рамі під дією вертикального навантаження.

Для заданої плоскої рами під дією вертикального навантаження (дод. 15, 16) побудувати епюри поперечної сили  $Q$ , згинального моменту  $M$  та крутильного моменту  $M_{кр}$ .

П р и к л а д. Для плоскої шарнірно закріпленої рами під дією вер-

тикального навантаження (рис. 3.16) визначити внутрішні зусилля та побудувати їх епюри.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки навантаження прикладене перпендикулярно до площини рами, то горизонтальні реакції в шарнірних закріпленнях нульові. Для знаходження вертикальних реакцій  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  записуємо рівняння рівноваги в вигляді суми моментів всіх сил відносно осей, що співпадають з стержнями системи. Для цього вводимо нумерацію точок рами (рис. 3.17).

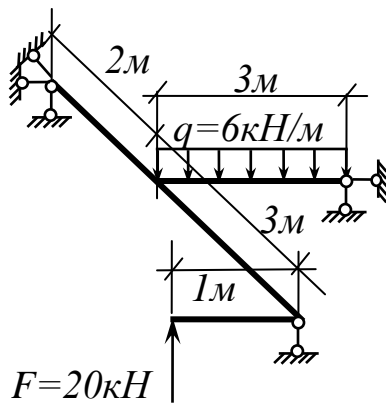


Рис. 3.16

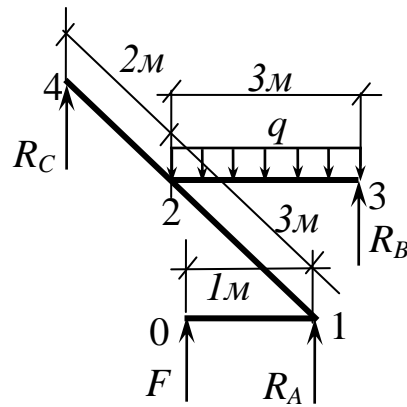


Рис. 3.17

Знаходження реакцій в'язей:

$$\sum M_{1-4} = 0: -F \cdot 1 - q \cdot 3 \cdot 1,5 + R_B \cdot 3 = 0 \rightarrow R_B = \frac{20 \cdot 1 + 6 \cdot 3 \cdot 1,5}{3} = 15,67 \text{ кН};$$

$$\sum M_{0-1} = 0: q \cdot 3 \cdot 3 - R_B \cdot 3 - R_C \cdot 5 = 0 \rightarrow R_C = \frac{6 \cdot 3 \cdot 3 - 15,67 \cdot 3}{5} = 1,4 \text{ кН};$$

$$\sum M_{2-3} = 0: F \cdot 3 + R_A \cdot 3 - R_C \cdot 2 = 0 \rightarrow R_A = \frac{-20 \cdot 3 + 1,4 \cdot 2}{3} = -19,07 \text{ кН}.$$

Перевіряємо рівновагу системи:

$$\sum F_z = 0: R_A + R_B + R_C + F - q \cdot 3 = -19,07 + 15,67 + 1,4 + 20 - 6 \cdot 3 = 0.$$

Для кожного з стержнів системи знаходимо внутрішні зусилля:

Стержень 0-1:  $Q_{0-1} = F = 20 \text{ кН}$ ,  $M_0 = 0$ ,  $M_1 = F \cdot 1 = 20 \text{ кНм}$ ,  $M_{кр0-1} = 0$ .

Стержень 1-2:  $Q_{1-2} = F + R_A = 20 - 19,07 = 0,93 \text{ кН}$ ,

$M_1 = 0$ ,  $M_2 = (F + R_A) \cdot 3 = 2,8 \text{ кНм}$ ,  $M_{кр1-2} = -F \cdot 1 = -20 \text{ кНм}$ .

Стержень 3-2:  $Q_3 = -R_B = -15,67 \text{ кН}$ ,  $Q_2 = q \cdot 3 - R_B = 6 \cdot 3 - 15,67 = 2,33 \text{ кН}$ ,

$a_{ext} = 15,67 / 6 = 2,6 \text{ м}$ ,

$M_3 = 0$ ,  $M_2 = R_B \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = 15,67 \cdot 3 - 6 \cdot 3 \cdot 1,5 = 20 \text{ кНм}$ ,



$$M_{ext} = 15,67 \cdot 2,6 - 6 \cdot 2,6^2 / 2 = 20,46 \text{ кНм}, \quad M_{кр\ 3-2} = 0.$$

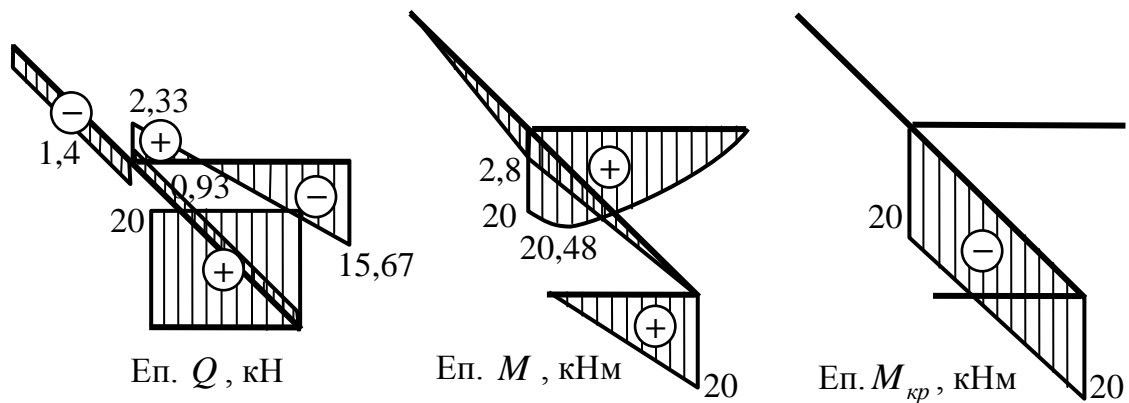


Рис. 3.18

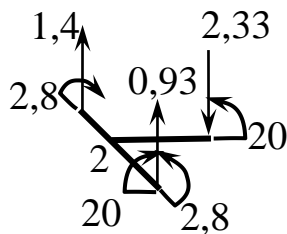


Рис. 3.19

Стержень 4-2:  $Q_{4-2} = R_C = 1,4 \text{ кН}$ ,

$$M_4 = 0, \quad M_2 = R_C \cdot 2 = 1,4 \cdot 2 = 2,8 \text{ кНм},$$

$$M_{кр\ 4-2} = 0.$$

Отримані значення наносимо на епюри (рис. 3.18). По епюрах перевіряємо рівновагу вузла 2 (рис. 3.19).

#### 4. Пряме плоске згинання балки

**Теоретичні відомості.** Побудова епюр поперечної сили  $Q$  та згинального моменту  $M$  для статично визначеної балки проводиться за методикою, описаною в п.3.

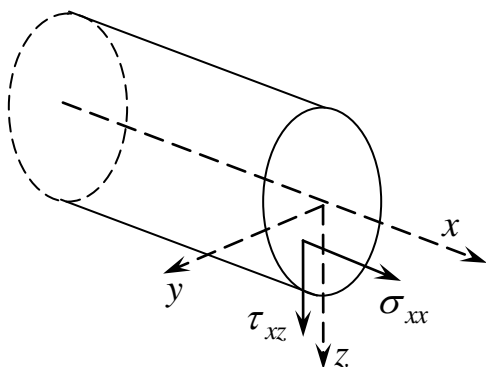


Рис. 4.1

При плоскому згинанні в точках поперечних перерізів балок виникають нормальні напруження  $\sigma_{xx}(x, z)$  та дотичні напруження  $\tau_{xz}(x, z)$  (Рис. 4.1).

Нормальні напруження  $\sigma$  за законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4.1)$$

виражаються через поздовжню деформацію

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}. \quad (4.2)$$

Для знаходження нормальних напружень через внутрішні зусилля користуємося формулою

$$\sigma = \frac{Mz}{I}. \quad (4.3)$$

Тут  $I = \iint z^2 dA$  – осьовий момент інерції перерізу відносно вісі  $y$  (п.1).

Для визначення дотичних напружень в точках перерізу користуємося формулою Журавського

$$\tau = \frac{QS_y(z)}{Ib(z)}, \quad (4.4)$$

де  $S_y(z)$  – статичний момент “відрізаної” частини перерізу,  $b(z)$  – ширина перерізу на відстані  $z$  від вісі  $y$  (Рис. 4.2).

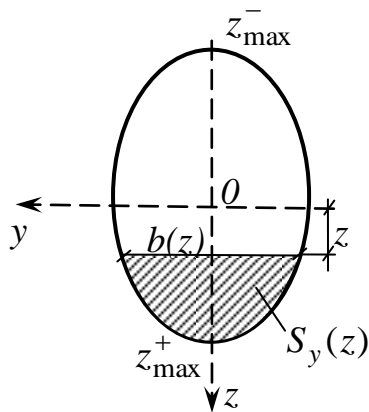


Рис. 4.2

В загальному випадку перевірка міцності балки в різних точках перерізу

проводиться по різному:

– В крайніх точках перерізу ( $z = z_{\max}^{\pm}$ , рис. 4.2) нормальні напруження набувають максимальних значень  $\sigma = \sigma_{\max}^{\pm}$ , дотичні напруження  $\tau = 0$ . Для оцінки міцності користуємося умовою міцності по нормальних напруженнях

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}. \quad (4.5)$$

Максимальні напруження визначаються за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y}, \quad (4.6)$$

де  $M_{\max}$  – максимальний згинальний момент (береться по модулю з епюри),  $W_y = I_y / z_{\max}$  – момент опору перерізу (для прокатних балок дано в таблицях сортаменту, для інших перерізів рахуємо за формулами п.1).

– На нейтральній лінії  $z = 0$  нормальні напруження  $\sigma = 0$ , дотичні напруження набувають максимальних значень  $\tau = \tau_{\max}$ . Оцінка міцності проводиться по дотичних напруженнях

$$\tau_{\max} \leq \tau_{adm} \quad (4.7)$$

Допустиме дотичне напруження пов'язане з допустимим норма-

льним напруженням приблизною рівністю  $\tau_{adm} \approx \sigma_{adm} / \sqrt{3}$ . Максимальні дотичні напруження

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_{max}}{Ib(0)}. \quad (4.8)$$

– В інших точках перерізу  $\sigma \neq 0$ ,  $\tau \neq 0$  перевірка міцності проводиться по приведених напруженнях

$$\sigma_{red} \leq \sigma_{adm}. \quad (4.9)$$

Приведене напруження по різних теоріях міцності має різне значення. Для третьої теорії міцності

$$\sigma_{red} = \sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (4.10)$$

для четвертої (енергетичної) теорії

$$\sigma_{red} = \sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (4.11)$$

При практичних розрахунках підбір перерізу проводиться за умовою міцності по нормальних напруженнях (4.5), (4.6), а умови (4.7), (4.9) перевіряються.

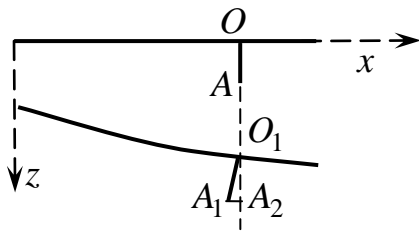


Рис. 4.3

Розглянемо деформований стан балки. Нехай відрізок  $OA$  поперечного перерізу при деформуванні прийняв положення  $O_1A_1$  (рис. 4.3). На рисунку  $OO_1 = w$  – прогин балки,  $\angle A_1O_1A_2 = \frac{dw}{dx} = \varphi$  – кут повороту перерізу балки.

Згинальний момент  $M$  та прогин  $w$  пов'язані диференціальним співвідношенням

$$M = -EI \frac{d^2w}{dz^2}, \quad (4.12)$$

яке називається *рівнянням зігнутої осі балки*.

Для знаходження переміщень через відомі внутрішні зусилля будемо застосовувати *метод початкових параметрів* (МПП).

Прогин балки  $w(x)$  та кути повороту поперечних перерізів  $\varphi(x) = \frac{dw}{dx}$  при постійній жорсткості балки  $EI$  визначаються за формулами

$$EI\varphi(x) = EI\varphi_0 - M_0x - Q_0\frac{x^2}{2} + \sum M(x - x_m) + \sum P\frac{(x - x_p)^2}{2} + \sum q\left[\frac{(x - x_{qn})^3}{6} - \frac{(x - x_{qk})^3}{6}\right]; \quad (4.13)$$

$$EIw(x) = EIw_0 + EI\varphi_0x - M_0\frac{x^2}{2} - Q_0\frac{x^3}{6} + \sum M\frac{(x - x_m)^2}{2} + \sum P\frac{(x - x_p)^3}{6} + \sum q\left[\frac{(x - x_{qn})^4}{24} - \frac{(x - x_{qk})^4}{24}\right]. \quad (4.14)$$

Рівняння методу початкових параметрів (4.13), (4.14) впливають з рівнянь (3.1) та (4.12) шляхом послідовного інтегрування з врахуванням початкових умов. Додатні напрями  $M, P, q$  показані на рис. 4.4. Початок відліку координат  $x$  знаходиться на лівому кінці балки.

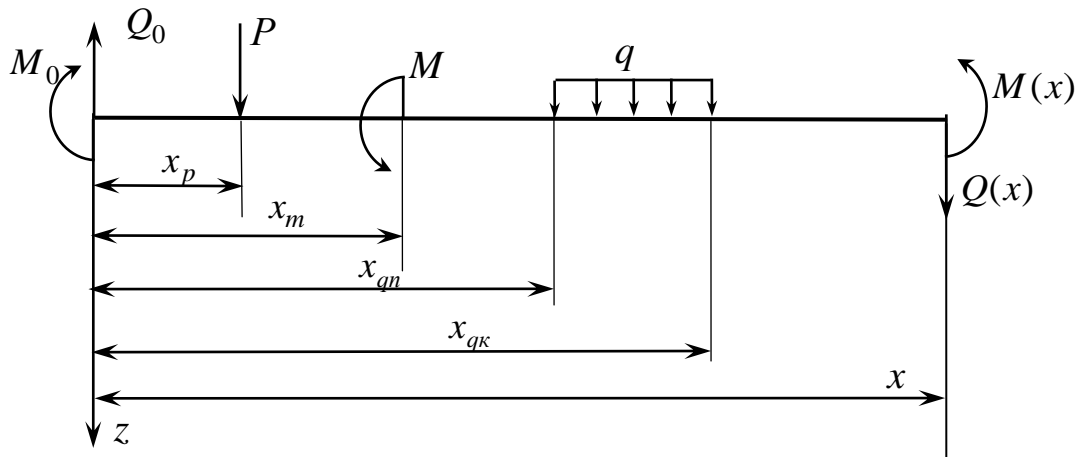


Рис. 4.4

Правило знаків для рівнянь (4.13), (4.14) можна також сформулювати в наступному вигляді: якщо силовий фактор утворює додатний момент (стискує верхні волокна), то цей фактор входить в рівняння МПП з знаком “—”, і навпаки.

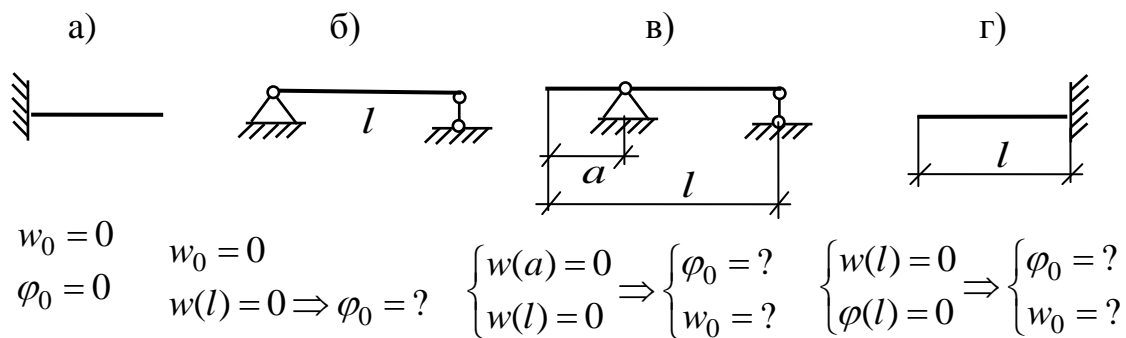


Рис. 4.5

Величини  $w_0, \varphi_0, Q_0, M_0$ , які є значеннями відповідних функцій при  $x=0$ , називаються *початковими параметрами*. Значення  $Q_0$  та  $M_0$  беруться з епюр  $Q(x)$  та  $M(x)$ , значення  $w_0$  та  $\varphi_0$  визначаються з умов закріплення балки. Можливі випадки показані на рис. 4.5. Невідомі початкові параметри для закріплень б), в), г) визначаються з відповідних граничних умов за допомогою рівнянь (4.13), (4.14), записаних в точках закріплення.

При застосуванні рівнянь (4.13), (4.14) враховуються лише ті силові фактори, що лежать зліва від точки  $x$  (якщо  $x$  менше за координату прикладання силового фактору, то цей доданок не враховується).

#### Задача 4.1. Розрахунок статично визначеної балки.

Для заданої в дод.18 балки побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати круглий, прямокутний ( $h = 2b$ ) і двотавровий поперечні перерізи. Провести повну перевірку міцності для підібраної двотаврової балки. Методом початкових параметрів визначити прогини і кути повороту перерізів і побудувати їх епюри по довжині балки. Перевірити жорсткість балки.

**П р и к л а д.** Для заданої на рис.4.6 балки побудувати епюри внутрішніх зусиль, підібрати круглий, прямокутний ( $h = 2b$ ) і двотавровий поперечні перерізи. Провести повну перевірку міцності для підібраної двотаврової балки. Методом початкових параметрів визначити прогини і кути повороту перерізів і побудувати їх епюри по довжині балки. Дано:  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ ,

$$\tau_{adm} = 100 \text{ МПа}, E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

**Р о з в ' я з о к.**

1. Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0; \quad q \cdot 2 \cdot 1 - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 4 - M + V_B \cdot 7 = 0,$$

$$V_B = \frac{-6 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 4 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + 25}{7} = 17,3 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad -M + F \cdot 3 + q \cdot 6 \cdot 6 - V_A \cdot 7 = 0,$$

$$V_A = \frac{-25 + 15 \cdot 3 + 6 \cdot 6 \cdot 6}{7} = 33,7 \text{ кН}.$$

$$\text{Перевірка: } \sum F_z = q \cdot 6 + F - V_A - V_B = 6 \cdot 6 + 15 - 17,3 - 33,7 = 0.$$

Малюємо під балкою її схему. Будуємо епюри  $Q$  та  $M$ . Для цього розбиваємо балку на три ділянки, визначаємо  $Q(x)$  та  $M(x)$  в характерних точках і будуємо епюри зліва направо.

$$Q(0) = 0 \text{ кН};$$

$$Q^l(2) = -q \cdot 2 = -6 \cdot 2 = -12 \text{ кН}; \quad Q^{np}(2) = Q^l(2) + V_A = -12 + 33,7 = 21,7 \text{ кН};$$

$$Q^l(6) = -q \cdot 6 + V_A = -6 \cdot 6 + 33,7 = -2,3 \text{ кН}; \quad Q^{np}(6) = Q^l(6) - F = -2,3 - 15 = -17,3 \text{ кН};$$

$$Q(8) = -17,3 \text{ кН}.$$

$$M(0) = 0; \quad M(1) = -q \cdot 1 \cdot 0,5 = -6 \cdot 0,5 = -3 \text{ кНм};$$

$$M(2) = -q \cdot 2 \cdot 1 = -6 \cdot 2 = -12 \text{ кНм};$$

$$M(6) = -q \cdot 6 \cdot 3 + V_A \cdot 4 = -6 \cdot 18 + 33,7 \cdot 4 = 26,8 \text{ кНм};$$

$$M(8) = -q \cdot 6 \cdot 6 + V_A \cdot 7 - F \cdot 3 = -6 \cdot 36 + 33,7 \cdot 7 - 15 \cdot 3 = -25,1 \approx -25 \text{ кНм}.$$

В перерізі, де  $Q = 0$ , згинальний момент приймає екстремальне значення  $M_{ext}$ . Для визначення координати точки екстремуму розглянемо прямокутний трикутник з катетами  $Q^{np}(2) = 21,7 \text{ кН}$  та  $a_{ext}$ . Тангенс кута нахилу гіпотенузи дорівнює розподіленому навантаженню  $q$ . Маємо

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q^{np}(2)}{a_{ext}} = q, \quad a_{ext} = \frac{Q^{np}(2)}{q} = \frac{21,7}{6} = 3,6 \text{ м}, \quad x_{ext} = 2 + 3,6 = 5,6 \text{ м}.$$

$$\text{Отже, } M_{ext} = M(5,6) = -6 \cdot \frac{5,6^2}{2} + 33,7 \cdot 3,6 = -94,1 + 121,3 = 27,2 \text{ кНм}.$$

Максимальні значення перерізуючої сили і згинального моменту знаходимо з епюр:

$$Q_{\max} = 21,7 \text{ кН при } x = 2 \text{ м}, \quad M_{\max} = 27,2 \text{ кНм при } x_{ext} = 5,6 \text{ м}.$$

Підбираємо переріз з умови міцності по нормальних напруженнях:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}, \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}. \quad \text{Знаходимо необхідний момент опору:}$$

$$W_{нб} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{27,2 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 170 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 170 \text{ см}^3.$$

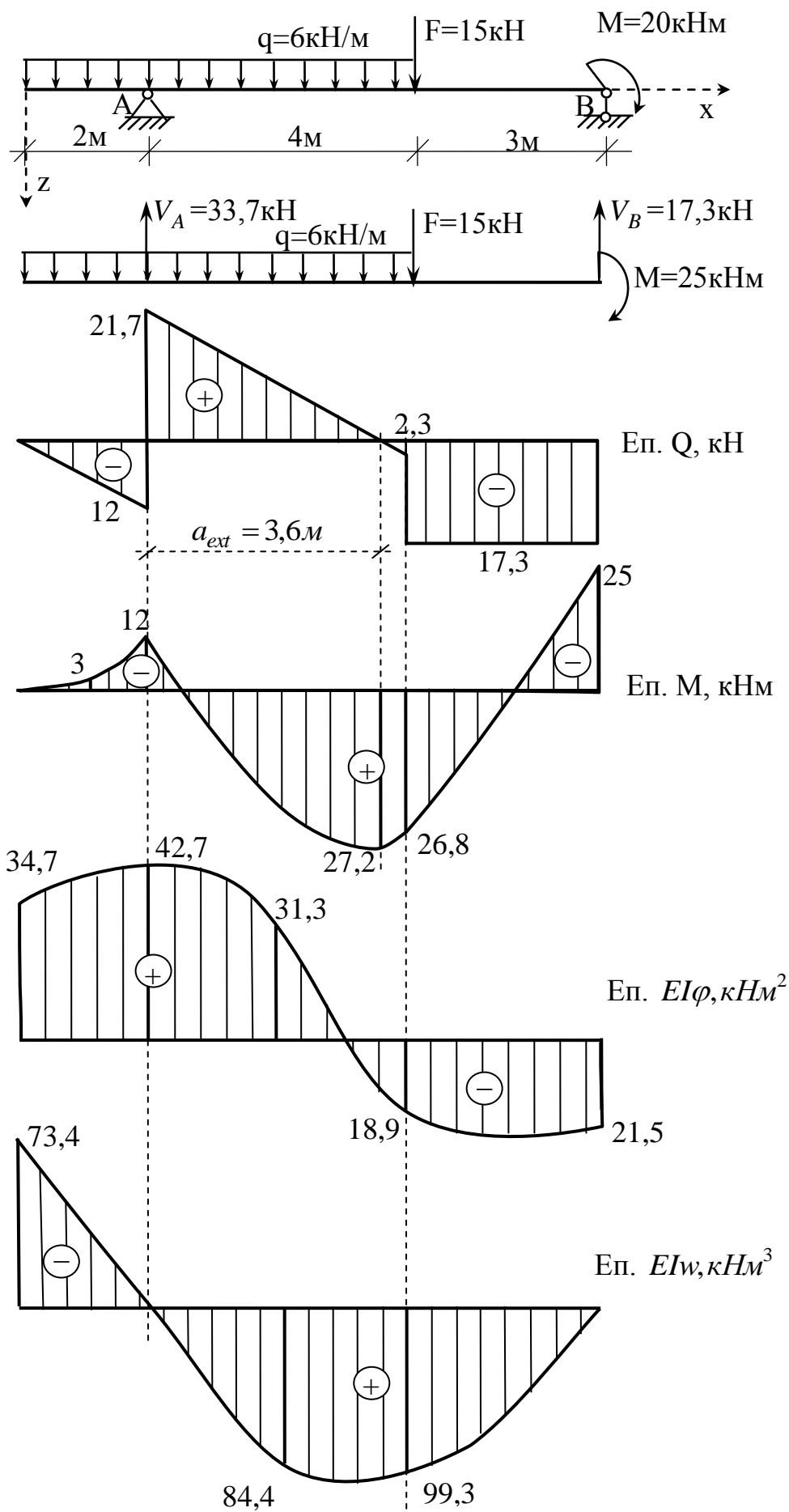


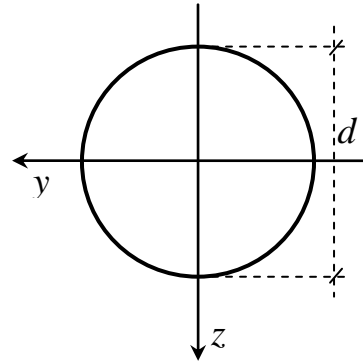
Рис. 4.6

а) підбір круглого перерізу

$$W_y = \frac{\pi d^3}{32} = W_{нб};$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W_{нб}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 170}{3,14}} = 12 \text{ см};$$

$$A_{кр} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 12^2}{4} = 113 \text{ см}^2.$$

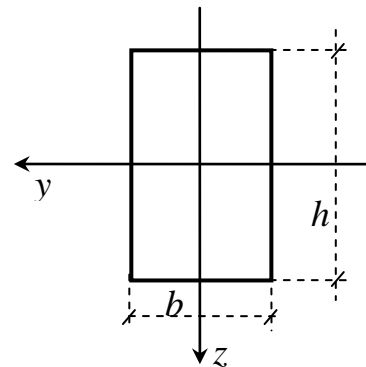


б) підбір прямокутного перерізу  $h = 2b$

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{2b^3}{3} = W_{нб};$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3W_{нб}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 170}{2}} = 6,3 \text{ см};$$

$$A_{пр} = bh = 2b^2 = 2 \cdot 6,3^2 = 79,4 \text{ см}^2.$$

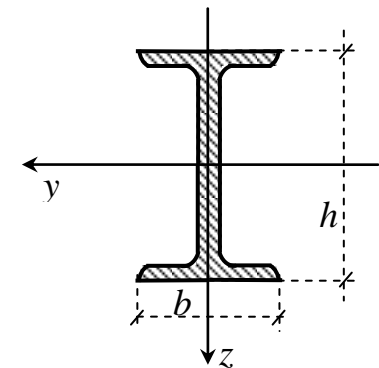


в) Підбір двотаврового перерізу. З таблиць сортаменту беремо двотавр № 20, для якого

$$W_y = 184 \text{ см}^3, \quad I_y = 1840 \text{ см}^4, \quad A = 26,8 \text{ см}^2,$$

$$h = 20 \text{ см}, \quad b = 10 \text{ см}, \quad d = 0,52 \text{ см},$$

$$t = 0,84 \text{ см}, \quad S_y = S_{\max} = 104 \text{ см}^3.$$



Порівняємо площі підібраних перерізів:

$$A_{кр} : A_{пр} : A_{дв} = 113 : 79,4 : 26,8 = 4,2 : 3 : 1.$$

Отже, двотавр є найбільш раціональним з запропонованих перерізів.

2. Виконуємо перевірку міцності підібраної двотаврової балки:

а) максимальне нормальне напруження визначаємо в перерізі  $x = 5,6 \text{ м}$ , оскільки в цій точці балки  $M(5,6) = M_{\max} = 27,2 \text{ кНм}$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{27,2 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 148 \cdot 10^6 \text{ Па} = 148 \text{ МПа} \leq \sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}.$$

Умова міцності виконується. Недонапруження складає

$$\Delta = \frac{160 - 148}{160} \cdot 100\% = 7,5\%, \text{ що допустимо.}$$

б) максимальне дотичне напруження визначаємо в перерізі  $x = 2 \text{ м}$ , оскільки



ки в цій точці балки  $Q(2) = Q_{\max} = 21,7 \text{ кНм}$ :

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{d \cdot I_y} = \frac{21,7 \cdot 10^3 \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = \frac{21,7 \cdot 104}{0,52 \cdot 1840} \cdot 10^{3-6+2+8} =$$
$$= 23,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 23,6 \text{ МПа} \leq \tau_{adm} = 100 \text{ МПа}.$$

Умова міцності виконується. Недонапруження складає

$$\Delta = \frac{100 - 23,6}{100} \cdot 100\% = 76,4\%.$$

в) Перевірка міцності в точках, де  $\sigma \neq 0$  і  $\tau \neq 0$ , виконується з використанням умови міцності для приведенного напруження  $\sigma_{red} \leq \sigma_{adm}$ .

В перерізі  $x = 6 \text{ м}$  момент  $M = 26,8 \text{ кНм}$ , перерізує сила  $Q = 17,3 \text{ кН}$ . В точці 2 (для стійки)

$$\sigma = \frac{M \cdot (h/2 - t)}{I_y} = \frac{26,8 \cdot 10^3 \cdot (10 - 0,84) \cdot 10^{-2}}{1840 \cdot 10^{-8}} = 133,4 \text{ МПа},$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S_n}{d \cdot I_y} = \frac{17,3 \cdot 10^3 \cdot 80,5 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 14,5 \text{ МПа},$$

оскільки статичний момент полиці двотавру відносно нейтральної осі

$$S_n = bt \frac{h - t}{2} = 10 \cdot 0,84 \frac{20 - 0,84}{2} = 80,5 \text{ см}^3.$$

Для пластичних матеріалів по четвертій теорії міцності

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{133,4^2 + 3 \cdot 14,5^2} \approx 136 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}.$$

3. Будуємо епюри  $\sigma$  та  $\tau$  (рис.3).

Епюра нормальних напружень  $\sigma = \frac{Mz}{I}$  (пряма лінія) будується по висоті

перерізу  $x = 5,6 \text{ м}$ , в якому виникають максимальні згинальні моменти. На проєкціях точок  $z = \pm h/2$  на вісь епюри відкладаємо значення  $\sigma_{\max} = 148 \text{ МПа}$  («плюс» на розтягнутих волокнах).

Для побудови епюри дотичних напружень  $\tau = \frac{QS(z)}{Ib(z)}$  (для стійки двотавра

має форму параболи) в перерізі  $x = 2 \text{ м}$ , в якому виникають максимальні поперечні сили, знаходимо значення  $\tau$  в характерних точках перерізу за формулою Журавського

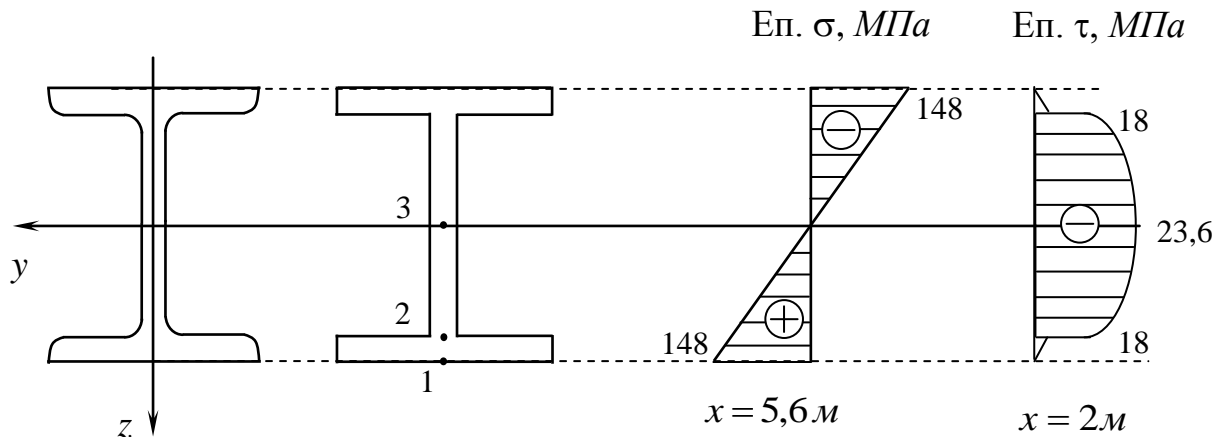
В точці 1  $S_1 = 0 \Rightarrow \tau_1 = 0$ .

В точці 2 (для стійки)

$$\tau_2 = \frac{Q_{\max} S_n}{d \cdot I_y} = \frac{21,7 \cdot 10^3 \cdot 80,5 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = \frac{21,7 \cdot 80,5}{0,52 \cdot 1840} \cdot 10^{3-6+2+8} = 18,2 \text{ МПа}.$$

В точці 3  $\tau_3 = \tau_{\max} = 23,6 \text{ МПа}.$

Знаки на епюрах  $\sigma$  і  $\tau$  визначаються по епюрах  $M(x)$  та  $Q(x)$  і формулах для напружень.



4. Обчислюємо переміщення балки методом початкових параметрів. Запишемо формули МПП для прогину і кута повороту перерізу балки:

$$EIw(x) = EIw_0 + EI\varphi_0 x - V_A \frac{(x-2)^3}{6} + F \frac{(x-6)^3}{6} + q \frac{x^4 - (x-6)^4}{24};$$

$$EI\varphi(x) = EI\varphi_0 - V_A \frac{x^2}{2} + F \frac{(x-6)^2}{2} + q \frac{x^3 - (x-6)^3}{6}.$$

При обчисленні  $w(x)$ ,  $\varphi(x)$  в точці  $x_k$  в цих формулах враховуємо тільки силові фактори, що лежать лівіше від  $x_k$ . Момент  $M$  та реакція  $V_B$  не входять в рівняння МПП, оскільки вони прикладені в крайній правій точці балки.

Для визначення початкових параметрів  $w_0, \varphi_0$  записуємо рівняння прогинів в точках закріплення балки (при  $x = 2 \text{ м}$  прогин  $w(2) = 0$ , при  $x = 9 \text{ м}$  прогин  $w(9) = 0$ ).

Отримуємо систему рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} EIw(2) = EIw_0 + 2EI\varphi_0 + 6 \frac{2^4}{24} = 0; \\ EIw(9) = EIw_0 + 9EI\varphi_0 - 33,7 \frac{(9-2)^3}{6} + 15 \frac{(9-6)^3}{6} + 6 \frac{9^4 - (9-6)^4}{24} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} EIw_0 + 2EI\varphi_0 + 4 = 0; \\ EIw_0 + 9EI\varphi_0 - 1926,5 + 67,5 + 1620 = EIw_0 + 9EI\varphi_0 - 239 = 0. \end{cases}$$

Віднімаючи перше рівняння від другого, знаходимо

$$7EI\varphi_0 - 239 - 4 = 0;$$

$$EI\varphi_0 = 243/7 = 34,7 \text{ кНм}^2;$$

$$EIw_0 = -2EI\varphi_0 - 4 = -2 \cdot 34,7 - 4 = -73,4 \text{ кНм}^3.$$

Таким чином, прогин і кут повороту вираховуємо за формулами

$$EIw(x) = -73,4 + 34,7 \cdot x - 33,7 \frac{(x-2)^3}{6} + 15 \frac{(x-6)^3}{6} + 6 \frac{x^4 - (x-6)^4}{24};$$

$$EI\varphi(x) = 34,7 - 33,7 \frac{(x-2)^2}{2} + 15 \frac{(x-6)^2}{2} + 6 \frac{x^3 - (x-6)^3}{6}.$$

Вибираємо на осі балки декілька точок і обчислюємо  $\varphi(x)$ ,  $w(x)$  в кожній точці.

$$EI\varphi(0) = 34,7 \text{ кНм}^2;$$

$$EI\varphi(2) = 34,7 + 2^3 = 42,7 \text{ кНм}^2;$$

$$EI\varphi(4) = 34,7 - 33,7 \cdot 2 + 4^3 = 31,3 \text{ кНм}^2;$$

$$EI\varphi(6) = 34,7 - 33,7 \frac{4^2}{2} + 6^3 = -18,9 \text{ кНм}^2;$$

$$EI\varphi(9) = 34,7 - 33,7 \frac{7^2}{2} + 15 \frac{3^2}{2} + 6 \frac{9^3 - 3^3}{6} = 34,7 - 825,7 + 67,5 + 702 = -21,5 \text{ кНм}^2.$$

$$EIw(0) = -73,4 \text{ кНм}^3;$$

$$EIw(2) = -73,4 + 34,7 \cdot 2 + 6 \frac{2^4}{24} = 0;$$

$$EIw(4) = -73,4 + 34,7 \cdot 4 - 33,7 \frac{2^3}{6} + 6 \frac{4^4}{24} = -73,4 + 138,8 - 45 + 64 = 84,4 \text{ кНм}^3;$$

$$EIw(6) = -73,4 + 34,7 \cdot 6 - 33,7 \frac{4^3}{6} + 6 \frac{6^4}{24} = -73,4 + 208,2 - 359,5 + 324 = 99,3 \text{ кНм}^3;$$

$$EIw(9) = -73,4 + 34,7 \cdot 9 - 33,7 \frac{7^3}{6} + 15 \frac{3^3}{6} + 6 \frac{9^4 - 3^4}{24} = -73,4 + 312,3 - 1926,5 + 67,5 + 1620 = -0,1 \approx 0.$$

По отриманих результатах будуюмо епюри  $EJw(x)$ ,  $EJ\varphi(x)$ . Бачимо, що максимальний прогин виникає в точці  $x \approx 3,5 \text{ м}$ , де  $EJ\varphi(x) \approx 0$ :

$$EIw(5) = -73,4 + 34,7 \cdot 5 - 33,7 \frac{3^3}{6} + 6 \frac{5^4}{24} = -73,4 + 173,5 - 151,7 + 156,2 = 104,6 \text{ кНм}^3;$$

Обчислюємо максимальні значення кута повороту та прогину, поділивши знайдені значення на жорсткість балки (модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ):

$$EI = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1840 \cdot 10^{-8} = 3680 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2;$$

$$\varphi_{\max} = \varphi(2) = \frac{42,7 \cdot 10^3}{3680 \cdot 10^3} = 0,0116 \text{ рад} = 0,0116 \frac{180^\circ}{3,14} = 0,67^\circ;$$

$$w_{\max} = w(5) = \frac{104,6 \cdot 10^3}{3680 \cdot 10^3} = 28,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,84 \text{ см}.$$

Для консольного кінця

$$w_{\max} = w(0) = \frac{-73,4 \cdot 10^3}{3680 \cdot 10^3} = -19,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -2 \text{ см}$$

Умова жорсткості в прольоті

$$\frac{u_{\max}}{l_n} = \frac{2,84 \cdot 10^{-2}}{7} = 4,06 \cdot 10^{-3} > \frac{1}{250} = 4 \cdot 10^{-3}.$$

Для консольного кінця

$$\frac{w_{\max}}{2l_k} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 2} = 5 \cdot 10^{-3} > \frac{1}{250} = 4 \cdot 10^{-3}.$$

Оскільки умови жорсткості не виконуються, збільшуємо переріз балки. Беремо двотавр № 22, для якого  $I_y = 2550 \text{ см}^4$

$$EI = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2550 \cdot 10^{-8} = 5100 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2;$$

Для консольного кінця

$$w_{\max} = w(0) = \frac{-73,4 \cdot 10^3}{5100 \cdot 10^3} = -14,3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -1,43 \text{ см}$$

$$\frac{w_{\max}}{2l_k} = \frac{1,43 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 2} = 3,6 \cdot 10^{-3} \leq \frac{1}{250} = 4 \cdot 10^{-3}.$$

Таким чином, потрібно вибрати двотавр № 22.

## Список рекомендованої літератури

1. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. – М., 1976. – 607 с.
2. Беляев Н. М. Сборник задач по сопротивлению материалов. – М., 1968. – 445 с.
3. Сборник задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для вузов / Под ред. А.С.Вольмира. – М. : Наука, 1984. – 407с.
4. Писаренко, Г. С. Опір матеріалів: Підручник для студ. вищ. навч. закл. / За ред. Г.С.Писаренка. – 2-е вид., доп. і перероб. – Київ : Вища шк., 2004. – 655с.
5. Шкельов Л.Т., Станкевич А.М., Пошивач Д.В. Опір матеріалів: Підручник для студентів вищих навчальних закладів. К.:ЗАТ «Віпол», 2011. – 456с.
6. Сопротивление материалов деформированию и разрушению: Справочное пособие. Ч.2 / АН Украины, Ин-т проблем прочности. – К. : Наук. думка, 1994. – 539.4с.
7. Методические указания к выполнению расчетно-графических упражнений по курсу «Сопротивление материалов с основами теории и пластичности» / Сост. В. С. Еременко, Ю. А. Морсков. – К.: КИСИ, 1988. – 111с.
8. *Опір матеріалів з основами теорії пружності та пластичності: Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних завдань* / Укл. Єременко В. С., Морсков Ю. А., Корбаков О. Ф., Станкевич А. М. – К.: КІБІ, 1993. – 104 с.
9. *Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: Навч. посібник у 2 ч., 5 кн.* / За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища школа. – Ч. 1., кн. 1. Загальні основи курсу. – 1994. – 204 с.; ч. 1., кн. 2. Опір бруса. – 1994. – 335 с. ; ч.1. кн. 3. Опір дво- і тривимірних тіл. – 1995. – 271 с.; ч. 2. кн. 4. Приклади і задачі. – 1995. – 303 с.; ч.2. кн. 5. Розрахунково-проектувальні та лабораторні роботи. – 1995. – 207 с.
10. *Шульга М. О. Опір матеріалів при статичних навантаженнях: Курс лекцій* / М. О. Шульга. – КНУБА, 2002. –140 с.

**Додаток 1****МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

Київський національний університет будівництва і архітектури

Кафедра опору матеріалів

20\_\_ - 20\_\_ навчальний рік

**РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА №**(назва роботи)  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Шифр \_\_\_\_\_

Факультет \_\_\_\_\_

Курс \_\_\_\_\_

Група \_\_\_\_\_

Студент (П.І.Б.) \_\_\_\_\_

Керівник (П.І.Б.) \_\_\_\_\_

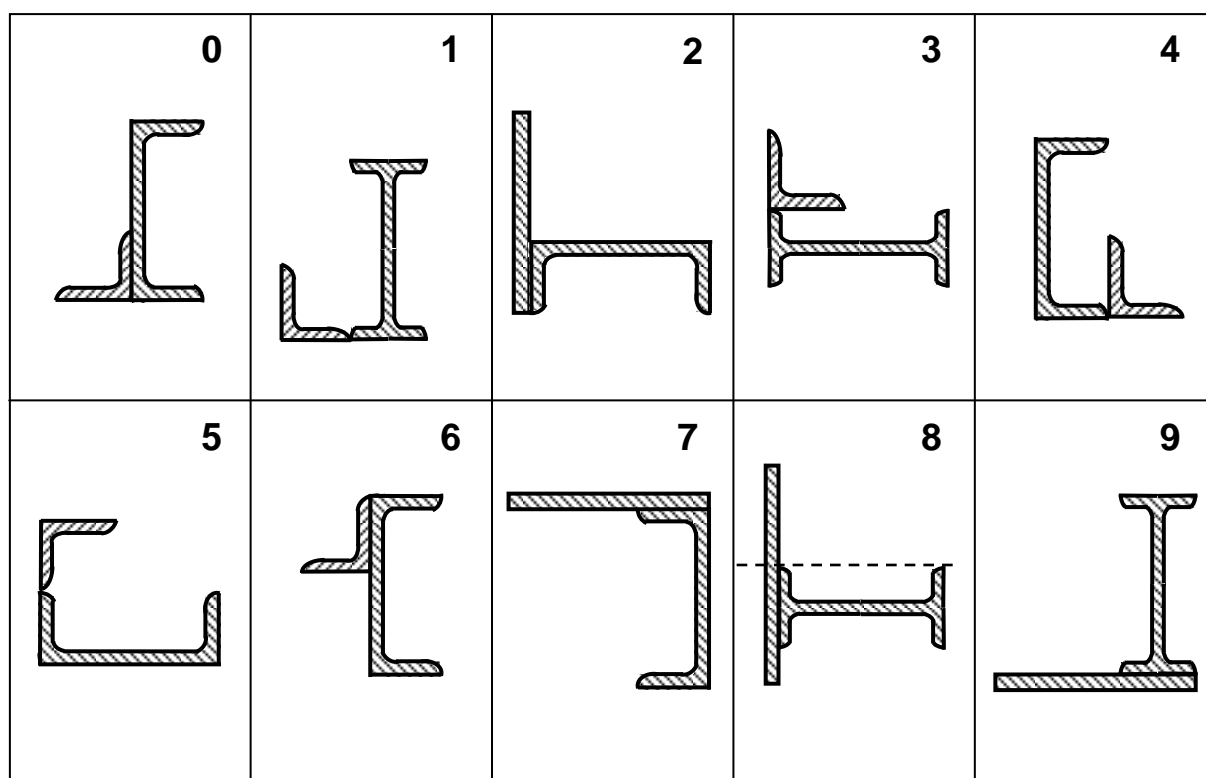
Дата здачі завдання \_\_\_\_\_

Оцінка \_\_\_\_\_

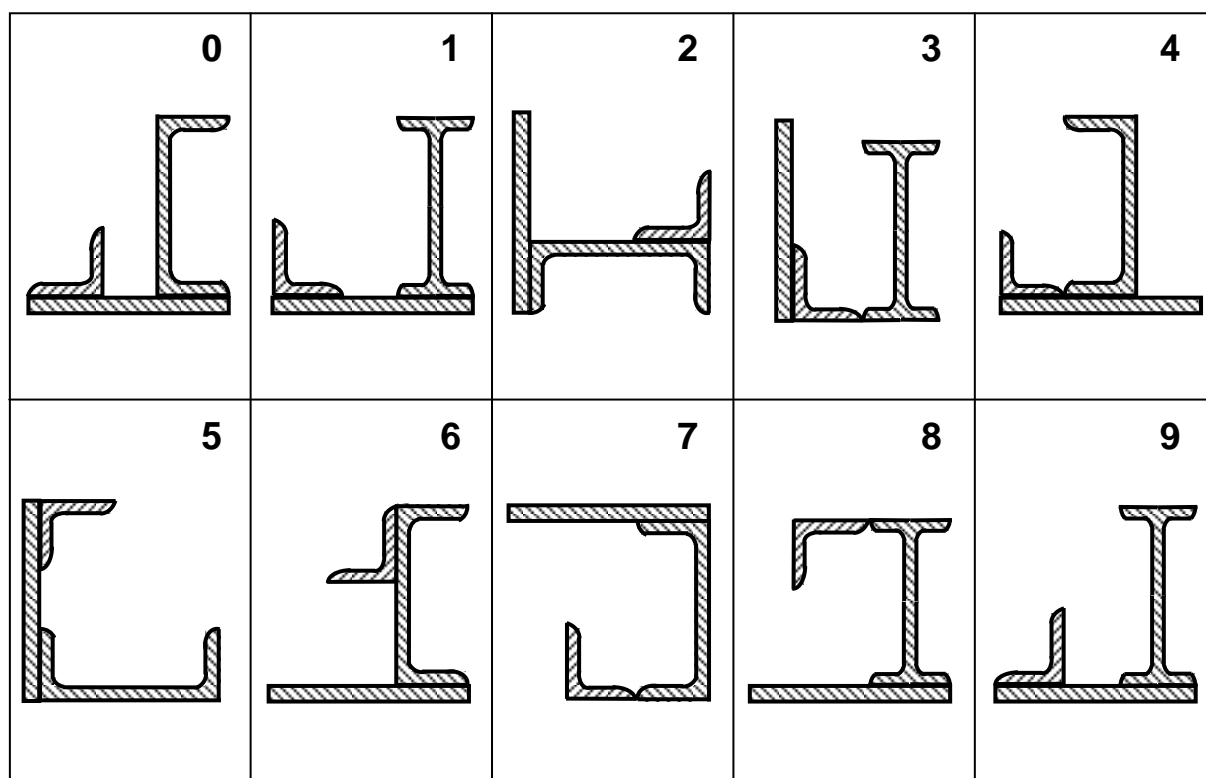
Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру для додатків 2,3				
	третя	перша		друга	
	№ схеми	№ двотавра*	№ швелера*	розміри листа, мм	розміри кутка*, мм
0	0	16	20а	220х10	160х16
1	1	18	20	220х12	160х10
2	2	18а	18а	240х14	150х12
3	3	20	18	240х16	150х10
4	4	20а	16а	280х16	140х10
5	5	22	16	280х20	125х14
6	6	22а	24а	300х16	125х10
7	7	24	24	300х20	120х10
8	8	24а	22а	340х18	120х8
9	9	27	22	340х22	110х8

\*Сортамент прокатної сталі береться по ГОСТ 8509–72

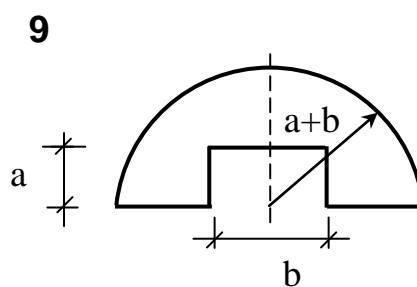
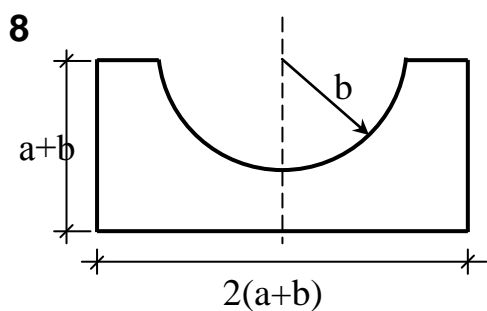
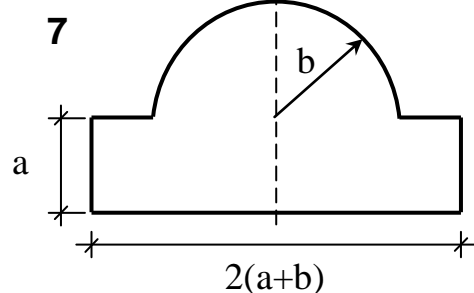
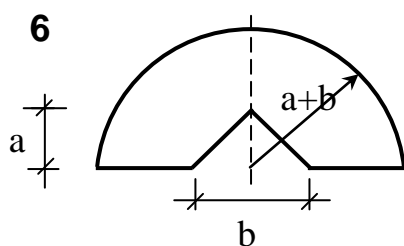
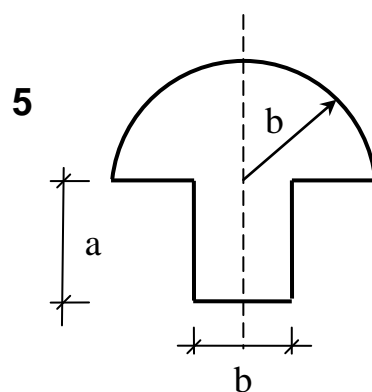
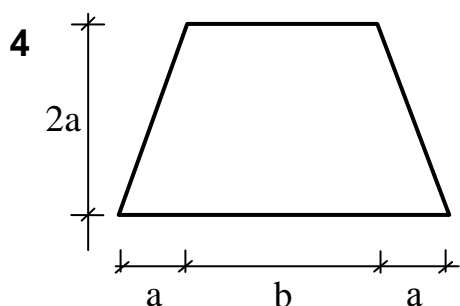
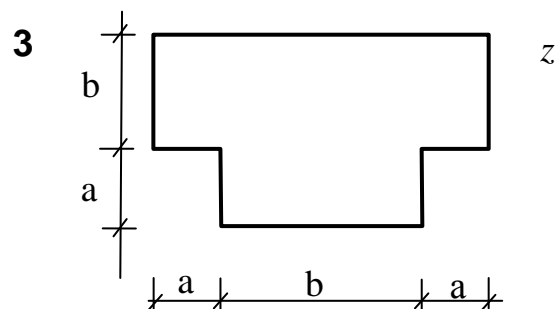
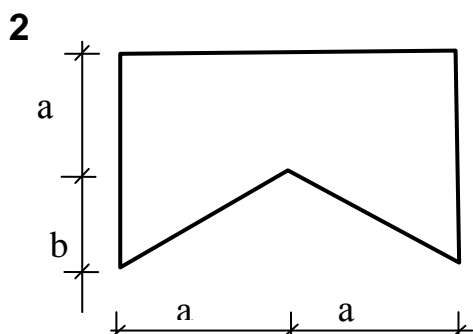
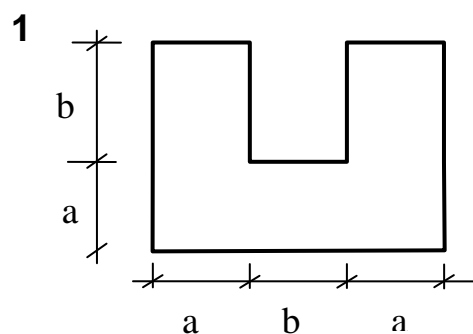
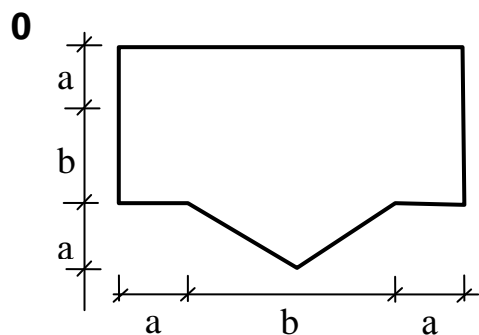
## Додаток 2



## Додаток 3



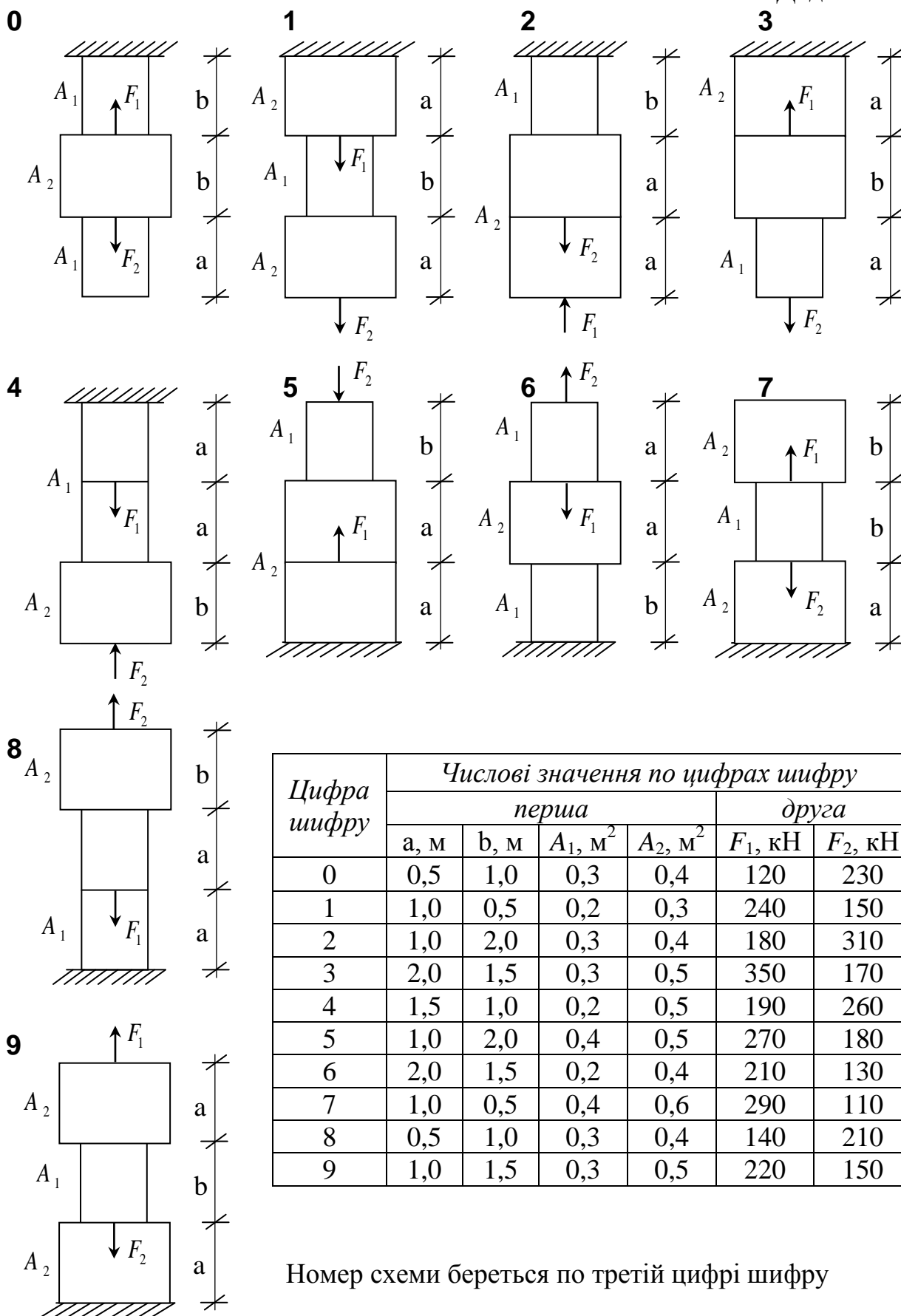
## Додаток 4



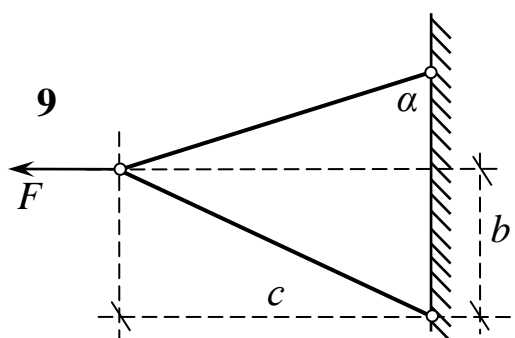
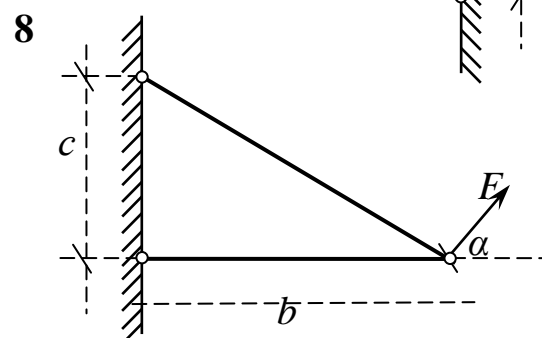
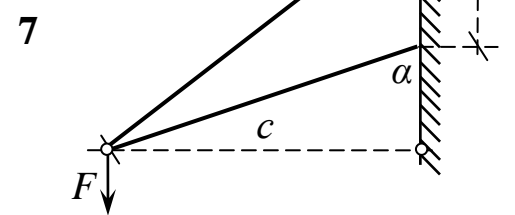
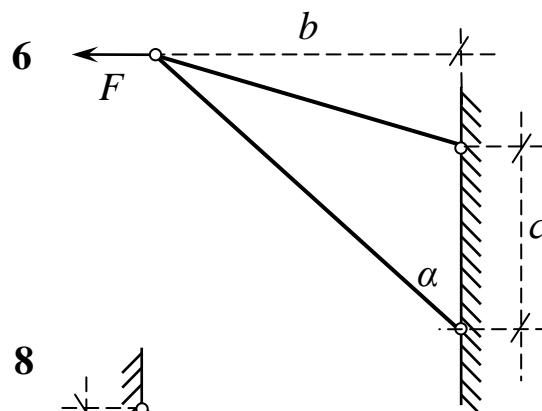
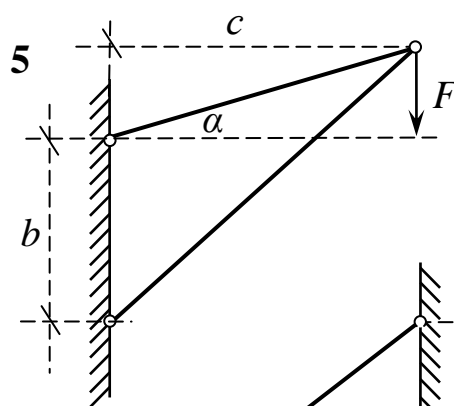
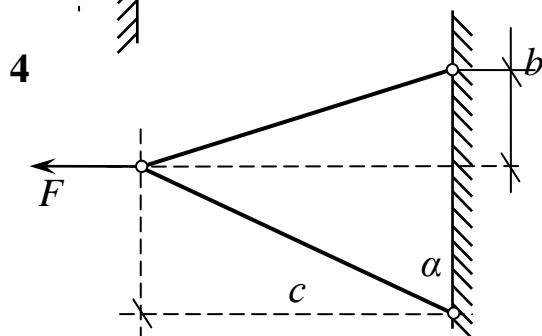
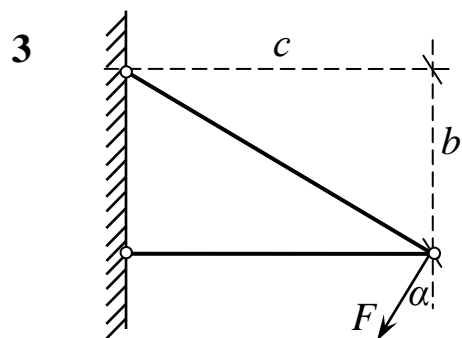
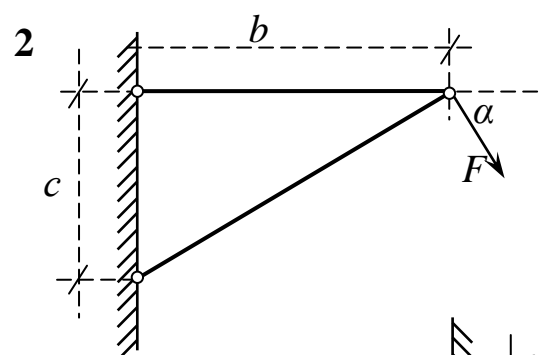
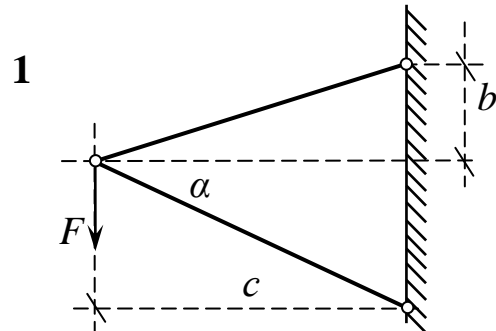
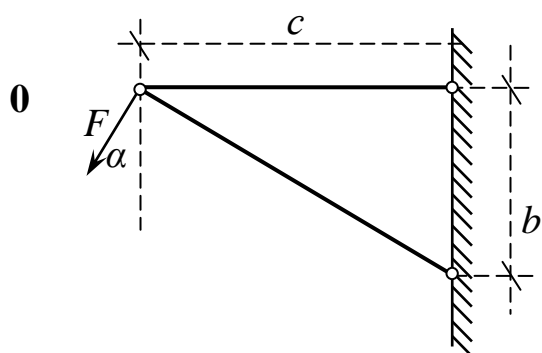
\* розміри  $a$ ,  $b$  задаються в сантиметрах згідно до свого шифру:  $a$  дорівнює сумі двох перших цифр шифру,  $b$  дорівнює сумі другої і третьої цифр шифру, номер схеми береться по третій цифрі шифру.



# Додаток 5



# Додаток 6

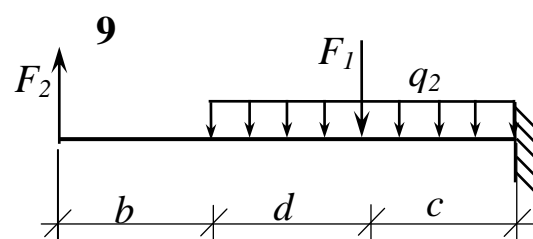
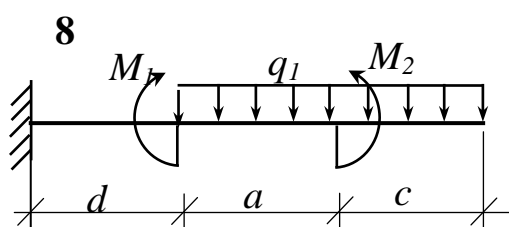
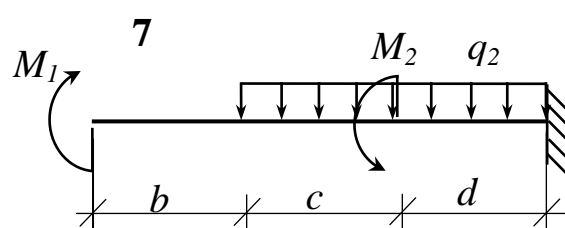
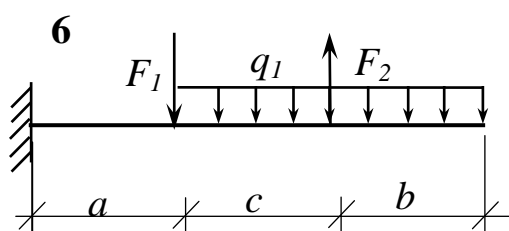
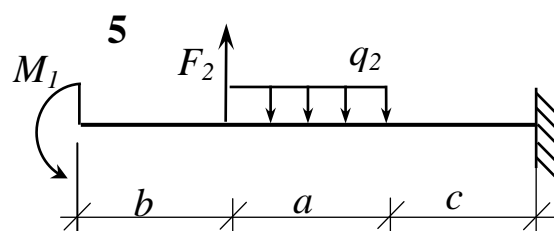
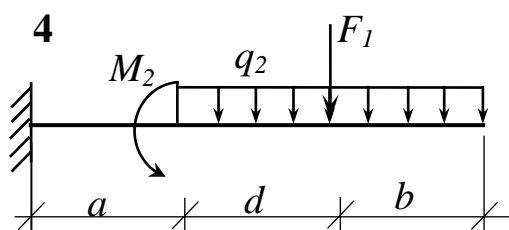
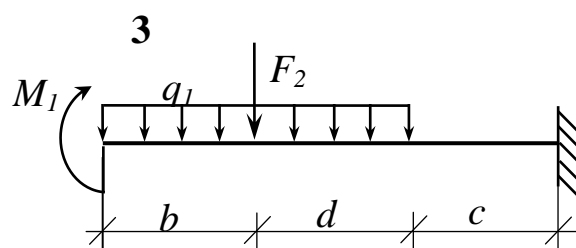
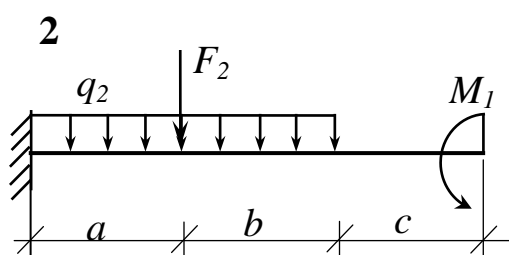
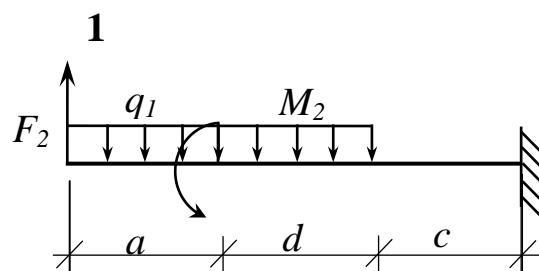
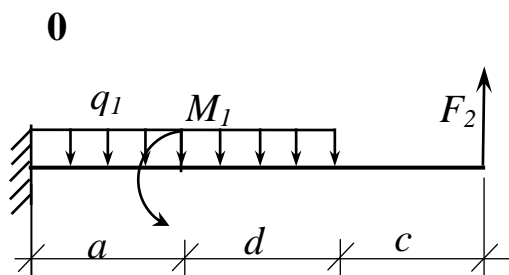


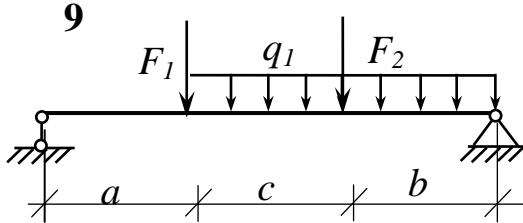
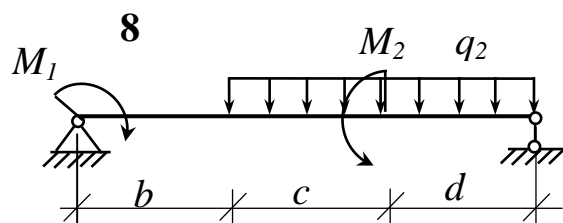
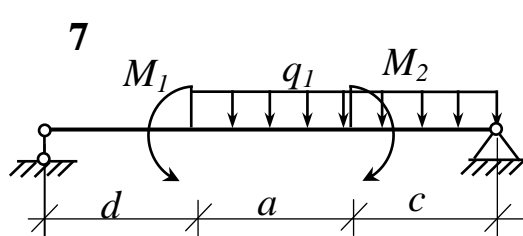
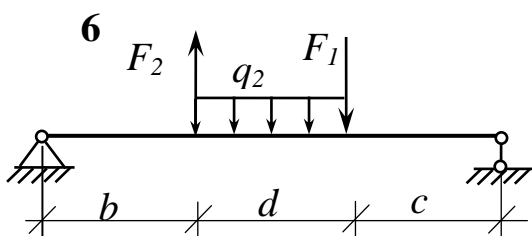
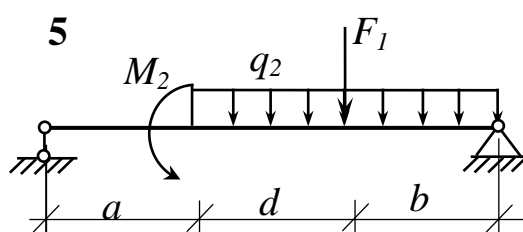
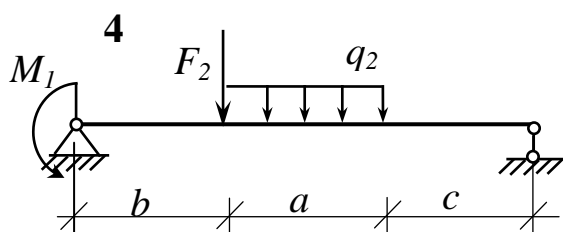
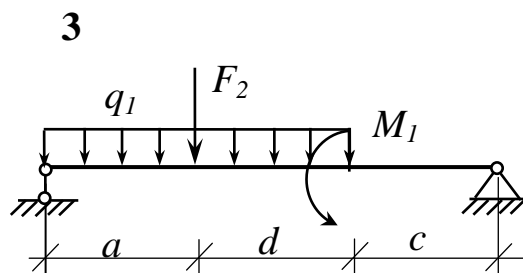
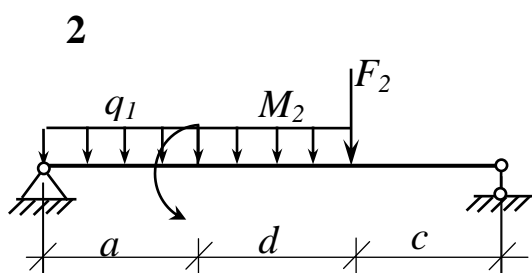
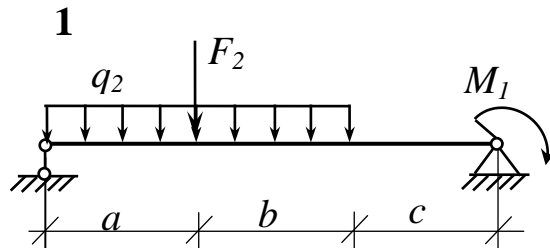
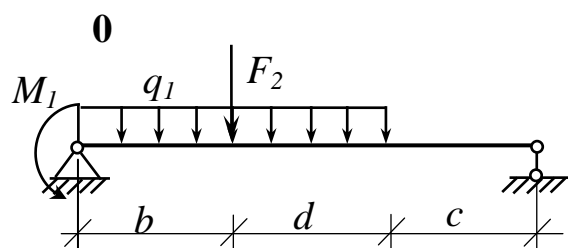
### Загальні дані для додатку 6

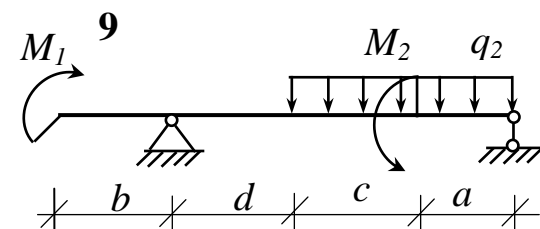
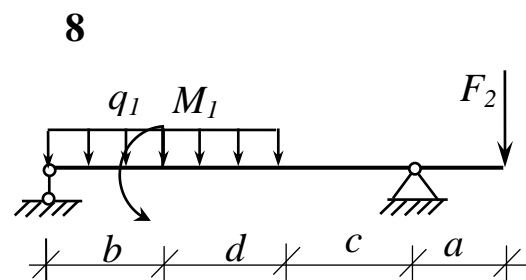
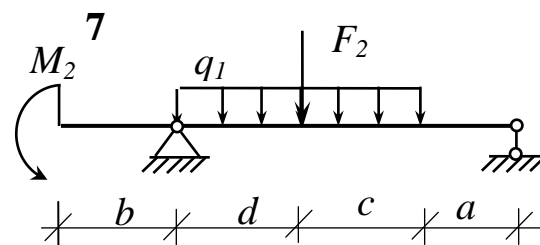
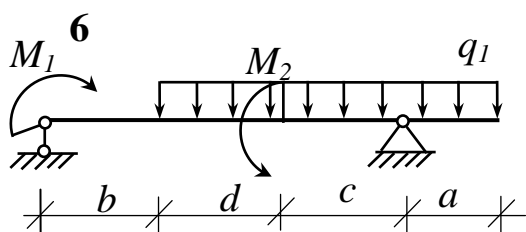
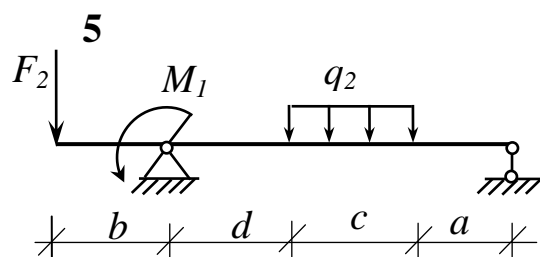
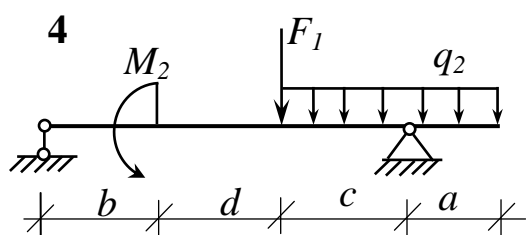
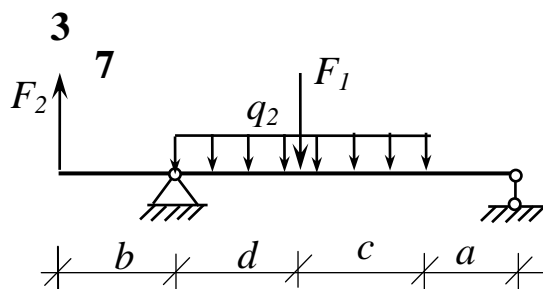
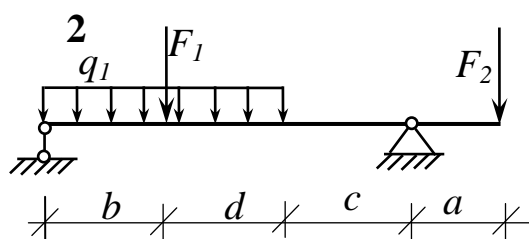
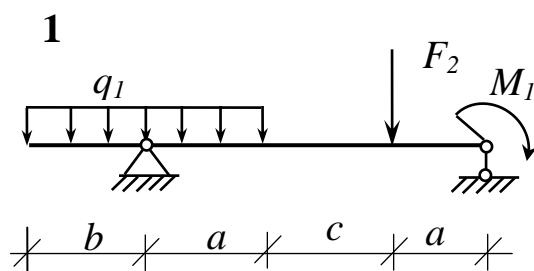
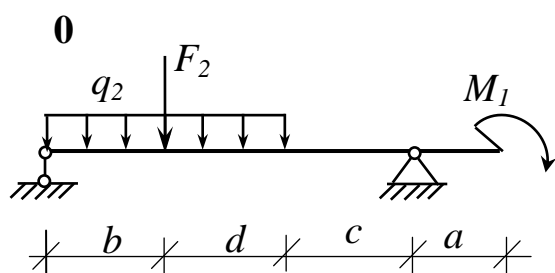
Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру				
	перша		друга		третя
	$c, \text{ м}$	$F, \text{ кН}$	$b, \text{ м}$	$\alpha, ^\circ$	№ схеми
0	3	10	4	30	0
1	2	12	5	45	1
2	4	14	2	60	2
3	5	15	3	30	3
4	3	16	4	45	4
5	2	18	5	60	5
6	4	20	2	30	6
7	5	11	3	45	7
8	3	13	4	60	8
9	4	17	5	30	9

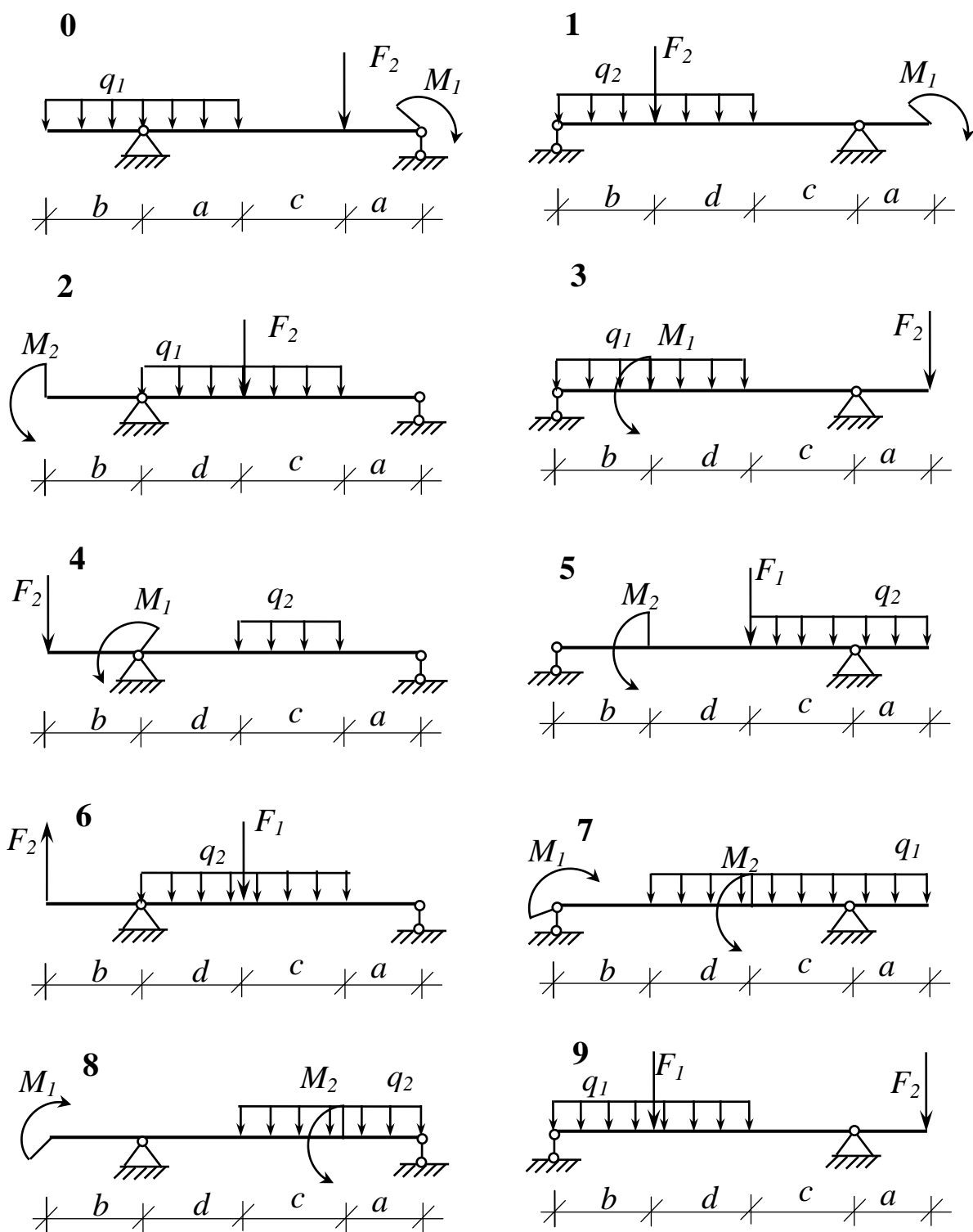
### Загальні дані для додатків 7-17

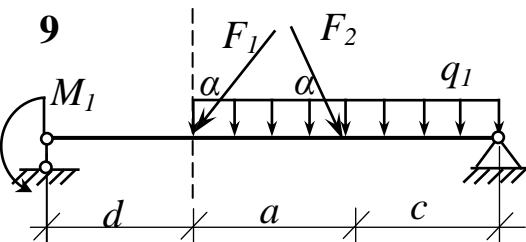
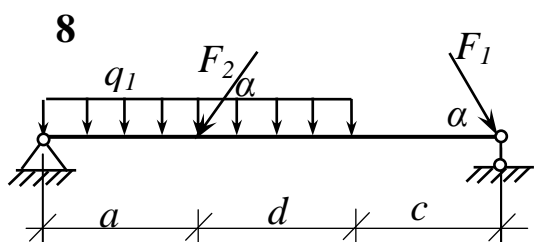
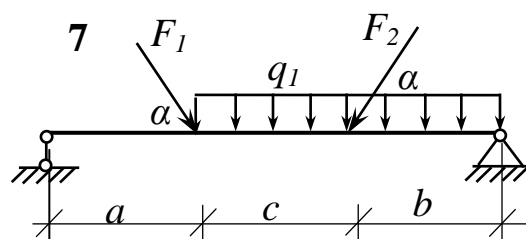
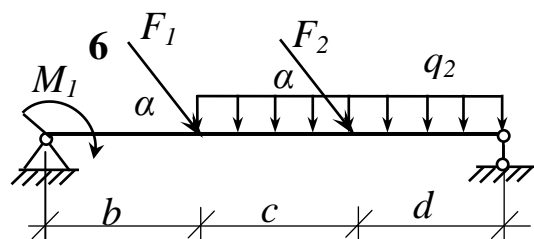
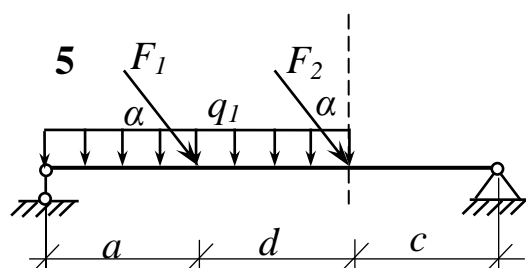
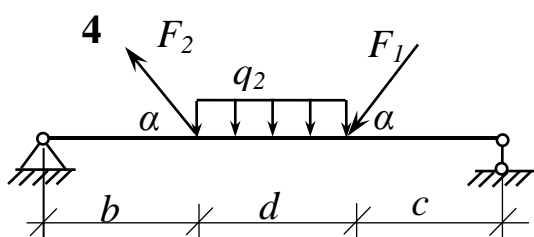
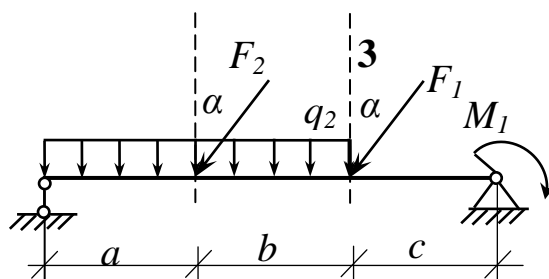
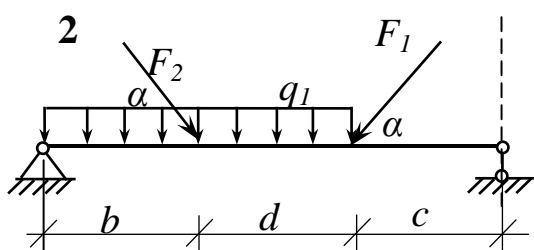
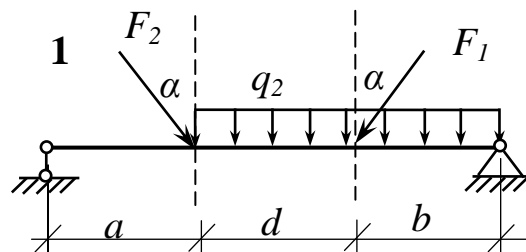
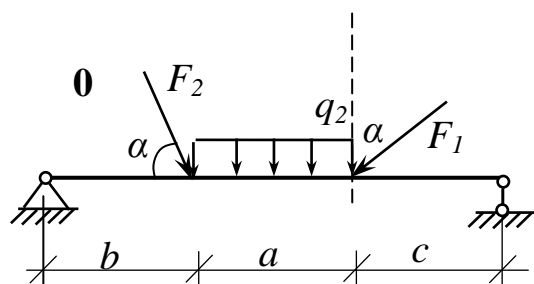
Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру										
	перша					друга					третя
	$a, \text{ м}$	$d, \text{ м}$	$F_1, \text{ кН}$	$M_1, \text{ кНм}$	$q_1, \text{ кН/м}$	$b, \text{ м}$	$c, \text{ м}$	$F_2, \text{ кН}$	$M_2, \text{ кНм}$	$q_2, \text{ кН/м}$	№ схеми, кут $\alpha$
0	4	2	10	15	3	3	2	5	22	4	0, 30°
1	2	3	12	16	4	4	3	6	21	5	1, 45°
2	4	1	14	17	5	1	4	7	20	6	2, 60°
3	3	1	16	18	6	2	1	8	19	7	3, 45°
4	1	4	18	19	7	3	2	9	18	8	4, 30°
5	3	3	20	20	8	4	3	10	17	4	5, 45°
6	4	1	22	21	9	1	4	11	16	4	6, 60°
7	2	4	24	22	10	2	1	12	15	5	7, 30°
8	2	3	15	23	11	3	2	13	14	6	8, 60°
9	1	4	17	24	12	4	3	14	13	7	9, 30°



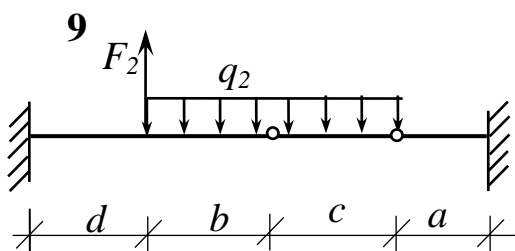
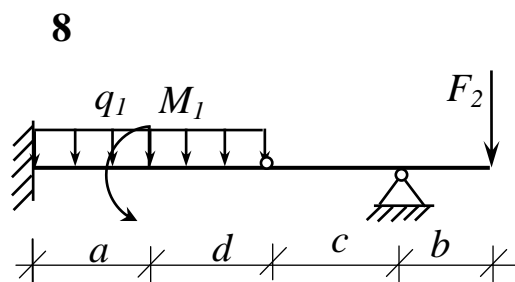
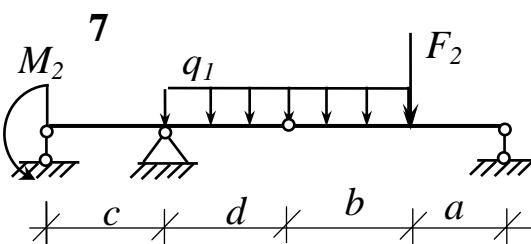
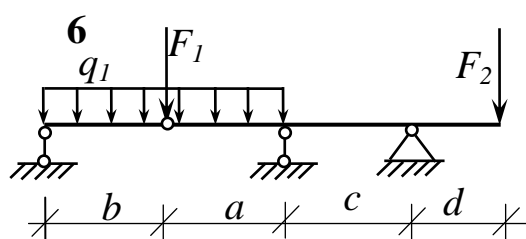
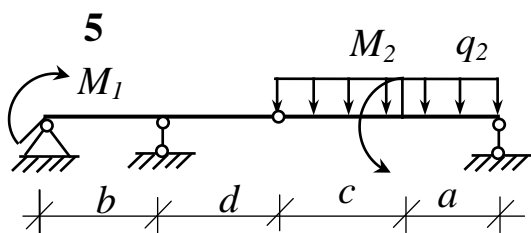
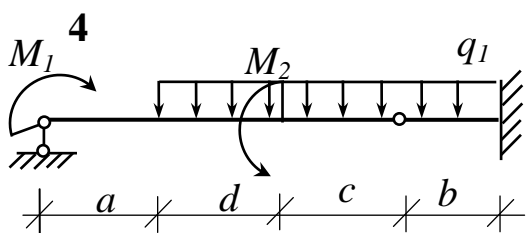
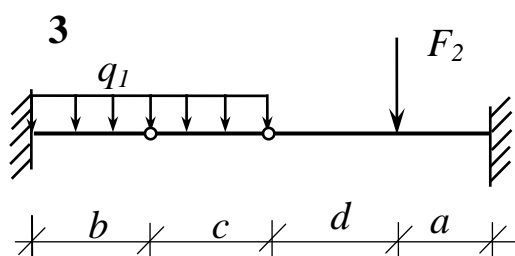
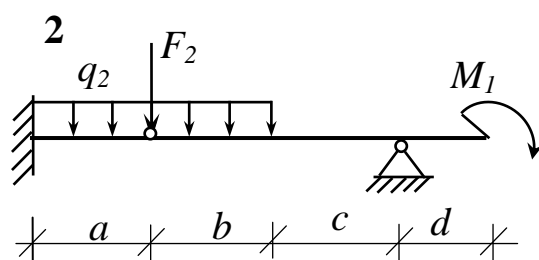
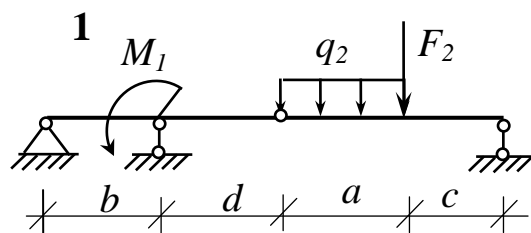
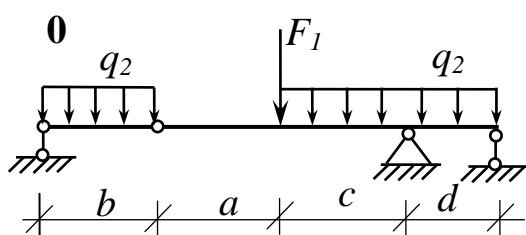


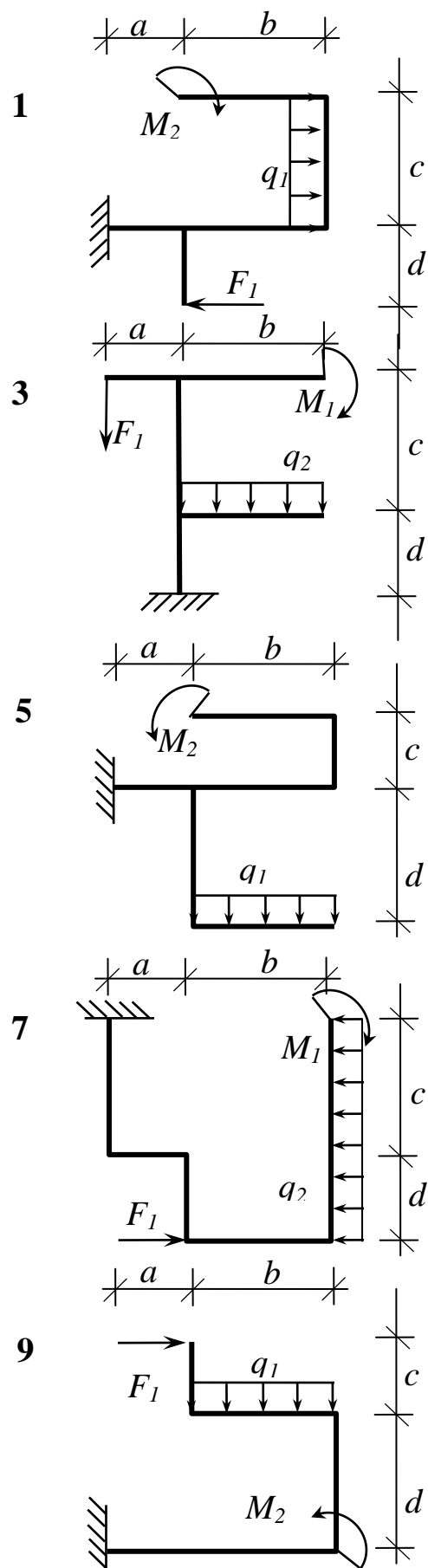
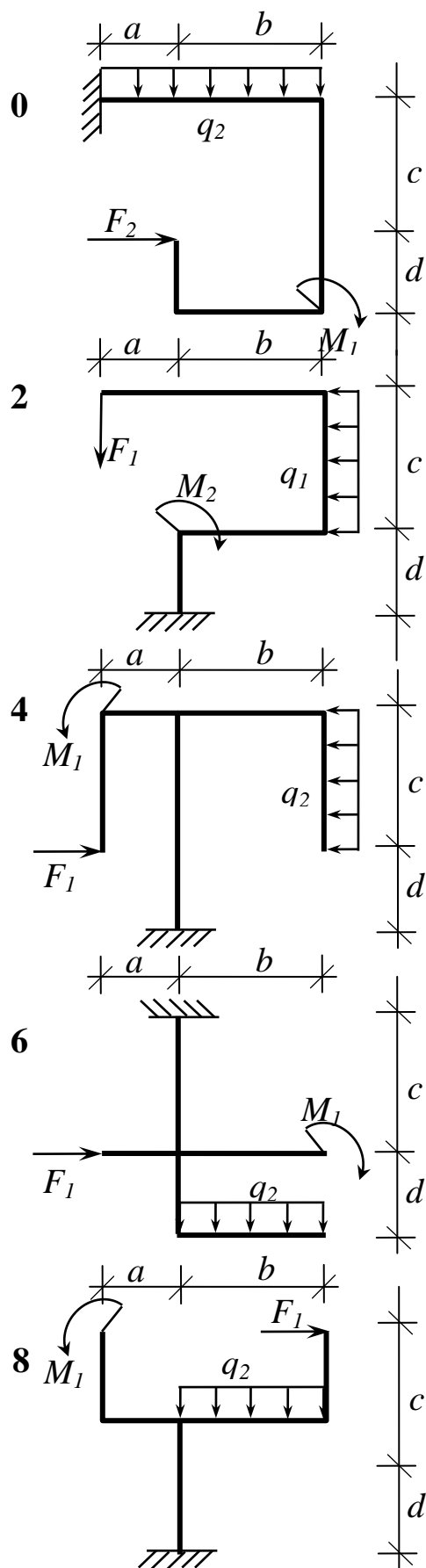


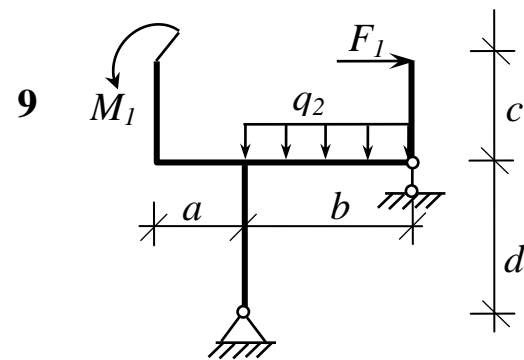
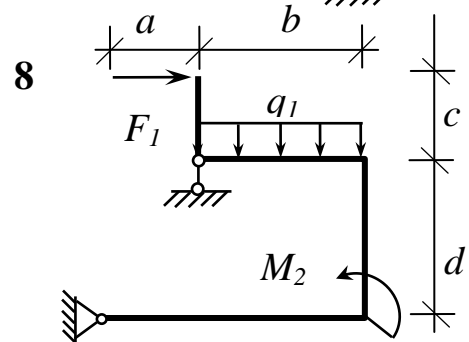
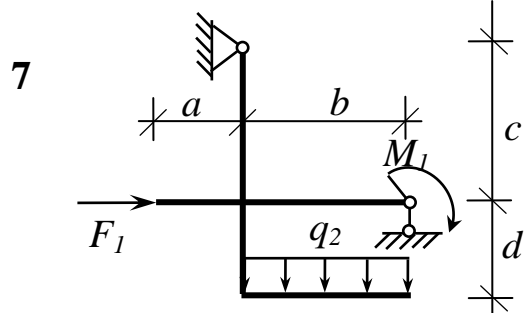
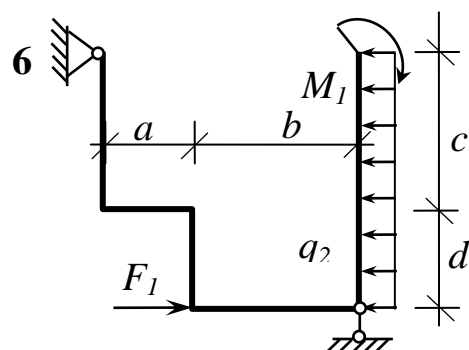
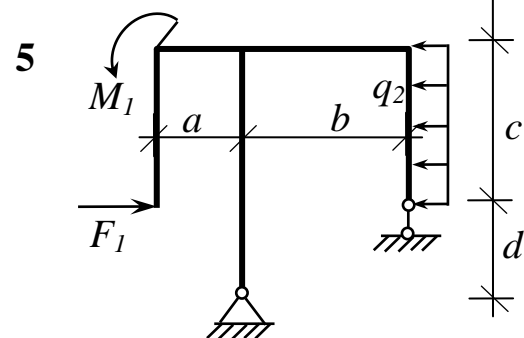
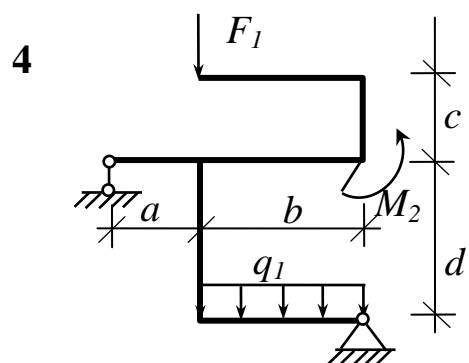
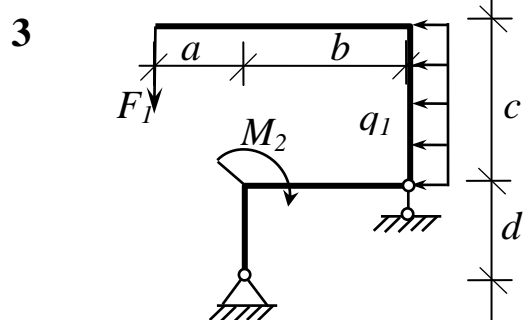
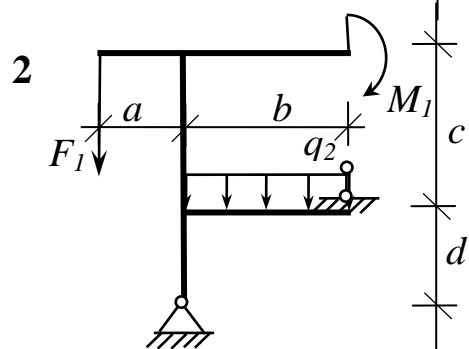
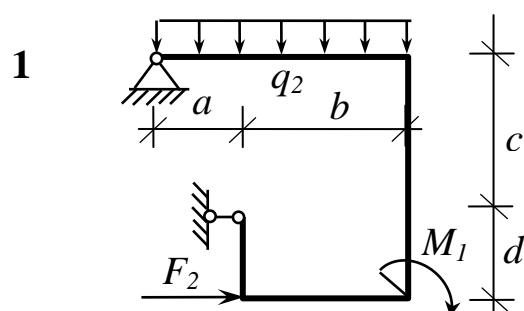
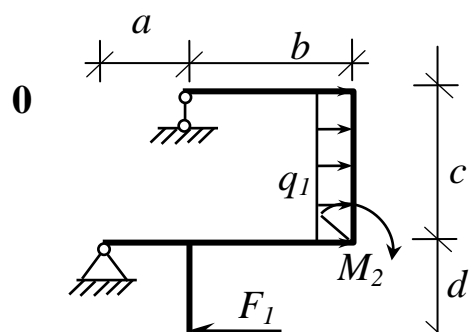


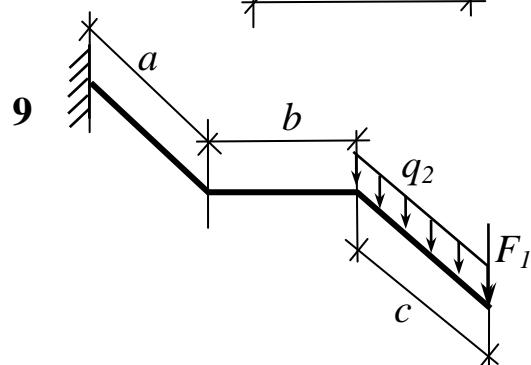
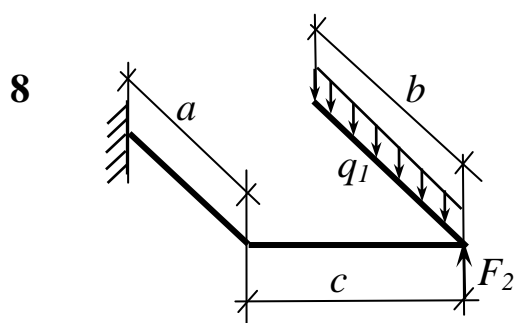
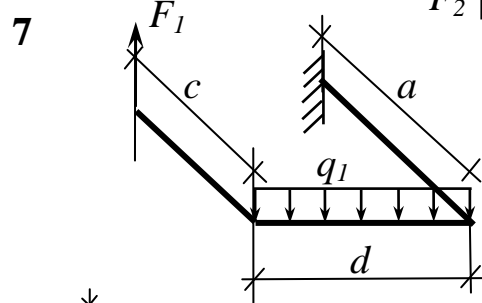
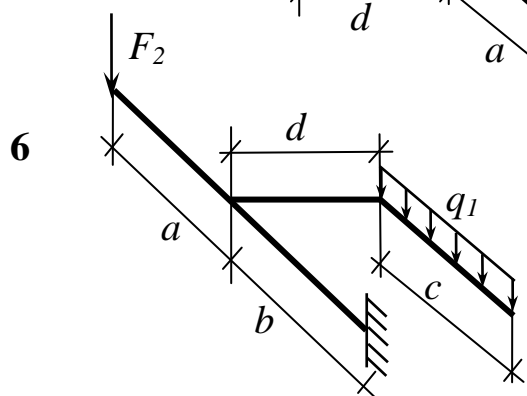
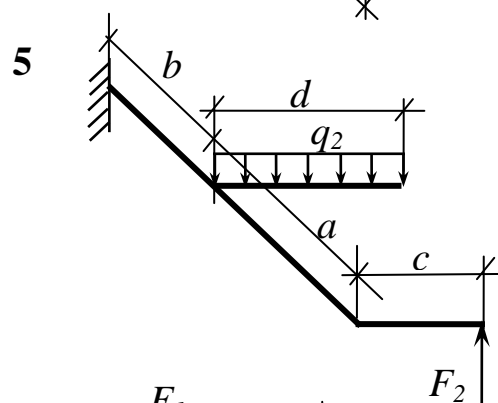
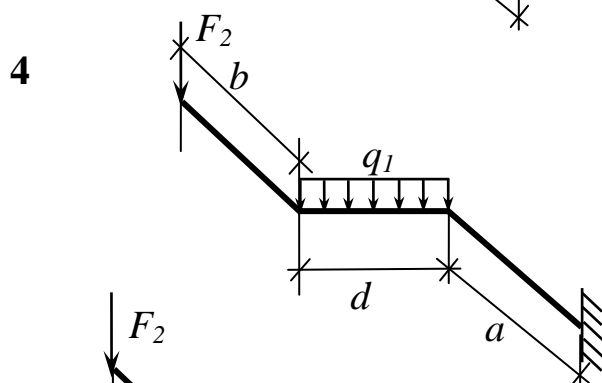
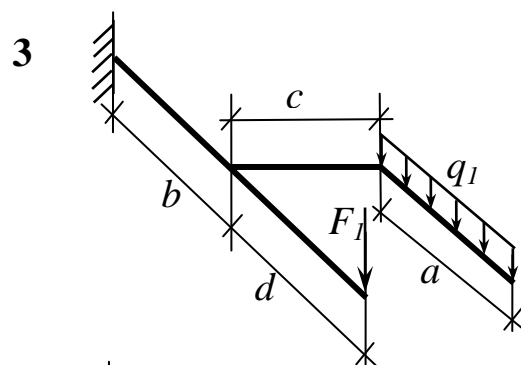
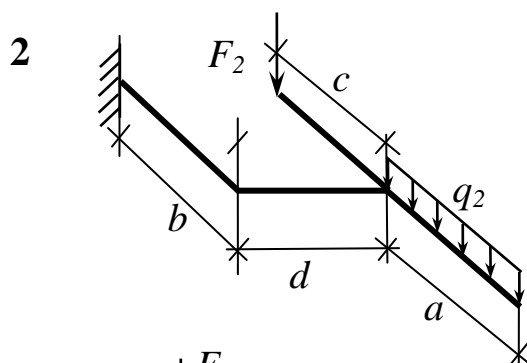
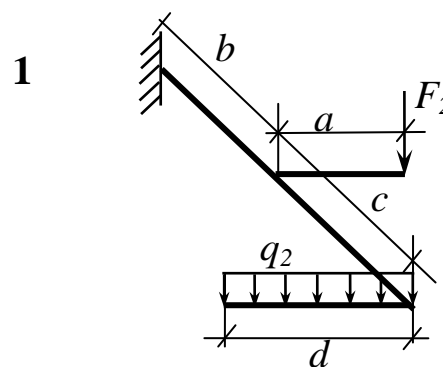
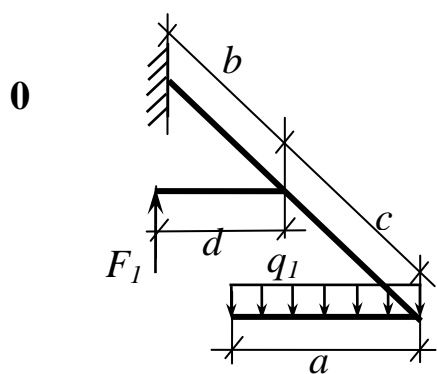


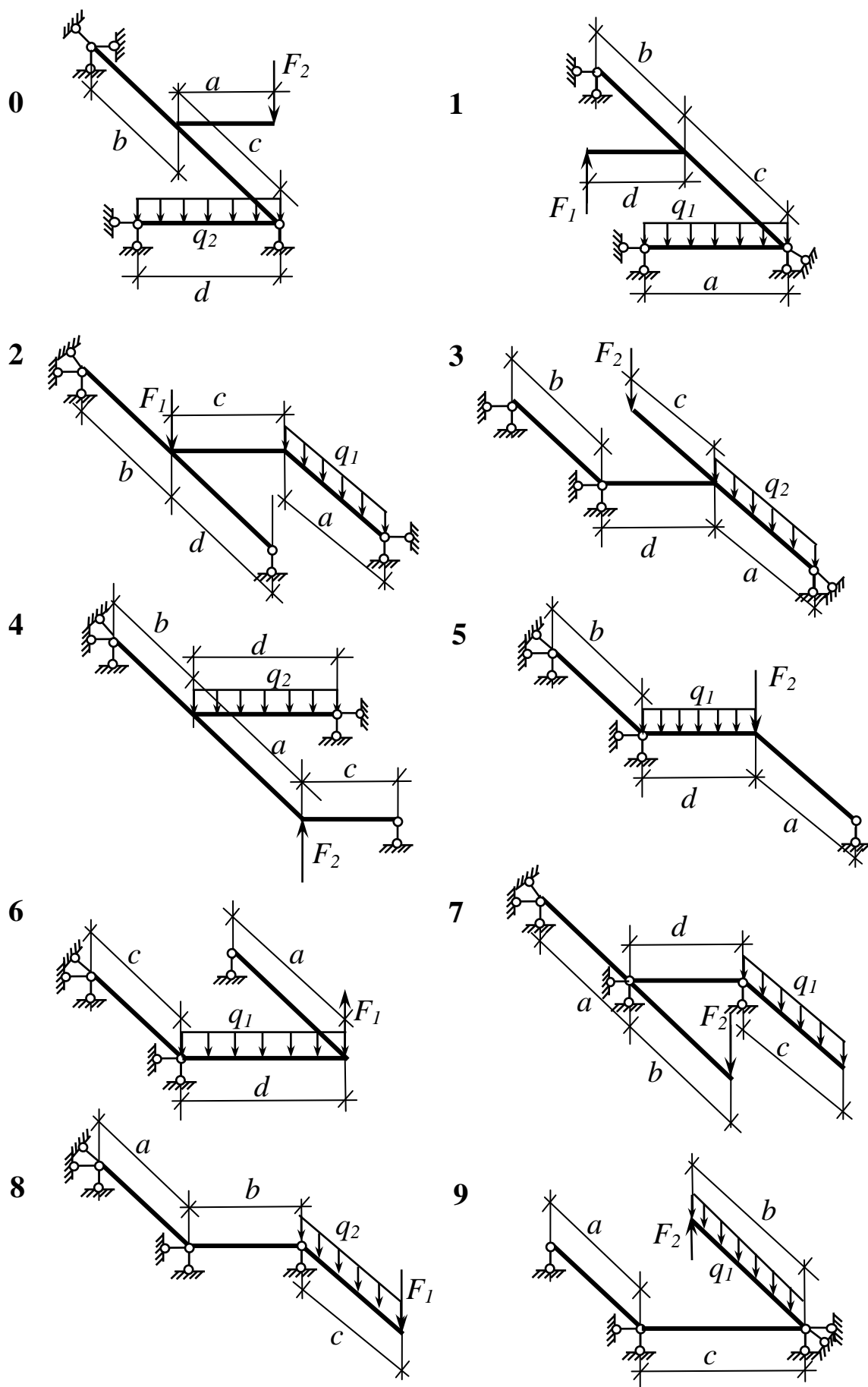


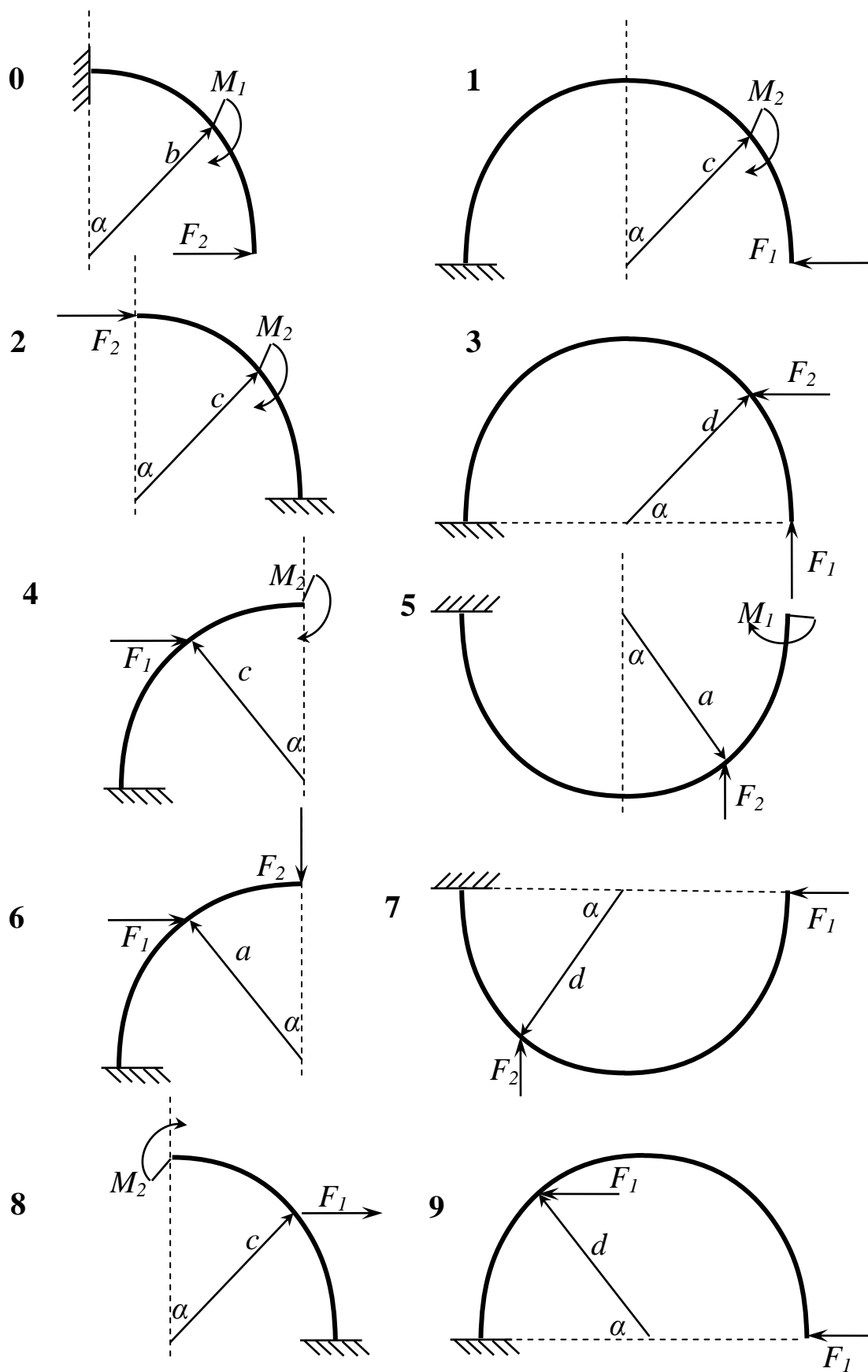




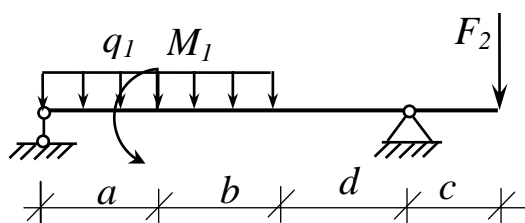




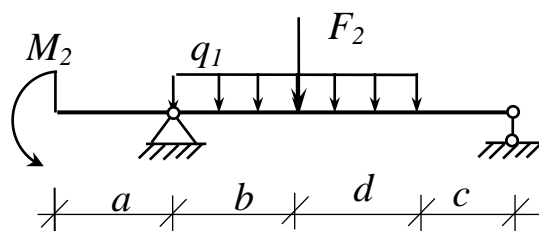




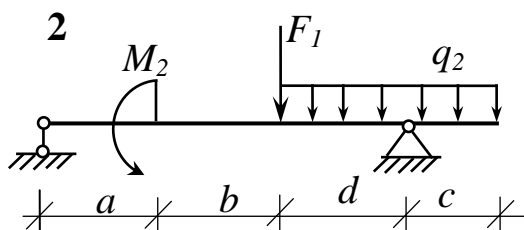
0



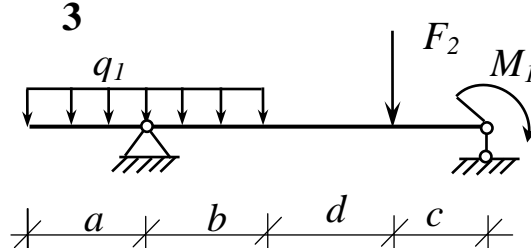
1



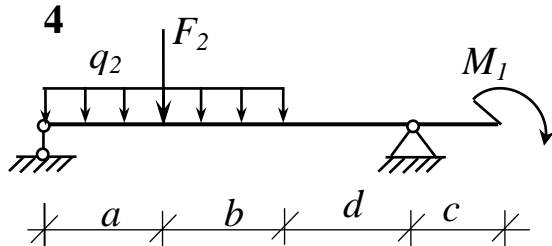
2



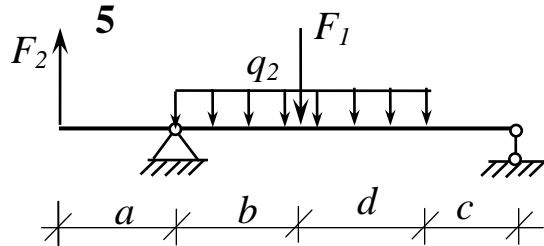
3



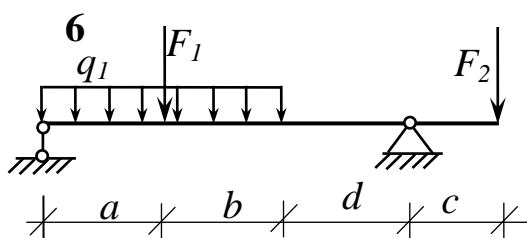
4



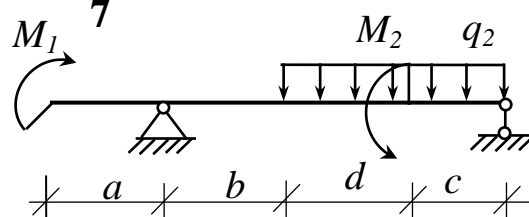
5



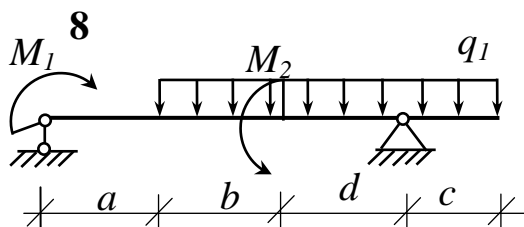
6



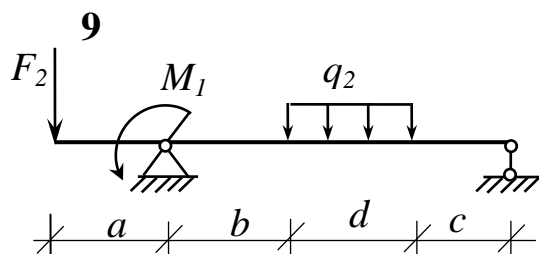
7



8



9



Навчально-методичне видання

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ**

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ**

**Геометричні характеристики плоских перерізів  
Розтягування (стискування) стержнів  
Побудова епюр внутрішніх зусиль в стержневих системах  
Пряме плоске згинання балок**

Методичні рекомендації, завдання та приклади  
до виконання розрахунково-графічних робіт для студентів напрямку  
підготовки 6.060101 «Будівництво»

Укладач: Григор'єва Людмила Олександрівна

Комп'ютерне верстання Григор'євої Л. О.

Підписано до друку                      Формат 60×84 1/16  
Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк на різнографі.  
Ум.-друк.арк. 2,32. Обл.-вид.арк. 2,5.  
Тираж    прим. Вид. №                      139/III-09. Зам. №

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ, 03680

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі  
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів  
Видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.