

2. Розтягування (стискування) стержнів. Розрахунок стержневих систем.

§ 2.1. Розтягування (стискування) стержнів. При одноосному навантаженні стержня рівнодійна внутрішніх сил в заданому перерізі називається *поздовжньою силою* N . Для визначення сили N використовується метод перерізів: стержень розрізається на дві частини,

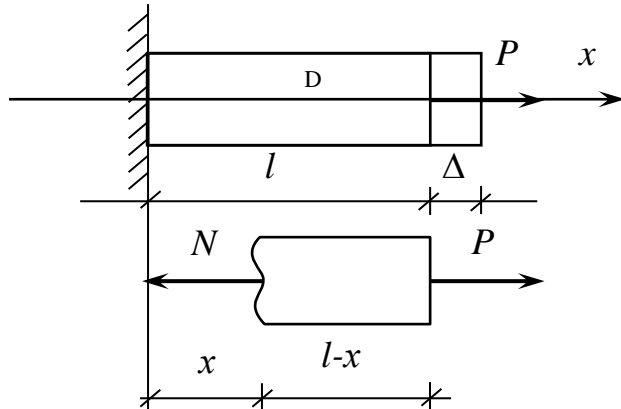


Рис. 2.1.

одна з яких відкидається; вплив відкинутої частини на ту, що залишилась, замінюють зусиллям N . Значення зусилля N визначається з рівняння рівноваги для частини стержня, що залишилась, і залежить від зовнішніх сил, в тому числі власної ваги.

При навантаженні стержня зосередженими поздовжніми силами без врахування власної ваги поздовжня сила N залишається постійною в довільному перерізі ділянки стержня між точками прикладання сил. Зусилля N дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, що діють на відрізану частину стержня. N додатне, якщо ділянка розтягнута (діє від перерізу), і від'ємне, якщо ділянка стиснута (діє до перерізу).

Графік, що показує зміну N по довжині стержня, називається *епюрою поздовжніх сил* (епюрою N).

При розрахунках на розтягування (стискування) стержнів вважаємо, що для поперечних перерізів стержня виконується *гіпотеза плоских перерізів*: плоскі поперечні перерізи стержня в процесі деформування рухаються як жорсткі тіла, залишаючись плоскими та перпендикулярними до деформованої вісі стержня.

Нормальне напруження в конкретному перерізі стержня з врахуванням гіпотези плоских перерізів визначається за формулою

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.1)$$

де A – площа поперечного перерізу. Графік, що показує зміну нормальних напружень по довжині стержня, називається *епюрою нормальних напружень* (епюрою σ).

Переріз, в якому нормальне напруження має найбільше абсолютне значення ($\sigma = \sigma_{\max}$), називається небезпечним.

В межах пружності $\sigma \leq \sigma_e$ виконується закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.2)$$

де E – модуль Юнга (модуль пружності першого роду), $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ – відносна поздовжня деформація.

Видовження відрізка (x_1, x_2) знаходиться за формулою

$$u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{N}{EA} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{E} dx. \quad (2.3)$$

Видовження $u_l = \Delta$ ділянки стержня довжиною l зі сталою жорсткістю на розтяг EA під дією сталої сили N знаходиться за формулою

$$\Delta = \frac{Nl}{EA} = \frac{\sigma l}{E}. \quad (2.4)$$

Умова міцності при осьовому розтягуванні або стискуванні має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq \sigma_{adm}, \quad (2.5)$$

де σ_{adm} – допустимі нормальні напруження для конкретного матеріалу.

Для крихких матеріалів (камінь, бетон, цегла) допустимі значення нормальних напружень на розтягування та стискування суттєво відрізняються, тому оцінка міцності для розтягнутих і стиснутих ділянок проводиться окремо:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^+ &\leq \sigma_{adm}^+, \\ \sigma_{\max}^- &\leq \sigma_{adm}^-. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При перевірці міцності допускається перенапруження

$$\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{adm}}{\sigma_{adm}} \cdot 100\% \leq 5\%. \quad (2.7)$$

При підборі перерізу необхідна площа поперечного перерізу знаходиться за допомогою виразу

$$A_{нб} = \frac{N_{\max}}{\sigma_{adm}}. \quad (2.8)$$

2.1. Стяжка діаметром $d = 15 \text{ мм}$ розтягується силою P (рис. 2.2), що викликає в ній напруження

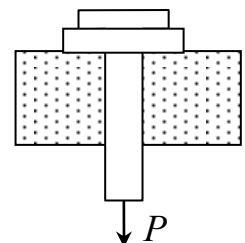


Рис. 2.2

$\sigma = 100 \text{ МПа}$. Якою повинна бути сторона a квадратної шайби, щоб тиск, що передається на стіну, не перевищував $\sigma_{\text{adm}} = 2 \text{ МПа}$?

Розв'язання. Площа поперечного перерізу стяжки

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 15^2}{4} = 177 \text{ мм}^2.$$

Стяжка діє на стіну з силою

$$P = \sigma A = 100 \cdot 10^6 \cdot 177 \cdot 10^{-6} = 17,7 \text{ кН}.$$

Необхідна площа шайби

$$A_{\text{нб}} = a^2 - A = \frac{P}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{17,7 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^6} = 8,85 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 885 \text{ мм}^2.$$

Сторона шайби

$$a = \sqrt{A_{\text{нб}} + A} = \sqrt{885 + 177} = 32,6 \text{ мм}.$$

2.2. Кабель, що складається з сталюго волокна діаметром $d_1 = 10 \text{ мм}$ та шести мідних волокон діаметром $d_2 = 3 \text{ мм}$, розтягується силою $P = 15 \text{ кН}$. Визначити напруження в волокнах кабеля.

Розв'язання. Модуль Юнга для сталі $E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, для міді $E_2 = 1,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Площі поперечних перерізів волокон

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 10^2}{4} = 78,5 \text{ мм}^2, \quad A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 3^2}{4} = 7,1 \text{ мм}^2.$$

Між силою P та напруженнями виконується залежність

$$P = A_1 \sigma_1 + 6 A_2 \sigma_2.$$

Видовження сталюго та мідних волокон однакове

$$\Delta_1 = \Delta_2 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{\sigma_1 E_2}{E_1}.$$

Знаходимо напруження:

$$(78,5 + 6 \cdot 7,1 \cdot \frac{1,3}{2}) \sigma_1 \cdot 10^{-6} = 15 \cdot 10^3 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{15 \cdot 10^9}{106,2} = 141 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{1,3 \cdot 141}{2} = 92 \text{ МПа}.$$

2.3. Стальний стержень прямокутного поперечного перерізу $10 \times 50 \text{ мм}$ ослаблений трьома заклепочними отворами діаметром $d = 5 \text{ мм}$. Як повинні бути розміщені отвори, щоб стержень витримував максимальне допустиме навантаження? Визначити його.

Розв'язання. Отвори повинні розміщуватись послідовно вздовж вісі стержня. Таким чином площа поперечного перерізу буде максимально

можливою. Якщо отвори не лежатимуть на вісі стержня, то центр ваги поперечного перерізу зміститься і матиме місце позacentрове розтягування-стискування.

Площа мінімального поперечного перерізу

$$A = bh - dh = 50 \cdot 10 - 5 \cdot 10 = 450 \text{ мм}^2.$$

Для сталі $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$. Допустиме навантаження

$$P = A \sigma_{adm} = 450 \cdot 10^{-6} \cdot 160 \cdot 10^6 = 72 \text{ кН}.$$

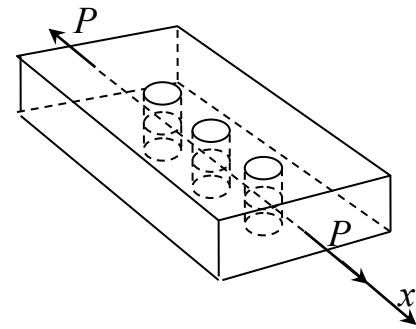


Рис. 2.3

2.4. Двоступінчата кам'яна колона (площа верхнього перерізу $A_1 = 0,3 \text{ м}^2$, площа нижнього перерізу $A_2 = 0,5 \text{ м}^2$) навантажена силами $F_1 = 320 \text{ кН}$, $F_2 = 250 \text{ кН}$ (рис.2.3). Побудувати епюри

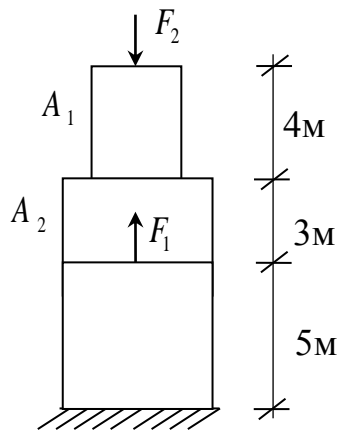


Рис. 2.3

поздовжньої сили N , нормальних напружень σ та пререміщень поперечних перерізів u (модуль Юнга $E = 0,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$). Перевірити міцність колони, якщо допустиме напруження на розтягування $\sigma_{adm}^+ = 0,3 \text{ МПа}$, на стискування $\sigma_{adm}^- = 3 \text{ МПа}$.

Розв'язання Розбиваємо стержень на ділянки по точках прикладання сили та зміни площі поперечного перерізу та номеруємо їх, починаючи з вільного кінця (рис.2.4).

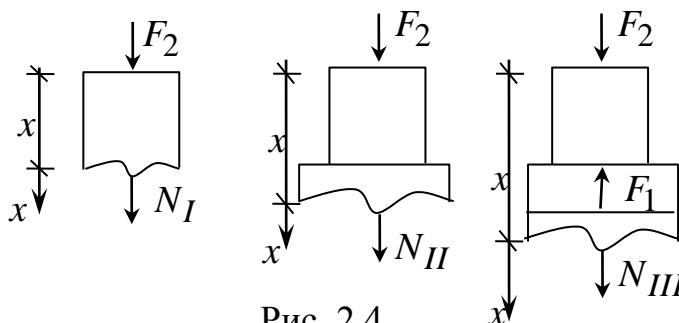


Рис. 2.4

За допомогою методу перерізів знаходимо значення внутрішньої сили N на кожній з ділянок (рис. 2.4):

Рівняння рівноваги для першої та другої ділянок однакові

$$N_I + F_2 = 0, \quad N_{II} + F_2 = 0,$$

$$N_I = N_{II} = -F_2 = -250 \text{ кН}.$$

Для третьої ділянки маємо $N_{III} + F_2 - F_1 = 0$,

$$N_{III} = F_1 - F_2 = 320 - 250 = 70 \text{ кН}.$$

Знаходимо нормальні напруження σ на кожній з ділянок:

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_1} = \frac{-250 \cdot 10^3}{0.3} = -833,3 \text{ кПа} = -0,83 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_2} = \frac{-250 \cdot 10^3}{0.5} = -500 \text{ кПа} = -0,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_2} = \frac{70 \cdot 10^3}{0.5} = 140 \text{ кПа} = 0,14 \text{ МПа}.$$

По знайдених значеннях N та σ на рис. 2.5 будемо епюри :

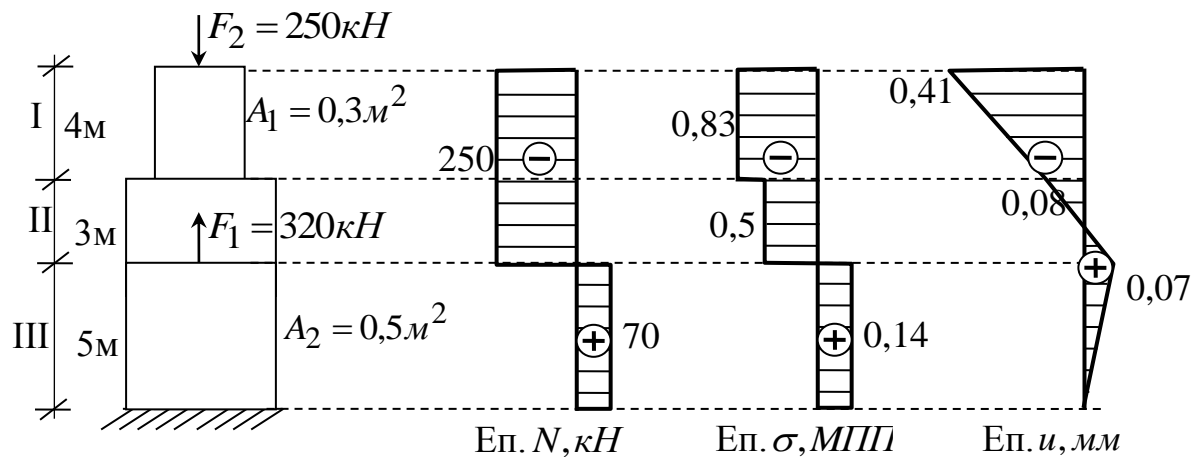


Рис. 2.5

Робимо перевірку міцності по максимальних напруженнях на стиснутих і розтягнутих ділянках:

$$\sigma_{\max}^- = 0,83 \text{ МПа} \leq \sigma_{adm}^- = 3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^+ = 0,14 \text{ МПа} \leq \sigma_{adm}^+ = 0,3 \text{ МПа}.$$

Міцність колони забезпечено.

Визначаємо видовження кожної з ділянок стержня:

$$\Delta_I = \frac{N_I l_I}{EA_1} = \frac{\sigma_I l_I}{E} = \frac{-0,83 \cdot 4}{0,1 \cdot 10^5} = -3,32 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,33 \text{ мм};$$

$$\Delta_{II} = \frac{N_{II} l_{II}}{EA_2} = \frac{\sigma_{II} l_{II}}{E} = \frac{-0,5 \cdot 3}{0,1 \cdot 10^5} = -1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,15 \text{ мм};$$

$$\Delta_{III} = \frac{N_{III} l_{III}}{EA_2} = \frac{\sigma_{III} l_{III}}{E} = \frac{0,14 \cdot 5}{0,1 \cdot 10^5} = 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,07 \text{ мм}.$$

Переміщення характерних перерізів стержня визначаємо, починаючи з закріплення стержня:

$$u(12) = 0;$$

$$u(8) = u(12) + \Delta_{III} = 0 + 0,07 = 0,07 \text{ м}, ;$$

$$u(5) = u(8) + \Delta_{II} = 0,07 - 0,15 = -0,08 \text{ м}, ;$$

$$u(0) = u(5) + \Delta_I = -0,08 - 0,33 = -0,41 \text{ м}, .$$

На рис. 2.5 будемо епюру переміщень.

2.5. Провести розрахунок ступінчатої колони з задачі 2.4 з врахуванням власної ваги стержня при густині матеріалу $\gamma = 20 \text{ кН/м}^2$.

Р о з в ' я з о к. За допомогою методу перерізів на кожній з ділянок знаходимо значення внутрішньої сили N з врахуванням власної ваги стержня, яка дорівнює добутку густини матеріалу на об'єм відрізаної частини (рис. 2.4).

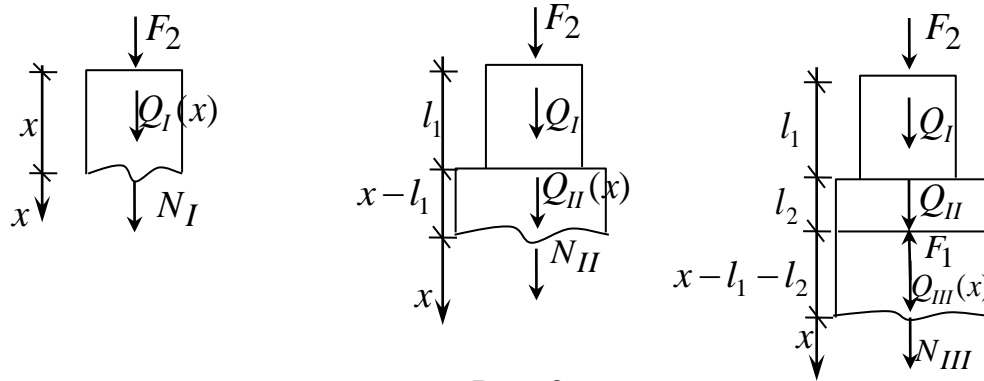


Рис. 2.6

Записуємо рівняння рівноваги для кожної з ділянок та знаходимо поздовжню силу на початку та на кінці кожної з ділянок:

$$\text{I) } 0 < x < 4\text{ м: } N_I(x) + Q_I(x) + F_2 = 0, \quad Q_I(x) = \gamma A_1 x,$$

$$N_I(x) = -\gamma A_1 x - F_2 = -20 \cdot 0,3 \cdot x - 250 = -6x - 250,$$

$$N_I(0) = -250 \text{ кН}, \quad N_I(4) = -6 \cdot 4 - 250 = -274 \text{ кН}$$

$$\text{II) } 4 < x < 7\text{ м: } N_{II}(x) + Q_I + Q_{II}(x) + F_2 = 0,$$

$$Q_I = \gamma A_1 l_1, \quad Q_{II}(x) = \gamma A_2 (x - l_1),$$

$$N_{II}(x) = -\gamma A_1 l_1 - \gamma A_2 (x - l_1) - F_2 = -20 \cdot 0,3 \cdot 4 - 20 \cdot 0,5 \cdot (x - 4) - 250 = -10(x - 4) - 274$$

$$N_{II}(4) = -274 \text{ кН}, \quad N_{II}(7) = -10 \cdot 3 - 274 = -304 \text{ кН}.$$

$$\text{III) } 7 < x < 12\text{ м: } N_{III}(x) + Q_I + Q_{II} + Q_{III}(x) + F_2 - F_1 = 0,$$

$$Q_I = \gamma A_1 l_1, \quad Q_{II} = \gamma A_2 l_2, \quad Q_{III}(x) = \gamma A_2 (x - l_1 - l_2),$$

$$N_{III}(x) = -\gamma A_1 l_1 - \gamma A_2 l_2 - \gamma A_2 (x - l_1 - l_2) - F_2 + F_1 = -20 \cdot 0,3 \cdot 4 - 20 \cdot 0,5 \cdot 3 - 20 \cdot 0,5 \cdot (x - 7) - 250 + 320 = -10(x - 7) + 16$$

$$N_{III}(7) = 16 \text{ кН}, \quad N_{III}(12) = -10 \cdot 5 + 16 = -34 \text{ кН}.$$

Знаходимо нормальні напруження σ на початку та на кінці кожної з ділянок:

$$\text{I) } \sigma_I(0) = \frac{N_I(0)}{A_1} = \frac{-250 \cdot 10^3}{0,3} = -833,3 \text{ кПа} = -0,83 \text{ МПа};$$

$$\sigma_I(4) = \frac{N_I(4)}{A_1} = \frac{-274 \cdot 10^3}{0,3} = -913,3 \text{ кПа} = -0,91 \text{ МПа}.$$

$$\text{II) } \sigma_{II}(4) = \frac{N_{II}(4)}{A_2} = \frac{-274 \cdot 10^3}{0,5} = -548 \text{ кПа} = -0,55 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{II}(7) = \frac{N_{II}(7)}{A_2} = \frac{-304 \cdot 10^3}{0.5} = -608 \text{ кПа} = -0.61 \text{ МПа}.$$

$$\text{III) } \sigma_{III}(7) = \frac{N_{III}(7)}{A_2} = \frac{16 \cdot 10^3}{0.5} = 32 \text{ кПа} = 0.03 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{III}(12) = \frac{N_{III}(12)}{A_2} = \frac{-34 \cdot 10^3}{0.5} = -68 \text{ кПа} = -0.07 \text{ МПа}.$$

По знайдених значеннях N та σ на рис. 2.7 будують епюри :

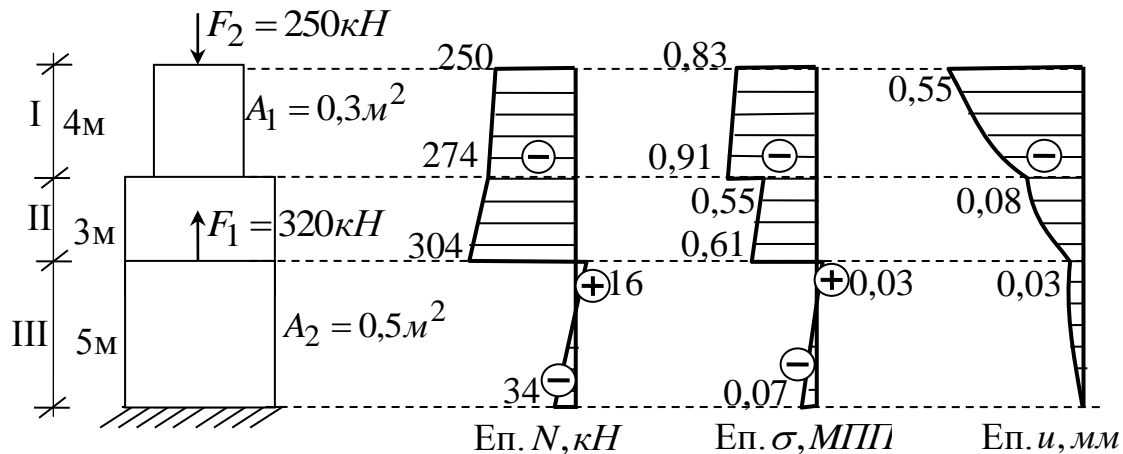


Рис. 2.7

Робимо перевірку міцності по максимальних напруженнях на стиснутих і розтягнутих ділянках:

$$\sigma_{\max}^- = 0.91 \text{ МПа} \leq \sigma_{adm}^- = 3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^+ = 0.03 \text{ МПа} \leq \sigma_{adm}^+ = 0.3 \text{ МПа}.$$

Міцність колони забезпечено.

Визначаємо видовження кожної з ділянок стержня. Скористаємось формулою $u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{N}{EA} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{E} dx = \frac{S_\sigma}{E}$, де S_σ -- площа епюри нормальних напружень на відрізку (x_1, x_2) . В нашому випадку знаходимо площу трапеції на кожній з ділянок:

$$\Delta_I = \frac{S_{\sigma I}}{E} = \frac{(-0.83 - 0.91) \cdot 4}{2 \cdot 0.1 \cdot 10^5} = -3.48 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0.35 \text{ мм};$$

$$\Delta_{II} = \frac{S_{\sigma II}}{E} = \frac{(-0.55 - 0.61) \cdot 3}{2 \cdot 0.1 \cdot 10^5} = -1.74 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0.17 \text{ мм};$$

$$\Delta_{III} = \frac{S_{\sigma III}}{E} = \frac{(0.03 - 0.07) \cdot 5}{2 \cdot 0.1 \cdot 10^5} = -0.25 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0.03 \text{ мм}.$$

Переміщення характерних перерізів стержня визначаємо, починаючи з закріплення стержня:

$$u(12) = 0;$$

$$u(8) = u(12) + \Delta_{III} = 0 - 0,03 = -0,03 \text{ м, ;}$$

$$u(5) = u(8) + \Delta_{II} = -0,03 - 0,17 = -0,2 \text{ м, ;}$$

$$u(0) = u(5) + \Delta_I = -0,2 - 0,35 = -0,55 \text{ м, .}$$

На рис. 2.7 будемо епюру переміщень, з'єднуючи точки параболічними кривими.

§ 2.2. Розрахунок статично визначених стержневих систем.

До *статично визначених стержневих систем* відносяться системи шарнірно з'єднаних стержнів, в яких кількість невідомих зусиль в стержнях співпадає з кількістю рівнянь рівноваги. Для плоскої системи сил система рівнянь рівноваги в системі координат xOy має вигляд

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_A = 0,$$

або

$$\sum F_x = 0, \sum M_B = 0, \sum M_A = 0, \quad (2.9)$$

де A, B – довільні точки системи.

В просторовому випадку маємо

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0, \sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0. \quad (2.10)$$

Знайшовши з рівнянь рівноваги поздовжні сили в кожному з стержнів, з умови міцності (2.5) підбираємо необхідну площу поперечного перерізу $A_{нб}$ або допустиме зовнішнє навантаження P_{adm} . Видовження кожного з стержнів знаходиться за формулою (2.4).

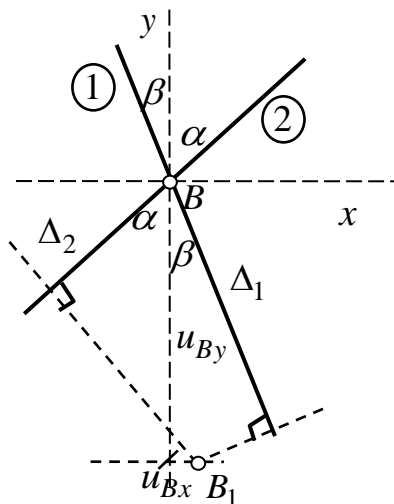


Рис. 2.8

В межах малих деформацій положення точки з'єднання стержнів B після деформування системи зручно шукати за допомогою *методу засічок*: на кожному з стержнів відкладаємо від точки B його видовження (або скорочення) та проводимо перпендикуляри до стержнів в отриманих точках. Точка B переміститься в точку B_1 перетину цих перпендикулярів (див. рис. 2.5). Проекції переміщення точки B u_{Bx}, u_{By} на осі x, y знайдемо за допомогою наступного правила: видовження Δ стержня дорівнює

сумі проекцій переміщень u_{Bx}, u_{By} на напрямок цього стержня. Для рис. 2.8 маємо

$$\begin{cases} \Delta_1 = u_{By} \cos \beta + u_{Bx} \sin \beta, \\ \Delta_2 = u_{By} \cos \alpha - u_{Bx} \sin \alpha. \end{cases} \quad (2.11)$$

2.6. Жорсткий стержень AB навантажений силою P та підтримується сталюю тягою CD квадратного поперечного перерізу з стороною $a = 20\text{ мм}$ (рис. 2.9). Визначити максимальне допустиме значення сили P та переміщення точки B .

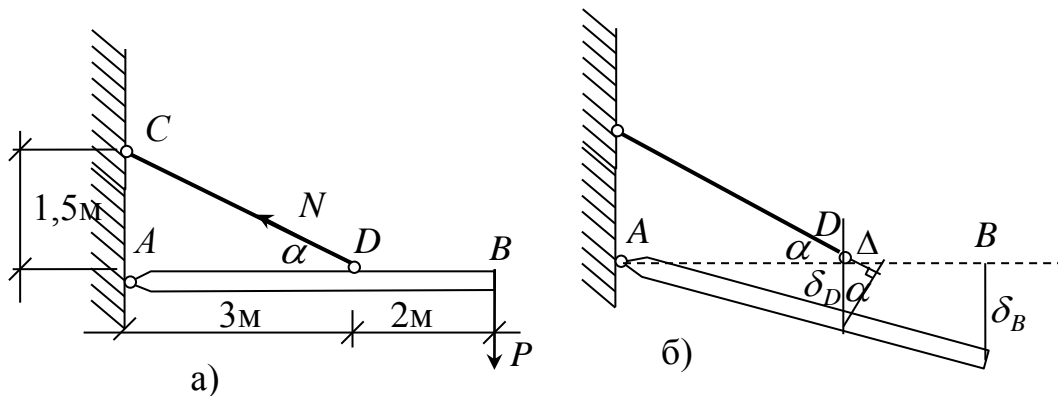


Рис. 2.9

Знайдемо максимальне допустиме зусилля в стержні CD при $\sigma_{adm} = 160\text{ МПа}$:

$$N = a^2 \sigma_{adm} = 20^2 \cdot 10^{-6} \cdot 160 \cdot 10^6 = 64\text{ кН}.$$

Знайдемо довжину стержня CD та синус кута α :

$$l = \sqrt{1,5^2 + 3^2} = 3,35\text{ м}, \quad \sin \alpha = \frac{1,5}{3,35} = 0,4478.$$

Для знаходження сили P запишемо рівняння рівноваги стержня AB відносно точки A :

$$\sum M_A = N \cdot AD \sin \alpha - P \cdot AB = 0 \Rightarrow$$

$$P = \frac{N \cdot AD \sin \alpha}{AB} = \frac{64 \cdot 3 \cdot 0,4478}{5} = 17,2\text{ кН}.$$

Видовження стержня CD

$$\Delta = \frac{Nl}{EA} = \frac{64 \cdot 10^3 \cdot 3,35}{2 \cdot 10^{11} \cdot 20^2 \cdot 10^{-6}} = 26,8 \cdot 10^{-4}\text{ м} = 2,68\text{ мм}.$$

Переміщення точки D δ_D знайдемо за допомогою *методу засічок*: на стержні CD відкладаємо від точки D видовження Δ та проводимо перпендикуляр до стержня в отриманій точці. Оскільки стержень AB жорсткий, проводимо перпендикуляр до нього в т. D . Точка D переміститься в точку перетину цих перпендикулярів (див. рис. 2.9 б)).

Маємо

$$\delta_D = \frac{\Delta}{\sin \alpha} = \frac{2,68}{0,4478} = 6 \text{ мм}.$$

Переміщення точки B δ_B знайдемо з умови подібності трикутників:

$$\frac{\delta_D}{AD} = \frac{\delta_B}{AB} \Rightarrow \delta_B = \frac{\delta_D AB}{AD} = \frac{6 \cdot 5}{3} = 10 \text{ мм}.$$

2.7. До стержневої підвіски, що складається з шарнірно з'єднаних стержнів 1, 2 однакового поперечного перерізу (рис. 2.10), підвішено вантаж вагою $F = 120 \text{ кН}$. Потрібно визначити зусилля в стержнях, підібрати площі поперечних перерізів стержнів при $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ та визначити переміщення точки B прикладання сили.

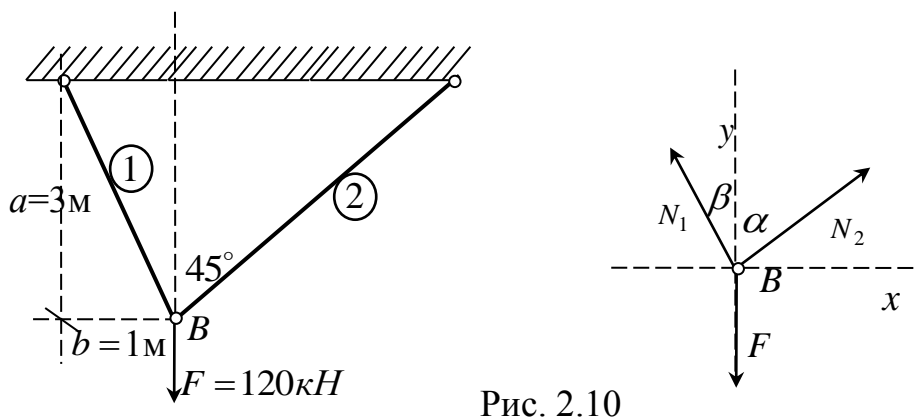


Рис. 2.10

Р о з в' я з а н н я. При такому навантаженні в стержнях 1, 2 виникають внутрішні поздовжні сили N_1 , N_2 , які знаходимо з рівняння рівноваги для точки B (рис. 2.10):

$$-N_1 \sin \beta + N_2 \sin \alpha = 0,$$

$$N_1 \cos \beta + N_2 \cos \alpha - F = 0.$$

Знайдемо довжини стержнів та тригонометричні значення для кутів:

$$l_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} = 3,16 \text{ м},$$

$$l_2 = a / \cos 45^\circ = 3\sqrt{2} = 4,24 \text{ м},$$

$$\sin \alpha = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \alpha = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \beta = b / l_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \beta = a / l_1 = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Розв'язуємо систему рівнянь рівноваги:

$$N_1 = N_2 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = N_2 \frac{\sqrt{2}\sqrt{10}}{2} = \sqrt{5}N_2, \quad \sqrt{5}N_2 \frac{3}{\sqrt{10}} + N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0,$$

$$N_2 \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - F = 2\sqrt{2}N_2 - F = 0,$$

$$N_2 = \frac{F}{2\sqrt{2}} = \frac{120}{2\sqrt{2}} = 42,4 \text{ кН}, \quad N_1 = \sqrt{5}N_2 = \sqrt{5} \cdot 42,4 = 94,9 \approx 95 \text{ кН}.$$

Підбираємо площу поперечних перерізів стержнів

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq \sigma_{adm} \rightarrow A_{нб} = \frac{N_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{95 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,59 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \approx 6 \text{ см}^2.$$

Визначаємо напруження в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{95 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 15,8 \cdot 10^7 \text{ Па} = 158 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{42,4 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 7,07 \cdot 10^7 \text{ Па} = 70,7 \text{ МПа}.$$

Видовження стержнів

$$\Delta_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = \frac{158 \cdot 10^6 \cdot 3,16}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 249,6 \cdot 10^{-5} \text{ м} \approx 2,5 \text{ мм},$$

$$\Delta_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = \frac{70,7 \cdot 10^6 \cdot 4,24}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 149,8 \cdot 10^{-5} \text{ м} \approx 1,5 \text{ мм}.$$

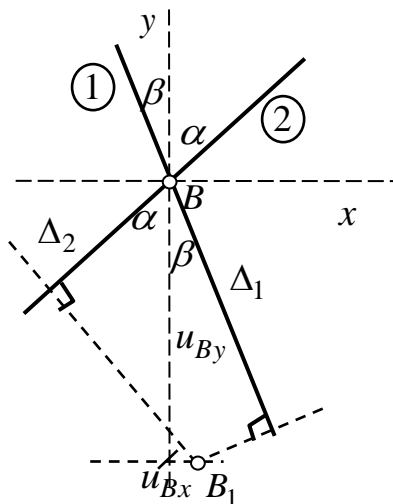


Рис. 2.11

Застосовуючи метод засічок (2.11), отримуємо систему рівнянь для знаходження переміщень точки В u_{Bx} , u_{By} :

$$\begin{cases} \Delta_1 = u_{By} \cos \beta + u_{Bx} \sin \beta, \\ \Delta_2 = u_{By} \cos \alpha - u_{Bx} \sin \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} 3u_{By} + u_{Bx} = \Delta_1 \sqrt{10}, \\ u_{By} - u_{Bx} = \Delta_2 \sqrt{2}, \end{cases}$$

$$u_{By} = \frac{\Delta_2 \sqrt{2} + \Delta_1 \sqrt{10}}{4} = \frac{1,5\sqrt{2} + 2,5\sqrt{10}}{4} = 2,5 \text{ мм},$$

$$u_{Bx} = -\Delta_2 \sqrt{2} + u_{By} = -1,5\sqrt{2} + 2,5 = 0,38 \text{ мм}.$$

Повне переміщення точки В

$$u_B = \sqrt{u_{Bx}^2 + u_{By}^2} = \sqrt{2,5^2 + 0,38^2} = 2,53 \text{ мм}.$$

Рисунок для методу засічок потрібно виконувати в масштабі. В такому випадку значення u_{Bx} , u_{By} можна перевірити шляхом безпосереднього вимірювання на рисунку.

§ 2.3. Розрахунок статично невизначених стержневих систем.

До статично невизначених стержневих систем відносяться системи шарнірно з'єднаних стержнів, в яких кількість невідомих зусиль в

стержнях більша за кількість рівнянь рівноваги. Різниця n між кількістю невідомих зусиль та кількістю рівнянь рівноваги називається *ступенем статичної невизначеності*.

Для таких систем для знаходження невідомих зусиль в стержнях систему рівнянь рівноваги потрібно доповнити n умовами сумісності деформацій, які визначаються з геометричних властивостей деформованої стержневої системи.

Для розв'язання таких задач зручно використовувати *принцип суперпозицій*, тобто розкласти навантаження на простіші стани, а потім сумувати знайдені для цих станів напруження та деформації.

В статично невизначених системах деформування можуть викликати, як зовнішнє навантаження, так і зміна температури з врахуванням коефіцієнту температурного розширення матеріалу α . Крім того, часто в процесу монтажу системи для підгонки розмірів елементів доводиться прикладати певні зусилля, які викликають так звані *початкові* або *монтажні* напруження. В статично визначених системах неточність в розмірах елементів не викликає додаткових напружень.

2.8. Для стержня, що складається з мідної та сталюї частини (рис. 2.12), побудувати епюри поздовжньої сили N , підібрати поперечний переріз, визначити напруження. Стержень навантажено силою $F = 500 \text{ кН}$. Відомо, що площа поперечного перерізу мідної частини повинна бути вдвічі більшою за площу поперечного перерізу сталюї частини. Дано: $E_m = 1,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $E_{ст} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\sigma_{adm}^m = 100 \text{ МПа}$, $\sigma_{adm}^{cm} = 160 \text{ МПа}$

Р о з в ' я з а н н я. Задача один раз статично невизначена, тобто маємо одну «зайву» реакцію. Відкидаємо праву в'язь, замінюємо її невідомою реакцією R_B і отримуємо основну статисно еквівалентну систему а). За принципом суперпозицій розкладаємо навантаження стану а) на стани б) і с) (рис. 2.2.) Умова сумісності деформацій полягає в тому, що сума переміщень точки В станів б) і с) дорівнює нулю

$$u_{Ba} = u_{Bб} + u_{Bc} = 0 .$$

Будуємо епюри поздовжніх сил N і визначаємо переміщення точки В для кожного з станів:

$$u_{Bб} = \frac{R_B \cdot 3}{2A \cdot E_m} + \frac{R_B \cdot 2}{A \cdot E_{cm}}, \quad u_{Bc} = \frac{-F \cdot 3}{2A \cdot E_m} .$$

Записуємо рівняння сумісності деформацій

$$\frac{R_B}{A} \left(\frac{1,5}{E_m} + \frac{2}{E_{cm}} \right) - \frac{3F}{2AE_m} = 0.$$

Знаходимо реакцію

$$R_B = \frac{3F}{2E_m \left(\frac{1,5}{E_m} + \frac{2}{E_{cm}} \right)} = \frac{1,5 \cdot F}{1,5 + \frac{2E_m}{E_{cm}}} = \frac{1,5 \cdot 500}{1,5 + \frac{2 \cdot 1,1}{2}} = 288,5 \text{ кН}.$$

Знаходимо значення поздовжньої сили на кожній з ділянок стержня для стану а) $N_1 = 288,5 \text{ кН}$, $N_2 = 288,5 - 500 = -211,5 \text{ кН}$ та будуємо епюру дійсних сил N .

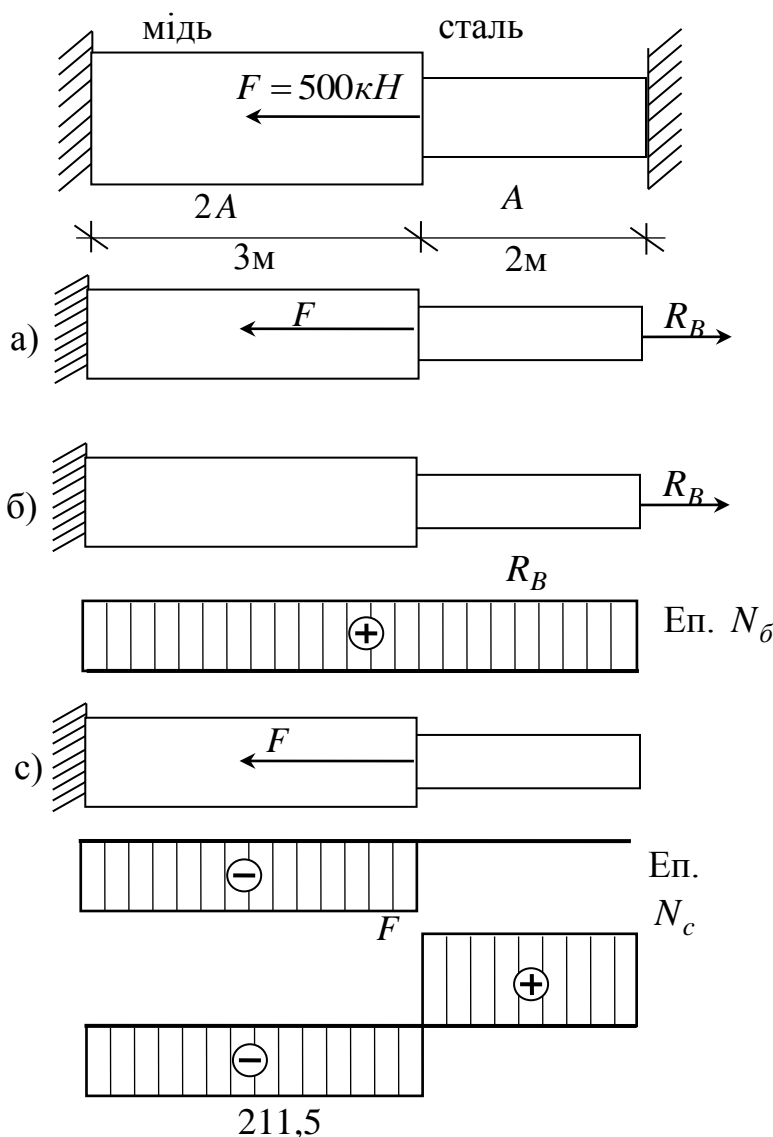


Рис. 2.12

стержня:

$$\sigma_{cm} = \frac{N_1}{A} = \frac{288,5 \cdot 10^3}{18 \cdot 10^{-4}} = 16,03 \cdot 10^7 \text{ Па} = 160,3 \text{ МПа};$$

Записуємо умови міцності для кожної з частин і знаходимо необхідні значення площ поперечних перерізів:

$$\sigma_m = \frac{N_2}{2A} \leq \sigma_{adm}^m,$$

$$A_{мнб} = \frac{N_2}{2\sigma_{adm}^m} = \frac{211,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 100 \cdot 10^6} = 1,057 \cdot 10^{-3} = 10,6 \text{ см}^2;$$

$$\sigma_{cm} = \frac{N_1}{A} \leq \sigma_{adm}^{cm},$$

$$A_{стнб} = \frac{N_1}{\sigma_{adm}^{cm}} = \frac{288,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 160 \cdot 10^6} = 1,8 \cdot 10^{-3} = 18 \text{ см}^2.$$

Вибираємо за допустиму більшу з двох знайдених площ $A = 18 \text{ см}^2$. Площа поперечного перерізу мідної частини $2A = 36 \text{ см}^2$. Знаходимо напруження в частинах

$$\sigma_m = \frac{N_2}{2A} = \frac{211,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 18 \cdot 10^{-4}} = 5,87 \cdot 10^7 \text{ Па} = 59 \text{ МПа}.$$

2.9. Жорстка балка AB підвішена на сталевих підвісках 1, 2 однакового поперечного перерізу (рис.2.13). Система навантажується силою $P = 20 \text{ кН}$. Визначити реакції в опорі A , підібрати площу поперечних перерізів стержнів 1, 2 та визначити переміщення точки D прикладання сили.

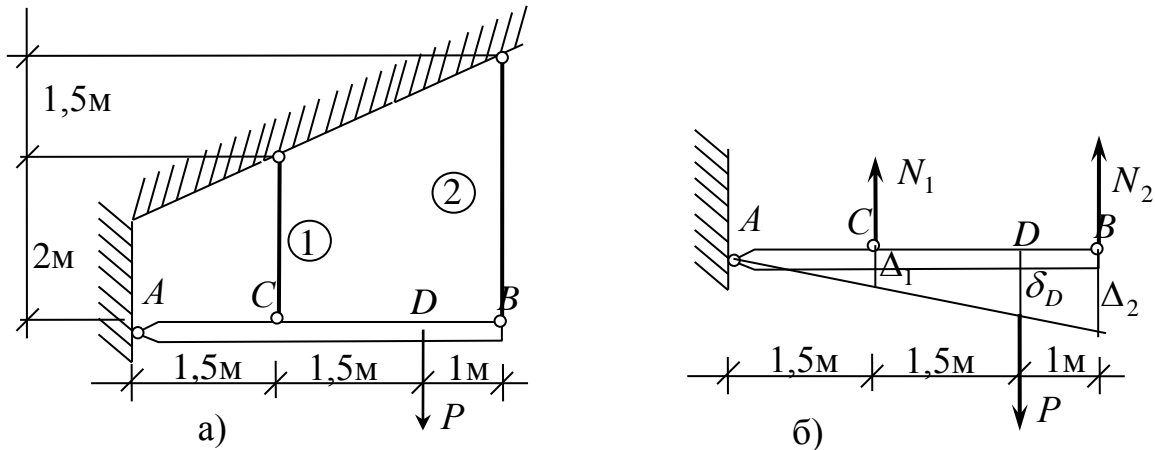


Рис. 2.13

Р о з в ' я з а н н я . Задача один раз статично невизначена. Запишемо суму моментів всіх сил, що діють на балку, відносно точки A :

$$\sum M_A = 1,5N_1 - 3P + 4N_2 = 0.$$

Умова сумісності деформацій впливає з подібності трикутників на рис. 2.13 б):

$$\frac{\Delta_1}{AC} = \frac{\Delta_2}{AB} \Rightarrow \frac{N_1 l_1}{EA \cdot AC} = \frac{N_2 l_2}{EA \cdot AB} \Rightarrow$$

$$\frac{2N_1}{1,5} = \frac{3,5N_2}{4} \Rightarrow N_1 = \frac{3,5 \cdot 1,5N_2}{4 \cdot 2} = 0,66N_2.$$

Підставляємо отримане співвідношення в рівняння рівноваги:

$$1,5 \cdot 0,66N_2 - 3P + 4N_2 = 0 \Rightarrow$$

$$N_2 = \frac{3P}{5} = 0,6 \cdot 20 = 12 \text{ кН}, \quad N_1 = 0,66 \cdot 12 = 7,9 \text{ кН}.$$

Реакція в'язі A направлена вертикально, оскільки в напрямку горизонтальної вісі навантаження немає. З суми проекцій всіх сил на вертикальну вісь маємо

$$R_A = -N_1 - N_2 + P = -7,9 - 12 + 20 = 0,1 \text{ кН}.$$

Необхідна площа поперечного перерізу стержнів 1, 2 (для сталі $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$) знаходиться з умови міцності

$$A_{нб} = \frac{N_{max}}{\sigma_{adm}} = \frac{12 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 0,75 \text{ см}^2.$$

Видовження стержнів

$$\Delta_1 = \frac{N_1 l_1}{EA} = \frac{7,9 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,75 \cdot 10^{-4}} = 10,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 1,05 \text{ мм},$$

$$\Delta_2 = \frac{N_2 l_2}{EA} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 3,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,75 \cdot 10^{-4}} = 28 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 2,8 \text{ мм}.$$

Переміщення точки D

$$\frac{\delta_D}{AD} = \frac{\Delta_2}{AB} \Rightarrow \delta_D = \frac{2,8 \cdot 3}{4} = 2,1 \text{ мм}.$$

2.10. При монтажу конструкції, що складається з трьох сталевих стержнів однакового поперечного перерізу (рис. 2.14 а)), виявилось, що середній стержень коротший, ніж потрібно, на величину $\delta = 0,5 \text{ мм}$. Визначити напруження в стержнях після монтажу.

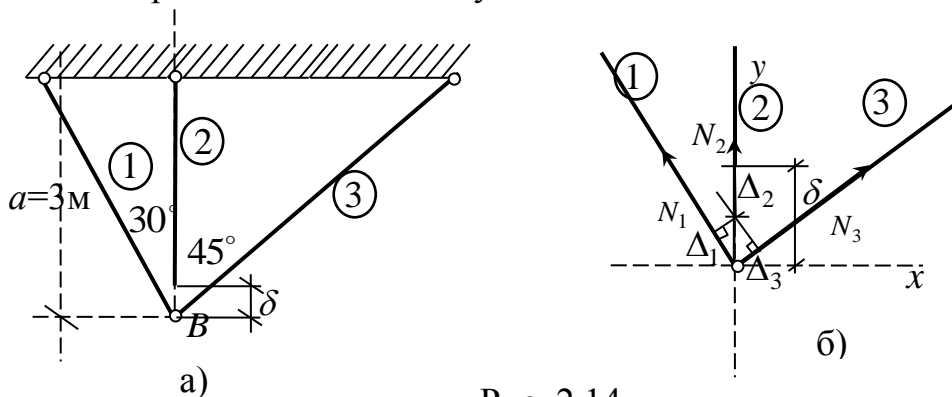


Рис. 2.14

Р о з в ' я з а н н я. Задача один раз статично невизначена. Запишемо рівняння рівноваги для точки В (рис. 2.14 б)):

$$\sum F_x = -N_1 \sin 30^\circ + N_3 \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{N_3 \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{N_3 \cdot \sqrt{2} \cdot 2}{2} = 1,414 N_3,$$

$$\sum F_y = N_1 \cos 30^\circ + N_2 + N_3 \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$N_2 = -N_1 \cos 30^\circ - N_3 \cos 45^\circ = -\left(\frac{1,414 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}\right) N_3 = -1,93 N_3.$$

Оскільки площі поперечних перерізів однакові, то

$$\sigma_1 = 1,414 \sigma_3, \quad \sigma_2 = -1,93 \sigma_3.$$

При монтажу стержень 2 видовжився, стержні 1, 3 скоротилися. Відкладаємо умовно величини $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ на рисунку та поводимо перпендикуляри до отриманих точок. Деформації стержнів повинні бути такими, щоб перпендикуляри перетнулися в одній точці. Умова сумісності деформацій з врахуванням знаку Δ_1, Δ_3 має вигляд

$$\delta = \Delta_2 - \frac{\Delta_1}{\cos 30^\circ} = \Delta_2 - \frac{\Delta_3}{\cos 45^\circ}.$$

Шукаємо напруження

$$\delta = \frac{\sigma_2 l_2}{E} - \frac{\sigma_1 l_1}{E \cos 30^\circ} = \frac{-1,93 \sigma_3 l_2}{E} - \frac{1,414 \sigma_3 l_1}{E \cos 30^\circ} = -(1,93 \cdot 3 + \frac{1,414 \cdot 3}{\cos^2 30^\circ}) \frac{\sigma_3}{E} = -11,45 \frac{\sigma_3}{E},$$

$$\sigma_3 = -\frac{\delta E}{11,45} = -\frac{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11}}{11,45} = -8,7 \text{ МПа},$$

$$\sigma_1 = -1,414 \cdot 8,7 = -12,3 \text{ МПа}, \sigma_2 = 1,93 \cdot 8,7 = 16,8 \text{ МПа}.$$