

6. Складний опір. Нецентральне розтягування (стискування) колон.

Теоретичні відомості. Складний опір – це комбінація простих напружених станів: розтягування (стискування), кручення, згинання в двох площинах. Розрахунки при складному опорі в лінійній теорії базуються на принципі суперпозицій: напруження і переміщення від суми сил, що їх викликають, є сумою напружень і переміщень від кожної сили окремо. При розв’язуванні задач на складний опір розрахунок ведеться в головній центральній системі координат поперечного перерізу стержня.

Якщо зовнішнє навантаження зводиться до поздовжньої сили N та згинальних моментів M_y , M_z , то має місце центральне розтягування (стискування) та згинання колони в двох площинах. Нормальні напруження при цьому визначаються як сума напружень від кожного внутрішнього зусилля:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z} \quad (6.1)$$

Позацентрове розтягування (стискування) колон, тобто коли рівнодійна прикладеного навантаження паралельна до осі колони і прикладена в точці, що не співпадає з центром ваги поперечного перерізу, є частинним випадком центрального розтягування (стискування) та згинання в двох площинах.

Якщо колона розтягується (стискується) силою P , прикладеною в точці (y_p, z_p) поперечного перерізу колони відносно центральної системи координат, то в перерізах колони виникають поздовжня сила $N = \pm P$ та згинальні моменти $M_y = \pm P z_p$, $M_z = \pm P y_p$. При цьому формула (6.1) перетворюється до вигляду

$$\sigma = \pm \frac{P}{A} \pm \frac{P z_p z}{I_y} \pm \frac{P y_p y}{I_z},$$

або

$$\sigma = \pm \frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_p z}{i_y^2} + \frac{y_p y}{i_z^2} \right). \quad (6.2)$$

Знак " \pm " відповідає розтягуванню або стискуванню відповідно.

З (6.2) видно, що в перерізі колони існує пряма, на якій нормальні напруження $\sigma = 0$. Ця пряма називається *нейтральною (нульовою) лінією*.

Рівняння нейтральної лінії будемо записувати в формі

$$\frac{y}{a_y} + \frac{z}{a_z} = 1, \quad (6.3)$$

де

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_P}, \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_P} \quad (6.4)$$

– відрізки, які нейтральна лінія відтинає на осях y, z відповідно.

Максимальні нормальні напруження в перерізі виникають в точках, найбільш віддалених від нейтральної лінії. Для крихких матеріалів (цегла, бетон, камінь) оцінка міцності в розтягнутій зоні перерізу має вигляд

$$\sigma_{\max}^+ \leq \sigma_{adm}^+, \quad (6.5)$$

а в стиснутій

$$\sigma_{\max}^- \leq \sigma_{adm}^-. \quad (6.6)$$

При врахуванні власної ваги колони максимальні стискуючі напруження σ_{\max}^- виникають в нижньому перерізі колони.

Враховуючи те, що для крихких матеріалів допустимі розтягуючі зусилля σ_{adm}^+ в кілька разів менші за допустимі стискуючі зусилля σ_{adm}^- , виникає необхідність максимально обмежити зону розтягу. З цією метою визначається ядро перерізу. *Ядро перерізу* – це область прикладання сили, від якої в перерізі виникають напруження одного знаку. Якщо сила прикладена в ядрі перерізу, нейтральна лінія проходить за межами перерізу.

Для побудови ядра перерізу проводяться всі можливі дотичні до перерізу, що не перетинають його. Припускаємо, що дотична є нейтральною лінією, і визначаємо відповідну їй точку прикладання сили. З'єднавши ці точки прямими, отримуємо ядро перерізу.

Задача 6.1. Визначити допустиме навантаження нецентрально стиснутої колони масивного профілю, побудувати ядро перерізу і еліпс інерції. Схема і розміри поперечного перерізу, точка прикладання сили, допустимі напруження приведені в дод. 6.

Порядок виконання роботи

1. Визначити положення головних центральних осей інерції і головних центральних моментів інерції.
2. Побудувати еліпс інерції.
3. Побудувати ядро перерізу.
4. Визначити положення нейтральної лінії і координати небезпечних точок у розтягнутій і стиснутій зонах перерізу.
5. Визначити допустиму силу з умов міцності при розтягуванні і стискуванні.
6. Обчислити напруження у небезпечних точках перерізу і побудувати епюри нормальних напружень.

Приклад. Колона вказаного на рис. 6.1 поперечного перерізу (розміри дані в дм) висотою $h = 5\text{ м}$ стискується силою P , прикладеною в заданій точці перерізу. Визначити допустиму стискуючу силу при $\sigma_{adm}^+ = 0,16\text{ МПа}$, $\sigma_{adm}^- = 1,5\text{ МПа}$. Густина матеріалу колони $\gamma = 18\text{ кН/м}^3$. Побудувати еліпс інерції, ядро перерізу, епюру нормальних напружень.

Розв'язок. Переріз має вертикальну вісь симетрії, яка буде головною центральною віссю. Друга головна центральна вісь проходить перпендикулярно до неї через центр ваги перерізу. Для визначення координати центру ваги перерізу розбиваємо його на три прямокутники і вводимо локальні системи координат y_i, z_i з початком в центрі ваги прямокутників.

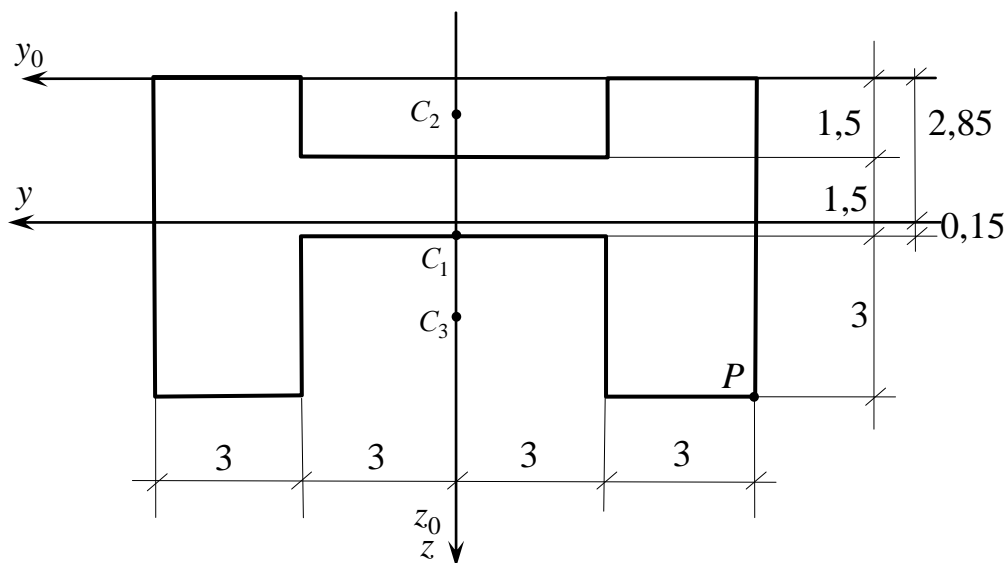


Рис. 6.1.

Знаходимо площі і осьові моменти інерції для кожного прямокутника (відцентрові моменти інерції дорівнюють нулеві):

$$A_1 = 12 \cdot 6 = 72 \text{ дм}^2, \quad A_2 = 6 \cdot 1,5 = 9 \text{ дм}^2, \quad A_3 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ дм}^2,$$

$$I_{y1} = \frac{12 \cdot 6^3}{12} = 216 \text{ дм}^4, \quad I_{y2} = \frac{6 \cdot 1,5^3}{12} = 1,69 \text{ дм}^4, \quad I_{y3} = \frac{6 \cdot 3^3}{12} = 13,5 \text{ дм}^4,$$

$$I_{z1} = \frac{6 \cdot 12^3}{12} = 864 \text{ дм}^4, \quad I_{z2} = \frac{1,5 \cdot 6^3}{12} = 27 \text{ дм}^4, \quad I_{z3} = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54 \text{ дм}^4.$$

Вводимо допоміжну систему координат y_0, z_0 , в якій просто визначаються координати z_{0i} центрів ваги локальних фігур (прямокутників):

$$z_{01} = 3 \text{ дм}, \quad z_{02} = 0,75 \text{ дм}, \quad z_{03} = 4,5 \text{ дм},$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 72 + 9 + 18 = 99 \text{ дм}^2.$$

Статичний момент інерції відносно осі y :

$$S_y = z_{01}A_1 + z_{02}A_2 + z_{03}A_3 = 3 \cdot 72 + 0,75 \cdot 9 + 4,5 \cdot 18 = 128,25 \text{ дм}^3;$$

Положення центру ваги на осі z_0

$$z_{0c} = S_y / A = 128,25 / 99 = 1,285 \text{ дм}.$$

Вводимо головні центральні осі y, z і знаходимо головні центральні моменти інерції і радіуси інерції. Визначивши координати c_{zi} центрів ваги i -тих прямокутників в центральних координатах y, z

$$c_{z1} = z_{01} - z_{0c} = 3 - 1,285 = 1,715 \text{ дм},$$

$$c_{z2} = z_{02} - z_{0c} = 0,75 - 1,285 = -0,535 \text{ дм},$$

$$c_{z3} = z_{03} - z_{0c} = 4,5 - 1,285 = 3,215 \text{ дм},$$

знаходимо головні моменти інерції

$$I_y = I_{y1} + c_{z1}^2 A_1 + I_{y2} + c_{z2}^2 A_2 + (I_{y3} + c_{z3}^2 A_3) =$$

$$= 216 + 1,715^2 \cdot 72 + 1,69 + (-0,535)^2 \cdot 9 + 13,5 + (3,215)^2 \cdot 18 =$$

$$= 216 + 21,62 - 1,69 - 39,69 - 13,5 - 49,005 \approx 113,74 \text{ дм}^4,$$

$$I_z = I_{z1} - I_{z2} - I_{z3} = 864 - 27 - 54 = 783 \text{ дм}^4.$$

Для радіусів інерції одержимо значення

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{113,74}{99} \approx 1,148 \text{ дм}^2, \quad i_y = 1,071 \text{ дм},$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{783}{99} = 7,9 \text{ дм}^2, \quad i_z = 2,811 \text{ дм}.$$

На рис. 6.2 будуємо еліпс інерції

$$\frac{y^2}{4,17^2} + \frac{z^2}{1,59^2} = 1.$$

Знаходимо координати $y_p = -6 \text{ дм}$, $z_p = 6 - 2,85 = 3,15 \text{ дм}$ точки прикладання сили в центральних координатах.

Знаходимо відрізки на осях, які відтинає нейтральна лінія

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{17,4}{-6} = 2,9 \text{ дм}, \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{2,53}{3,15} = -0,8 \text{ дм}.$$

Рівняння нейтральної лінії (6.3) в нашому випадку набирає вигляду

$$\frac{y}{2,9} - \frac{z}{0,8} = 1.$$

Проводимо на рис. 6.2 нейтральну лінію і визначаємо найбільш віддалені точки від неї: в розтягнутій зоні точка A з координатами $y_A = 6 \text{ дм}$, $z_A = -2,85 \text{ дм}$, в стиснутій зоні точка B з координатами $y_B = -6 \text{ дм}$, $z_B = 3,15 \text{ дм}$. Отже, максимальні розтягуючі напруження виникатимуть в точці A верхнього перерізу, максимальні стискуючі напруження з врахуванням власної ваги колони виникають в точці B нижнього перерізу колони.

Запишемо умову міцності на розтяг в точці A верхнього перерізу і знайдемо силу P :

$$\begin{aligned} -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_P z_A}{i_y^2} + \frac{y_P y_A}{i_z^2} \right) &= \sigma_{adm}^+, \\ -P \left(1 + \frac{3,15 \cdot (-2,85)}{2,53} + \frac{-6 \cdot 6}{17,4} \right) &= 160 \cdot 10^3 \cdot 45 \cdot 10^{-2}, \\ 4,62 P &= 72 \cdot 10^3, \quad P = 15,58 \cdot 10^3 \text{ Н} = 15,58 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Запишемо умову міцності на стиск в точці B нижнього перерізу і знайдемо силу P :

$$\begin{aligned} -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{z_P z_B}{i_y^2} + \frac{y_P y_B}{i_z^2} \right) - \gamma h &= -\sigma_{adm}^-, \\ P \left(1 + \frac{3,15 \cdot 3,15}{2,53} + \frac{6 \cdot 6}{17,4} \right) &= (1500 - 18 \cdot 5) \cdot 10^3 \cdot 45 \cdot 10^{-2}, \\ 6,99 P &= 634,5 \cdot 10^3, \quad P = 90,77 \cdot 10^3 \text{ Н} = 90,8 \text{ кН}. \end{aligned}$$

За допустиме значення сили приймаємо меншу з двох знайдених, тобто $P_{adm} = 15,58 \text{ кН}$.

Знаходимо напруження в точках A і B верхнього перерізу

$$\sigma_{A\phi} = -\frac{P_{adm}}{A} \left(1 + \frac{z_P z_A}{i_y^2} + \frac{y_P y_A}{i_z^2} \right) = \frac{15,58 \cdot 10^3}{45 \cdot 10^{-2}} \cdot 4,62 = 160 \text{ кПа},$$

$$\sigma_{B\phi} = -\frac{P_{adm}}{A} \left(1 + \frac{z_P z_B}{i_y^2} + \frac{y_P y_B}{i_z^2} \right) = -\frac{15,58 \cdot 10^3}{45 \cdot 10^{-2}} \cdot (6,99) = -242 \text{ кПа}.$$

В нижньому перерізі

$$\sigma_{Aн} = \sigma_{A\phi} - \gamma h = 160 - 90 = 70 \text{ кПа}$$

$$\sigma_{Bн} = \sigma_{B\phi} - \gamma h = -242 - 90 = -332 \text{ кПа}.$$

і будуємо епюру напружень на лінії, перпендикулярній до нейтральної лінії перерізу (рис. 4.2).

Для побудови ядра перерізу проводимо дотичні до його контуру і знаходимо відповідні координати вершин ядра перерізу за формулами

$$y_{я} = -\frac{i_z^2}{a_y}, \quad z_{я} = -\frac{i_y^2}{a_z},$$

де a_y , a_z – відрізки, які відтинає дотична на осях y , z (зі своїм знаком!).

Для заданого перерізу маємо:

– дотична I-I

$$a_y = \infty, \quad y_{я} = 0,$$

$$a_z = -2,85 \text{ дм}, \quad z_{я} = -\frac{2,53}{-2,85} = 0,888 \text{ дм};$$

– дотична II-II

$$a_y = -6 \text{ дм}, \quad y_{я} = -\frac{17,4}{-6} = 2,9 \text{ дм},$$

$$a_z = \infty, \quad z_{я} = 0;$$

– дотична III-III

$$a_y = \infty, \quad y_{я} = 0,$$

$$a_z = 3,15 \text{ дм}, \quad z_{я} = -\frac{2,53}{3,15} = -0,803 \text{ дм};$$

– дотична IV-IV (симетрична до II-II)

$$y_{я} = -2,9 \text{ дм}, \quad z_{я} = 0;$$

Наносимо вершини ядра перерізу на рисунок і будуємо ядро перерізу.

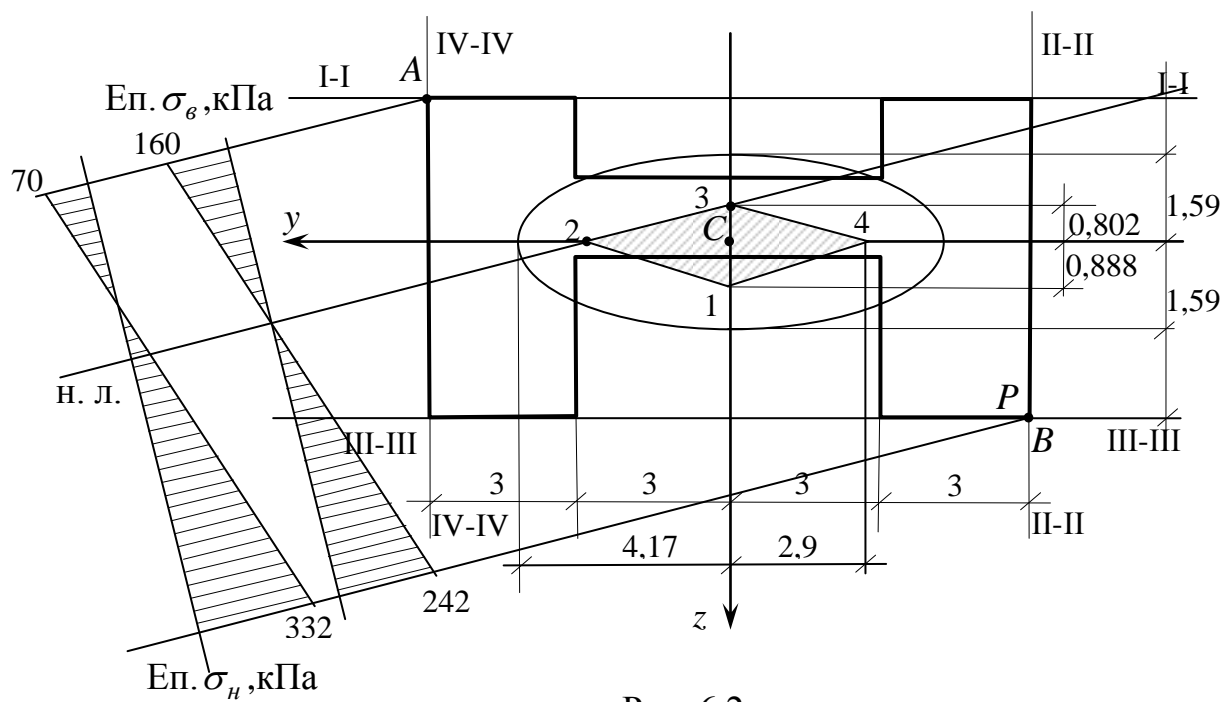


Рис. 6.2.