Модуль 1. КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ

Тема 1. Основи комбінаторики

§ 1. Проблеми комбінаторного аналізу та методи їх розв’язання.

Комбінаторика – це розділ математики, який вивчає питання вибору або розміщення елементів множини у відповідності з заданим правилом.

Комбінаторика походить від слова **combina**, що в перекладі **сполучати, з'єднувати**.

Методи розв’язування задач ***комбінаторики*** називають ***методами комбінаторного аналізу***.

Оскільки комбінаторика має справу із скінченними множинами, на природу об’єктів яких ніяких обмежень не накладають, то її часто називають ***теорією скінченних множин***.

Комбінаторика виникла у XVI столітті, коли у житті верхніх прошарків суспільства важливе місце займали азартні ігри (карти, кості, пасьянси, лотереї). Це стало рушійною силою у розвитку комбінаторики та теорії ймовірностей.

Ряд перших комбінаторних задач розв'язали такі відомі математики як Паскаль, Ферма, Ейлер, Бернуллі, Лейбніц.

Г.В. Лейбніц у 1666 році захистив дисертацію «Про комбінаторне мистецтво» і ввів термін «комбінаторика».

§ 2. Правила прямої суми та прямого добутку.

Правило суми. Якщо елемент ***a*** можна вибрати ***m*** способами, а елемент ***b*** можна вибрати ***k*** способами, то вибір «***a*** або ***b***» можна здійснити ***m+k*** способами.

Приклад 1. В ящику знаходиться 7 білих і 4 чорних кульки. Скількома способами можна вибрати одну кульку?

Відповідь. 7 + 4 = 11 способами.

Приклад 2. На полиці стоять 12 різних підручників з алгебри, 6 – з геометрії та 8 з фізики. Скількома способами можна здійснити вибір одного підручника з математики?

Відповідь. 12+6=18 способами.

Правило добутку. Якщо елемент ***a*** можна вибрати ***m*** способами і після кожного такого вибору елемент ***b*** можна вибрати ***k*** способами, то вибір «***a*** і ***b***» в указаному порядку, тобто вибір упорядкованої пари (***a***; ***b***), можна зробити ***m·k*** способами.

Приклад 3. З міста А до міста В ведуть 4 дороги, а з міста В до С ведуть 3 дороги. Скількома способами можна проїхати з міста А до міста С ?
Відповідь. $4 \cdot 3 = 12$.

Приклад 4. У шкільній їдальні є вибір з 3 перших і 5 других блюд. Тоді обід з першого і другого блюда можна обрати $3 \cdot 5 = 15$ способами.

Приклад 5. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 1; 2; 3; 4; 5, якщо в числі: 1) цифри не повторюються; 2) цифри повторюються.

Розв'язання.

1) Маємо 5 способів для сотень числа. Після того, як місце сотень заповнене (наприклад, цифрою 1), для десятків залишається 4 способи. Міркуючи далі, для одиниць - 3 способи. Отже, маємо: «5 способів, і після кожного з них — 4, і після кожного з них — 3 способи». За правилом добутку маємо $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ чисел.

2) Якщо цифри у числі повторюються, то на кожне з трьох місць є по 5 варіантів заповнення, і тоді всіх чисел буде $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Приклад 6. Скільки парних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 6; 7; 8; 9, якщо в числі цифри не повторюються?

Розв'язання.

Парне чотирицифрове число можна отримати, якщо останньою цифрою буде 6 або 8.

Чисел, у яких остання цифра 6 буде $3!=3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, чисел, у яких остання цифра 8 буде також 6.

За правилом суми всього парних чисел, що задовольняють умові, буде $6 + 6 = 12$.

Вибір правила

або A, або B → **Правило суми**

А – m способами

В – n способами

жоден зі способів вибору А не збігається з якимось способом вибору В

↓

«або А, або В» – $m+n$ способами

і A, і B → **Правило добутку**

А – m способами

В – n способами

↓

«А і В» – mn способами

Комбінаторні схеми

- **РОЗМІЩЕННЯ**

Розміщення без повторення.

Розміщення з повторенням.

- **ПЕРЕСТАНОВКИ**

Перестановки без повторення.

Перестановки з повторенням.

- **КОМБІНАЦІЇ**

Комбінації без повторення.

Комбінації з повторенням.

§ 3. Розміщення без повторення. Розміщення з повторенням.

Нехай маємо n предметів різного виду $X=\{x_1,x_2,\dots x_n\}$. Розглянемо розміщення з n по m такі, що вважаються відмінними одне від іншого, якщо вони відрізняються видом елементів, що в них входять, або порядком їх розміщення. Такі набори мають назву ***розміщення без повторень.***

Приклад 7. Утворити всі послідовності наборів із множини $X=\{1,2,3\}$ по два елементи:

$\{1,2\}$	$\{1,3\}$
$\{2,1\}$	$\{3,1\}$
$\{2,3\}$	$\{3,2\}$

Поставимо задачу знайти кількість розміщень без повторень із *n* по *m*. Позначається A_n^m. Читається "розміщення з *n* по *m*".

Утворюючи такі набори на перше місце можна поставити довільний із *n*-предметів, на друге – лише довільний із (*n*-1)-предметів і т.д. На *m*-місце – довільний із (*n*-*m*+1)-предметів. За правилом прямого добутку отримаємо:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$(0! = 1; \quad n! = 1,2,\ldots,n)$$

Приклад 8. У спортивному турнірі з шахів беруть участь десять учасників. Скількома способами можна розподілити призові місця (I, II, III) у змаганнях?

Розв'язання. Вважаючи, що всі учасники можуть зайняти призові місця однаково, отримаємо

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Приклад 9. Нехай студенту необхідно скласти чотири екзамени протягом десяти днів. Скількома способами можна це зробити?

$$A_{10}^{4} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 5040$$

Нехай маємо n предметів різного виду $X=\{x_1,x_2,\dots x_n\}$, з яких складають набори довжиною m ($m<n$).

Наприклад, x_1,x_2, x_3; x_1,x_1, x_3; x_1,x_3, x_3 і т.д.

Такі набори називають ***розміщенням з повторенням*** із n по m.

Поставимо задачу знаходження числа всіх можливих наборів із n по m (позначаються $V(n,m)$ вважаючи *різними* ті, які відмінні один від одного або видом предметів, що в них входять, або порядком їх розміщення).

Характеристичні ознаки розміщень з повтореннями:

1) елементи можуть бути однаковими;
2) порядок елементів важливий.

Для розв’язання задачі розглянемо множини

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_m = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Розміщення з повторенням складуть множину

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$$

Тоді за правилом прямого добутку:

$$|X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m| = n \cdot n \cdot n \cdot \cdots n = n^m$$

Тобто число всіх розміщень з повторенням із n по m обчислюється за формулою

$$\boxed{\mathrm{V}(n,m) = n^m}$$

Якщо ж $|A_1| = n_1;\quad |A_2| = n_2 \ldots,\quad |A_m| = n_m,$

$$\boxed{\mathrm{V}(n,m) = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m}$$

Приклад 10. Знайти загальну кількість всіх натуральних чотиризначних чисел.

Розв'язання. Введемо множини

$A_1 = \{1,2,\ldots,9\}$ $\quad A_2 = A_3 = A_4 = \{0,1,2,\ldots,9\};$

$|A_1| = 9$ $\quad |A_2| = |A_3| = |A_4| = 10.$

Чотиризначні числа утворять прямий добуток

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$$

в заданому порядку. За правилом прямого добутку

$$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4| = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000.$$

Приклад 11. Скількома способами можна розфарбувати 6 дошок в 4 кольори?

Розв'язання.

$$V(6;4) = 6^4.$$

Приклад 12. Дано цифри 1;2;3;4. Скільки різних двозначних чисел можна скласти, якщо цифри в числі можуть повторюватися?

Розв'язання:

Так як цифри в числі можуть повторюватися, потрібно використовувати формулу числа розміщень з повтореннями з n елементів по k, де n=4 (множина всіх елементів), k=2 (тому що потрібно скласти двозначні числа)

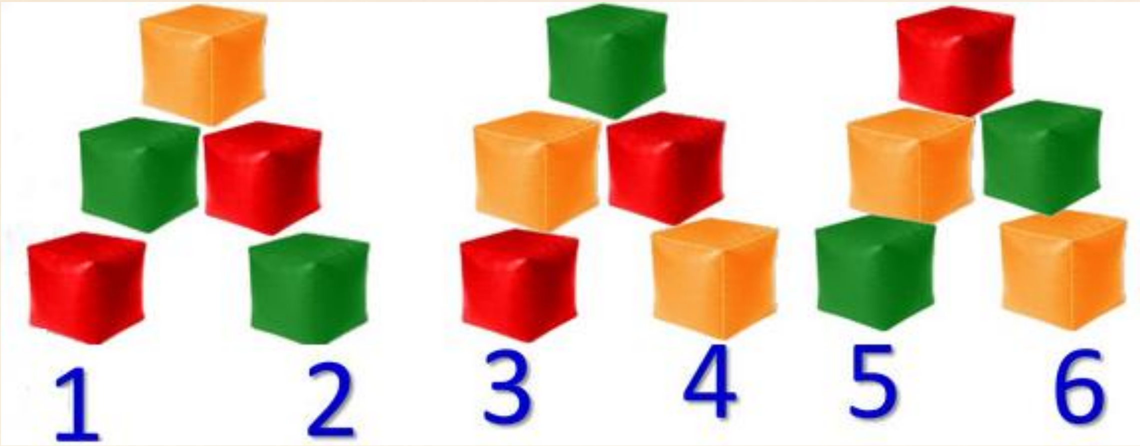
$$V(4,2)=4^2 = 16.$$

§ 4. Перестановки з повторенням і без повторення.

Нехай множина $X=\{x_1,x_2,\ldots x_n\}$ містить n предметів різного виду.

Розглянемо розміщення з n елементів по n, що відмінні одне від другого лише *порядком* елементів, що в них входять. Такі розміщення називають ***перестановками***, їх число позначають P_n:

$$\boxed{P_n = A_n^n = n!}$$



Скількома різними способами можна розставити 3 рінокольорових кубики?

Перестановкою з повтореннями з n елементів називають будь-яке впорядкування n-множини, серед елементів якої є однакові. Якщо серед елементів множини M є n_1 елементів першого типу, n_2 елементів другого типу, n_k елементів k-го типу $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, то кількість всіх перестановок такої множини з повтореннями позначують $\overline{P_n}(n_1, n_2, \ldots, n_k)$:

$$\boxed{\overline{P}_n(n_1, n_2, \ldots n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}}$$

Приклад 13. Маючи шість олівців різного кольору, малюк малює веселку з шести кольорів. Скільки різних веселок він може намалювати?

Розв'язання: Число веселок – це число перестановок із шести по шість, тому малюк може намалювати
$P_6 = 6!$ веселок.

Приклад 14. Скільки перестановок можна зробити з літер слова "Міссісіпі"?

Розв'язання. Оскільки літера "м" входить до слова 1 раз, літера "і" – 4 рази, "с" – 3 рази, "п" – 1 раз, а всіх літер у слові 9, то

$$\overline{P_9}(1,4,3,1) = \frac{9!}{1!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 1!} = 2520.$$

§ 5. Комбінації з повторенням і без повторення.

Розглянемо набори з *n* різних елементів по *m* (*m*<*n*) в яких нас цікавить склад набору, і не цікавить порядок елементів у наборі. Такі розміщення називають ***комбінаціями***.

Тобто комбінаціями з *n* різних елементів по *m* називають всі можливі розстановки довжини *m*, утворені з цих елементів і відмінні одна від другої *складом*, але не порядком елементів.

Загальне число комбінацій позначають $C_n^m = \binom{n}{m}$ і читають «число комбінацій із *n* по *m* ».

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^{n-m}}$$

Приклад 15. Студент хоче гарантовано вгадати п'ять номерів лотереї "5 із 36". Скільки білетів він повинен купити?

Розв'язання. Очевидно, що мова йде про число комбінацій 5 із 36, а саме:

$$C_{36}^{5} = \frac{36!}{31!5!} = 376992$$

Приклад 16. У кошику лежать 8 різних яблук і 4 різні груші. Треба вибрати 3 яблука і 2 груші. Скількома способами це можна зробити?

$$C_8^3 \cdot C_4^2 = \frac{8!}{3!\,5!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$$

Нехай маємо множину з *n*-предметів різного виду. Число елементів кожного виду необмежене. Поставимо задачу визначити кількість наборів довжиною *m*, які не залежать від порядку. Такі набори називають ***комбінаціями з повторенням***, кількість яких визначають так:

$$\boxed{\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^m.}$$

Приклад 17. Скількома способами четверо дітей можуть поділити між собою 80 цукерок?

Розв'язання. Поставимо у відповідність кожному розподілу цукерок комбінації з повторенням. Нехай типами елементів будуть діти – x_1, x_2, x_3, x_4, тобто $n = 4$, для яких треба скласти всі комбінації довжиною m=80 Належність у наборі будь-якого елемента відповідає належності даної цукерки відповідній дитині x_i причому порядок в такому наборі не має значення, все одно яка з цукерок дістанеться тій чи іншій дитині. За таких умов, число способів розподілу цукерок між дітьми

$$\overline{C_{80}^{4}} = C_{4+80-1}^{80} = \frac{83!}{3!80!} = 9188.$$

Приклад 18. Скількома способами можна розмістити *m*-прибулих гостей серед *n*-гостей, що вже сидять за круглим столом?

Розв'язання. Очевидно, що між *n*-гостями, які сидять за столом, існують *m*-проміжків, у яких можна розмістити *m*-прибулих гостей. Це можна зробити

$$\overline{C}_{n+m-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-m)!}$$

Приклад 19. У кондитерський відділ завезли 4 види тістечок. Скількома способами можна купити 7 тістечок?

$$\overline{C_4^7} = C_{7+4-1}^{7} = C_{10}^{7} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$$

Чи повторюються елементи у вибірці?

- **Так** → **Чи враховується порядок розміщення елементів?**
  - **Так** → **Чи всі елементи входять у вибірку?**
    - **Так** → **Перестановки з повтореннями**

      $P_n(m_1, m_2, \dots, m_n) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_n!}$
    - **Ні** → **Розміщення з повтореннями**

      $\overline{A}_n^k = n^k$
  - **Ні** → **Комбінації з повтореннями**

    $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$
- **Ні** → **Чи враховується порядок розміщення елементів?**
  - **Так** → **Чи всі елементи входять у вибірку?**
    - **Так** → **Перестановки**

      $P_n = n!$
    - **Ні** → **Розміщення**

      $A_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$
  - **Ні** → **Комбінації**

    $C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!m!}$

§ 6. Впорядковані та невпорядковані розбиття множин.

Розглянемо деяку множину A, потужність якої $|A|=n$. Підрахуємо число розбиттів даної множини на m різних підмножин, таких що

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = A; \quad A_j \cap A_i = \emptyset, i \neq j$$

$$|A_i| = n_i, \quad \sum_{i=1}^{m} n_i = n.$$

Розглянемо послідовність підмножин $A_1, A_2, \ldots, A_m$ як впорядковану. Тоді на перше місце підмножину A_1 можна вибрати $C_n^{n_i}$ способами, на друге місце множину A_2 – $C_{n-n_1}^{n_i}$, на останнє місце A_m можна вибрати із залишку $C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{m-1}}^{n_m}$ способами.

За правилом прямого добутку число розбиттів множини A на m-підмножин дорівнює:

$$C_n^{n_i} C_{n-n_1}^{n_i} \dots C_{n-n_1-n_2-\dots-n_{m-1}}^{n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!},$$

що співпадає з числом перестановок із повторенням.

Приклад 20. В групі з 30 студентів обирають делегата на конференцію. "За" дану кандидатуру проголосувало 20 студентів, "проти" – 6, "утрималося" – 4. Скількома способами могло бути проведено таке голосування?

Розв'язання. Розглянемо множини: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A.$

$$A = \left\{ x \middle| \text{x - студент, x} \in \overline{1,30} \right\};$$

$$A_1 = \left\{ x \middle| \text{x - студент, що голосує "за", x} \in \overline{1,20} \right\};$$

$$A_2 = \left\{ x \middle| \text{x - студент, що голосує "проти", x} \in \overline{1,6} \right\};$$

$$A_3 = \left\{ x \middle| \text{x - студент, що "утримався", x} \in \overline{1,4} \right\};$$

$$C_{30}^{20} C_{10}^{6} C_4^4 = \frac{30!}{20!\ 6!\ 4!}.$$

$$|A_1| = 20; \quad |A_2| = 6; \quad |A_3| = 4.$$

Домашня робота

1. Скільки елементів має містити множина, щоб число всіх перестановок з них було: а) не більш як 1000; б) не менш як 500?
2. Скількома способами можна скласти список з 9 учнів?
3. У пасажирському поїзді 14 вагонів. Скількома способами можна розподілити по цих вагонах 14 провідників, якщо за кожним вагоном закріплювати одного провідника?
4. З цифр 0, 1, 2, 3 складені різні чотирицифрові числа так, що в кожному немає однакових цифр. Скільки вийшло чисел?
5. З цифр 1, 2, 3, 4, 5, не повторюючи їх, склали всі можливі п'ятицифрові числа. З'ясуйте, скільки серед цих чисел таких, які: а) починаються цифрою 5; б) не починаються цифрою 5; в) починаються з 54; г) не починаються з 543.