Практична робота № 4
.
«Елементи математичної логіки»

Тема: ***Складання таблиць істинності. Рівнозначні перетворення. Спрощення формул логіки. Приведення формул до нормальних форм, досконалих нормальних форм за таблицями істинності.***

Мета роботи:знати основні поняття алгебри висловлювань, закони алгебри Буля, вміти складати таблиці істинності для висловлювань, перетворювати формули за допомогою рівнозначних перетворень. Знати, що таке ДНФ і КНФ, вміти приводити формули алгебри логіки до ДДНФ і ДКНФ і мінімізувати їх за допомогою законів алгебри логіки.

1.1. ***Висловлювання і операції над ними***

Математична логіка – це розділ математики, призначений аналізу методів розмірковувань, при цьому в першу чергу досліджуються форми розмірковувань, а не їхній зміст, тобто досліджується формалізація розмірковувань? Це різновид формальної логіки, тобто науки, що вивчає умовиводи з точки зору їх формальної будови.

Основне поняття математичної логіки – це ***висловлювання***. Під ***висловлюванням*** розуміють речення, яке може мати тільки два значення «істина» або «брехня». Позначаються висловлювання малими або великими латинськими літерами: a, b, ,…,x,…. A, B, C…

В математичній логіці не розглядається сенс висловлювань, визначається тільки їх логічне значення – «істина» або «брехня». Визначному німецькому математику і логіку Ернесту Шредеру спало на думку запропонувати в якості знаку для позначення пришло в голову предложить в качестве знака для обозначения хибного висловлювання цифру 0, що, звісно, привело до позначення істини цифрою 1.

Обчислення висловлювань – вступний розділ математичної логіки, в якому розглядаються логічні операції над висловлюваннями.

Теорія булевих алгебр (булевих функцій) покладена в основу точних методів аналізу і синтезу в теорії схем перемикання при проектуванні комп`ютерних систем.

Основні логічні операції над висловлюваннями.

Унарні

Константа нуля

Логічні операції можна задавати за допомогою таблиць істинності, що показують відповідність значень істинності висловлювань.

x	F(x)
0	0
1	0

Константа одиниці

x	F(x)
0	1
1	1

Повторення x

x	F(x)

0	0
1	1

Логічним запереченням висловлювання *x* называетсяназивається висловлювання, яке є істинним тоді і тільки тоді, коли висловлювання *x* є хибним. Заперечення позначається $\overline{x}$ або $\neg x$ (читається: «не *x*»).

x	$\overline{x}$
1	0
0	1

Бінарні

Константа нуля

x	y	$F(x,y)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	0

*Кон`юнкцією* двох висловлювань *x* і *y* називається висловлювання,і, яке є істинним тоді і тільки тоді, коли істинними є обидва висловлювання *x* і *y*. Кон`юнкціяпозначається: $x \wedge y$, або x & y (читається: «*x* **і** *y*»). Таблиця істинності для $x \wedge y$ має вигляд:

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Заборона по y: $f(x, y) = x\Delta y$ або $x \wedge \overline{y}$

x	y	$f(x,y)$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Змінна x: f(x,y)=x

x	y	$f(x,y)$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Заборона по x: $f(x, y) = y\Delta x$ або $y \wedge \overline{x}$

x	*y*	*f(x,y)*
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

Змінна y: f(x,y)=y

x	*y*	*f(x,y)*
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

*Диз`юнкцією двох висловлювань x* і *y* називається висловлювання, хибне тоді і тільки тоді, коли обидва висловлювання *x* і *y* хибні. Диз`юнкція позначається $x \vee y$ (або *x*+*y*) (читається: «*x* **або** *y*»). Таблиця істинності для $x \vee y$ має вигляд:

x	*y*	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

*Сума за модулем 2 (*альтернативною диз`юнкцією, логічною сумою, виключаючим «АБО», строгою диз`юнкцією) двох висловлювань *x* і *y* називається висловлювання, що є істинним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлювання *x* і *y приймають різні значення*. Диз`юнкція позначається $x \oplus y$ (читається: «або *x,* або *y*»). Таблиця істинності для для $x \oplus y$ має вигляд заперечення еквівалентності, виключаючи «АБО»

$f(x, y) = x \oplus y$ або $(\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})$

x	*y*	*f(x,y)*
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Стрілка Пірса – це заперечення диз`юнкції. Стрілка Пірса позначається X ↓ Y. Читається «ані X, ані Y».

Введена до розгляду Чарльзом Пірс м(Charles Peirce) в 1880—1881 р.р. Таблиця істинності для стрілки Пірса має вигляд: $f(x, y) = x \downarrow y$ або $\overline{x \vee y}$ або $\overline{x} \wedge \overline{y}$

x	*y*	*f(x,y)*
1	1	0
1	0	0

0	1	0
0	0	1

Заперечення x: $f(x, y) = \overline{y}$

x	*y*	*f(x,y)*
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Імплікацією двох висловлювань *x* і *y* називається висловлювання, хибне тоді і тільки тоді, коли висловлювання *x* є істиною, а *y* – хибне.Імплікація позначається: $x \to y$ (читається: «*x* тягне за собою *y*» або «з *x* слідує *y*»). Права імплікація: $f(x, y) = x \vee \overline{y}$ або $y \to x$:

x	*y*	*f(x,y)*
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Ліва імплікація: $f(x, y) = \overline{x} \vee y$ або $x \to y$

x	*y*	*f(x,y)*
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Еквіваленцією (еквівалентністю) двох висловлювань *x* і *y* називається висловлювання, що є істинним тоді і тільки тоді, коли істинності висловлювань співпадають. Еквіваленція позначається: $x \leftrightarrow y$, або $x \sim y$, або $(\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge y)$, або $\overline{x \oplus y}$ (читається: «*x* еквівалентний *y*» або «*x* тоді і тільки тоді, коли *y*»). Таблиця істинності для $x \leftrightarrow y$ має вигляд:

x	*y*	$x \leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Заперечення y: $f(x, y) = \overline{x}$

x	*y*	*f(x,y)*
1	1	0
1	0	0
0	1	1

0	0	1

Штрих Шеффера – це заперечення кон`юнкції.
Введений до розгляду Генрі Шеффером в 1913 р. Штрих Шеффера позначається x|y або або $\overline{x \wedge y}$ або $\overline{x} \vee \overline{y}$, задається наступною таблицею істинності:

x	*y*	x|y
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Заперечення x: $f(x, y) = \overline{y}$

x	*y*	*f(x,y)*
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Константа одиниці

x	*y*	*F(x,y)*
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

1.2. ***Алгебра Буля.***

Множина висловлювань з введенними для них логічними операціями диз`юнкції, кон`юнкції і заперечення називається алгеброю Буля. Алгебра Буля— історично перший розділ математичної логіки, розроблений ірландським логіком і математиком Дж. Булем (George Boole (1815—1864. Буль застосував алгебраїчні методи для вирішення логічних задач і сформулював на мові алгебри деякі фундаментальні закони мислення.

Закони алгебри Буля.

Комутативні закони:

1. $x \wedge y \equiv y \wedge x$;
2. $x \vee y \equiv y \vee x$;

Асоціативні закони:

1. $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$;
2. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$;

Дистрибутивні закони:

1. $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
2. $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;

Ідемпотентні закони:

1. $x \wedge x \equiv x$;
2. $x \vee x \ \equiv x$;

Закони логічної суми і добутку 0 і 1:

1. $x \wedge 0 \equiv 0$;
2. $x \vee 0 \equiv x$;
3. $x \wedge 1 \equiv x$;
4. $x \vee 1 \equiv 1$;

Закони операції «заперечення»:

1. $\overline{\overline{x}} \ \equiv x$;
2. $x \vee 0 \equiv x$;
3. $x \vee 1 \equiv 1$;
4. $\overline{x} \wedge x \equiv 0$;
5. $\overline{x} \vee x \equiv 1$;

Закони Де Моргана (Augustus de Morgan (1806- 1871) — шотландський математик і логік; професор математики в Університетському коледжі Лондона):

1. $\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$;
2. $\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$.

<u>*Приклад 1*</u>. Скласти таблицю істинності для функції $(A \wedge B \leftrightarrow B \wedge C) \vee (\overline{C} \to A)$.

Таблиця істинності має три змінні A,B і C. Отже наборів можливих змінних буде $2^3 = 8$ і запишемо їх у перші три стовпчики, в наступних – проміжні функції, а в останньому – значення функції.

Проміжні функції:

$f1 = A \wedge B;$

$f2 = B \wedge C;$

$f3 = A \wedge B \leftrightarrow B \wedge C;$

$f4 = \overline{C};$

$f5 = \overline{C} \to A;$

$f6 = (A \wedge B \leftrightarrow B \wedge C) \vee (\overline{C} \to A)$

A	B	C	f1	f2	f3	f4	f5	f6
1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1	0	1

Алгоритм складання таблиці істинності.

1. Визначити кількість логічних змінних n;
2. Визначити кількість рядків $m = 2^n$;
3. Кількість стовпчиків дорівнює кількості логічних змінних додати кількість логічних операцій.

Порядок виконання логічних операцій

1. Інверсія (заперечення);
2. Кон`юнкція (множення);
3. Диз`юнкція (додавання);
4. Імплікація;
5. Еквіваленція;
6. Для стрілки Пірса і штриха Шеффера пріоритет не визначений.

1.3. Формули алгебри логіки

Формулами алгебри логіки називаються вирази, що отримані зі змінних $x, y, \ldots$ за допомогою застосування логічних операцій: заперечення, кон`юнкції, диз`юнкції, імплікації і еквіваленції, а також самі змінні, що приймають значення істинності висловлювань $x, y, \ldots$.

Якщо в формулу алгебри логіки замість змінних x, $y, \ldots$ підставити конкретні висловлювання, то отримаємо висловлювання, що має логічне значення «1» або «0».

Приклад 2.

Висловлювання x: «Дніпро впадає в Чорне море» – істинне ($x = 1$),

висловлювання y: «Число 16 кратнократне 3» – хибне ($y = 0$),

тоді формула $A = x \vee y$ буде мати логічне значення «1»: $A = 1$ (див. таблицю істинності для $x \vee y$).

На основі таблиць істинності основних логічних операцій можна скласти таблиці істинності для будь-яких формул алгебри логіки.

Дві формули алгебри логіки називаються *рівнозначними* або *еквівалентними,* якщо вони приймають однакові логічні значення на будь-якому наборі значень, що входять до формул змінних (елементарних висловлювань). Рівнозначність формул будемо позначати знаком «≡».

Рівнозначність логічних формул можна встановити за допомогою їх таблиць істинності.

Приклад3 За допомогою таблиць істинності перевірити, чи є рівнозначними формули $x \to (\bar{x} \wedge \bar{y})$ і $\bar{x} \vee \overline{x \vee y}$.

Рішення. Таблиці істинності для кожної з формул A і B.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$	$x \to (\bar{x} \wedge \bar{y})$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1

x	y	$\overline{x}$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x} \vee \overline{x \vee y}$
1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1

Відповідь: дані формули є рівнозначними.

Інший спосіб доведення рівнозначності логічних формул – їх спрощення за допомогою *рівнозначних перетворень*.

2. Виразимо одні логічні операції через інші:

1) $x \to y \equiv \overline{x} \vee y$; 2) $\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$;

3) $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$; 4) $\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$;

5) $x \leftarrow y = x \vee \overline{y}'$; 6) $x \mid y = \overline{x} \vee \overline{y}$;

7) $x \downarrow y = \overline{x} \wedge \overline{y}$; 7) $x \oplus y = x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge y$;

8) $x \approx y = x \wedge y \vee \overline{x} \wedge \overline{y}$

Для спрощення запису формул прийнятий ряд угод. Дужки Для упрощения записи формул принят ряд соглашений. Дужки можна опускати, тримаючись наступного порядку дій: спочатку виконуємо дії в дужках, потім заперечення, потім виконується кон`юнкція. Якщо над формулою стоїть знак заперечення, то дужки теж опускаються.

<u>*Приклад 4.*</u> Спростити логічну формулу: $\overline{x} \wedge \overline{y} \to x \vee (x \wedge y)$.

<u>Рішення</u>. Застосуємо основні рівнозначності.

$$\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \vee \left(x \vee (y \wedge x)\right) \equiv$$
$$\equiv \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \vee x \equiv \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} \vee x \equiv$$
$$\equiv x \vee y \vee x \equiv x \vee x \vee y \equiv x \vee y.$$

Відповідь: $x \vee y$.

<u>*Приклад5.*</u> Спростити логічну формулу

$$((x \downarrow y) \mid z) \to (x \to z) = ((\overline{x} \wedge \overline{y}) \mid z) \to (\overline{x} \vee z) = ((\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}) \vee \overline{z}) \to (\overline{x} \vee z) =$$
$$= \overline{\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \vee \overline{z}} \vee \overline{x} \vee z = \overline{x \wedge y \vee z} \vee \overline{x} \vee z = \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \vee \overline{x} \vee z = \overline{x} \vee z(1 \vee \overline{y} \wedge \overline{x}) = \overline{x} \vee z$$

Відповідь: $\overline{x} \vee z$

<u>*Приклад 6.*</u> Чи є еквівалентними наступні висловлювання:

$x \wedge \left(y \mid z\right)$ *и* $\left(x \wedge y\right)\left(x \wedge z\right)$

<u>Рішення</u>.

Складемо таблицю істинності для кожного висловлювання.

x	y	z	y|z	$x \wedge \left(y \mid z\right)$	$x \wedge y$	$x \wedge z$	$\left(x \wedge y\right)\left(x \wedge z\right)$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0

0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0

Значення x і y в п`ятому і восьмому стовпчиках не співпадають.
Висновок: дані висловлювання не є еквівалентними

ТОТОЖНО-ІСТИННІ І ТОТОЖНО-ХИБНІ ФОРМУЛИ

Визначення. Формула називається тотожно-істинною (тавто-логією), якщо для будь-яких наборів змінних вона набуває значення І.

Визначення. Формула називається тотожно-хибною, якщо для будь-яких наборів змінних вона набуває значення Х.

В алгебрі висловлювань застосовують дві **нормальні форми**: диз`юнктивну і кон`активну нормальні форми (ДНФ і КНФ).

Диз`юнктивною нормальною формулою (ДНФ) формули називається диз`юнкція простих кон`юнкцій.

Кон`юнктивною нормальною формрю (КНФ)  формули є формула, рівнозначна початковій формулі логіки висловлювань і записана у вигляді кон`юнкції елементарних диз`юнкцій змінних.

Кожна формула, що тотожно не рівна Хибі, може бути приведена до ДДНФ, яка є єдиною з точністю до перестановки диз`юнктивних членів.

Кожна формула, що тотожно не дорівнює Істині, може бути приведена до ДКНФ, яка є єдиною з точністю до перестановки кон`юнктивних членів.

Досконала диз`юнктивна нормальна форма формули (ДДНФ) це рівнозначна до неї формула, що представляє собою диз`юнкцію елементарних кон`юнкцій, що має наступні властивості:

1. Кожний логічний доданок формули містить всі висловлювання, що входять до формули.
2. Всі логічні доданки формули різні.
3. Жоден логічний доданок формули не містить висловлювання і його заперечення.
4. Жоден логічний доданок формули не містить одне й те саме висловлювання двічі.

<u>Алгоритм отримання ДКНФ за таблицею істинності</u>:

1)Відзначити ті рядки, в останньому стовпчику яких стоять 0:

2)Виписати для кожного відзначеного рядка диз`юнкцію всіх змінних наступним чином: якщо значення деякої змінної в даному рядку =0, то в диз`юнкцію включають саму цю змінну, якщо =1, то її заперечення:

3)Всі отримані диз`юнкції зв`язати в кон`юнкцію.

<u>Алгоритм отримання ДДНФ за таблицею істинності</u>:

1)Відзначити ті рядки, в останньому стовпчику яких стоять 1:

2)Виписати для кожного відзначеного рядка кон`юнкцію всіх змінних наступним чином: якщо значення деякої змінної в даному рядку =1, то в кон`юнкцію включають саму цю змінну, якщо =0, то її заперечення:

3)Всі отримані кон`юнкції зв`язати в диз`юнкцію.

<u>*Приклад 7.*</u> Побудувати таблицю істинності для вислолювання: $\left(x \;\middle|\; \bar{y}\right) \to \left(y \oplus z\right)$, побудувати ДДНФ, ДКНФ, знайти мінімальну ДНФ.

<u>Рішення.</u>

Будуємо таблицю істинності – таблицю, за допомогою якої встановлюється істинне значення складного висловлювання при даних значеннях простих висловлювань, що в нього входять.

x	y	z	$\overline{y}$	$x \mid \overline{y}$	$y \oplus z$	
1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0

За таблицею складаємо диз`юнктивну нормальну форму (ДНФ). ДНФ в булевій логіці — нормальна форма, в якій булева формула має вигляд диз`юнкції декількох кон`юнктів.
Алгоритм отримання ДДНФ за таблицею істинності:
1)Відзначаємо ті рядки, в останньому стовпчику яких стоять 1:
2)Виписати для кожного відзначеного рядка кон`юнкцію всіх змінних наступним чином: якщо значення деякої змінної в даному рядку =1, то в кон`юнкцію включають саму цю змінну , якщо =0, то її заперечення:
3)Всі отримані кон`юнкції зв`язати в диз`юнкцію:
Вибираємо в таблиці рядки, в яких булева функція приймає значення 1. В даному випадку – це 2-ий, 3-ій, 4-ий, 6-ий і 7-ий рядки.
Для кожного рядка складаємо кон`юнкцію: якщо значення змінної дорівнює 0, то беремо її заперечення, а якщо 1, то беремо саму змінну. Потім складаємо диз`юнкцію отриманих кон`юнкційй:

$$f\left(x,y,z\right)=(x\wedge\overline{y}\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge z)\vee(x\wedge\overline{y}\wedge z).$$

Вибираємо в таблиці рядки, в яких булева функція набуває значення 0. В даному випадку – це 1-ий, 5-ий і 8-ий рядки:

$$f\left(x,y,z\right)=(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge y\wedge z)$$

ДНФ називається мінімальною, якщо вона містить найменшу кількість літер серед усіх ДНФ рівнозначних до неї.
Співвідношення склеювання :

$$\left(a\wedge b\right)\vee\left(\overline{a}\wedge b\right)=b;\quad \left(a\vee b\right)\wedge\left(\overline{a}\vee b\right)=b$$

Співвідношення поглинання:

$$a\wedge\left(a\vee b\right)=aa\vee\left(a\wedge b\right)=a$$

Застосовуючи співвідношення склеювання, отримаємо:
$(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})=\overline{y}\wedge\overline{z}$,
$(x\wedge y\wedge\overline{z})\vee(x\wedge y\wedge z)=x\wedge y$. Звідси,
$(\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge y\wedge\overline{z})\vee(x\wedge y\wedge z)=(\overline{y}\wedge\overline{z})\vee(x\wedge y)$- ДДНФ.

Приклад 8. Застосовуючи рівнозначні перетворення, привести булеву функцію $f=(\overline{x}\to\overline{y})\to(yz\to\overline{x}z)$ до мінімальної ДНФ

Рішення. Спростимо дану формулу, застосовуючи відомі співвідношення: $x\to y=\overline{x}\vee y$, $\overline{\overline{x}}=x$, $\overline{xy}=\overline{x}\vee\overline{y}$, $\overline{(x\vee y)}=\overline{x}\overline{y}$.

$$f = (\bar{x} \to \bar{y}) \to (yz \to \bar{x}z) = (\bar{\bar{x}} \vee \bar{y}) \to (\overline{yz} \vee \bar{x}z) = (\overline{x \vee \bar{y}}) \vee ((\bar{y} \vee \bar{z}) \vee \bar{x}z) = \bar{x}y \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{x}z =$$

$$= \bar{x}y \vee \bar{x}z \vee \bar{y}(x \vee \bar{x}) \vee \bar{z}(x \vee \bar{x}) = \bar{x}y \vee \bar{x}z \vee \bar{y}x \vee \bar{x}y \vee \bar{z}x \vee \bar{x}$$

$$z = \bar{x}(y \vee \bar{y}) \vee \bar{x}(z \vee \bar{z}) \vee x\bar{y} \vee$$

$$\vee x\bar{z} = \bar{x} \vee x(\bar{y} \vee \bar{z}) = (\bar{x} \vee x)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$$

Отримали мінімальну ДНФ.

Домашнє завдання: Для заданої логічної функції $F = (\overline{\bar{A} \vee B \cdot \bar{C}}) \cdot (\overline{(\overline{B \downarrow C}) \cdot D})$

1) Знайти ДНФ;
2) Скласти таблицю істинності і діаграму Карно (для самостійного вивчення, будуть питання, пишіть);
3) Отримати мінімальну ДНФ;
4) Від мінімальної ДНФ перейти до КНФ.