Практичне заняття № 3.
Комбінаторика і біном Ньютона

Нагадаю основні формули:
Кількість перестановок з *n* елементів знаходимо за формулою:

$$P_n = 1\cdot 2 \ldots (n-1)\,n = n! \qquad (1.1.)$$

Кількість поєднань з *n* елементів по *m* знаходимо за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!};\ C_n^0 = 1. \qquad (1.2)$$

Справедливими є наступні властивості поєднань:

$$C_n^m = C_n^{n-m};$$
$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}. \qquad (1.3)$$

Кількість розміщень з *n* елементів по *m* знаходимо за формулою:

$$A_n^m = P_m\,C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1.4)$$

Формула бінома Ньютона має вигляд:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n, \qquad (1.5)$$

або

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1} b + \ldots + \frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k + \ldots + b^n, \qquad (1.6)$$

де n – натуральне число і $C_n^k a^{n-k} b^k = T_{k+1}$ є $(k+1)$ - й член в розкладі біному $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює: 2^n

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n. \qquad (1.7)$$

Приклад 1. Команда деякої ЕОМ записується у вигляді набору з восьми цифрових знаків – нулів і одиниць.Яка максимальна кількість різних команд?
Рішення: так як для кожного набору можливі лише два значення (0 або 1), то максимальна кількість різних команд є $\underbrace{2\cdot 2 \ldots 2}_{} = 256.$ Можна розміркувати інакше. Розглянути всі двійкові числа від 00000000 до 11111111. Таких чисел текож буде 256.

Приклад 2. В розкладі $(1+x)^n$ четвертий член дорівнює 0,96. Знайти значення *x* і *n*, якщо сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює 1024.

Рішення: так як сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n а $1024 = 2^{10}$, то *n*=10. Четвертий член рзкладу $T_4 = C_n^3 x^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} x^3 = 120x^3.$ Згідно з умовою, $120x^3 = 0{,}96$, звідки $x^3 = 0{,}008$, тобто $x = 0{,}2.$

Приклад 3. При яких значеннях x і y можлива рівність $C_y^x : C_{y+2}^x : A_y^x = 1:3:24$?

Рішення: Застосовуючи формули (1.2) і (1.4), маємо

$$\frac{y!}{x!\,(y-x)!} : \frac{(y+2)!}{x!\,(y-x+2)!} = \frac{1}{3};\ C_y^x : (x! \cdot C_y^x) = 1:24.$$

З другого рівняння, отримаємо $x! = 24$, тобто $x=4$, оскільки $(24=1*2*3*4)$, а з першого рівняння знаходимо $\frac{(y-x+1)\,(y-x+2)}{(y+1)\,(y+2)} = \frac{1}{3}$.

Так як $x=4$, то $y^2 - 9y + 8 = 0$, звідки $y=1$ і $y=8$. $y=1$не задовольняє умові $(y > x = 4)$. Отже $x=4$; $y=8$.

Приклад 4. Довести тотожність: $P_n = (n-1)\,(P_{n-1} + P_{n-2})$

Рішення: Маємо $P_{n-1} = (n-1)!;\ P_{n-2} = (n-2)!$. Таким чином

$$(n-1)\,((n-1)! + (n-2)!) = (n-1)\,(n-2)!\,(n-1+1) = n! = P_n.$$

Приклад 5. Довести тотожність: $C_n^k\, C_{n-k}^{m-k} = C_m^k\, C_n^m$.

Рішення: Ліва частина шуканої тотожності $\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!\,(n-m)!} = \frac{n!}{k!\,(m-k)!\,(n-m)!}$, а права частина $\frac{m!}{k!\,(m-k)!} \cdot \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n!}{k!\,(m-k)!\,(n-m)!}$. Отже тотожність доведено.

Приклад 6. При якому значенні x четвертий доданок розкладу $\left(\sqrt{2^{x-1}} + \sqrt[3]{2^{-x}}\right)^m$ в 20 разів більший за m, якщо біноміальний коефіцієнт 4-го доданку відноситься до біноміального коефіцієнту 2-го доданку, як 5:1?

Рішення: Біноміальні коефіцієнти 4-го і 2-го доданків дорівнюють відповідно C_m^3 і m. Отже, $\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{3!m} = 5$, або $(m-1)\,(m-2) = 30$. Звідки $m=7$. Тоді 4-й доданок розкладу має вигляд $T_4 = C_7^3 2^{2\,(x-1)} \times \frac{1}{2^x}$ і приходимо до рівняння $C_7^3 2^{x-2} = 140$, звідки знаходимо $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} \cdot 2^{x-2} = 140;\ 2^{x-2} = 4;\ x=4.$

Приклад 7. Вирішити рівняння $\frac{A_{x+1}^{y+1}\, P_{x-y}}{P_{x-1}} = 72.$

Рішення: Маємо $A_{x+1}^{y+1}=(x+1)!/(x-y)!,\ P_{x-y}=(x-y)!,\ P_{x-1}=(x-1)!,$ звідки $\frac{(x+1)!\,(x-y)!}{(x-y)!\,(x-1)!}=72$ або $x(x+1)=72,$ тобто x=8. Враховуючи, що $x-y>0$ і у – ціле число, отримуємо $y=0, y=1, ..., y=7.$

Приклад 8. Вирішити систему рівнянь $\begin{cases} A_y^x : P_{x-1}+C_y^{y-x}=126, \\ P_{x+1}=720; \end{cases}$

Рішення: З другого рівняння маємо: (x+1)!=720. Так як 720=6!, то x=5. Враховуючи, що $C_y^{y-x}=C_y^x$ перепишемо перше рівняння таким чином: $A_y^5 : P_4+C_y^5=126.$ Але $A_y^5 : P_4=5C_y^5,$ звідки $6C_y^5=126$ або $y(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)=21\cdot 120.$ далі маємо $21\cdot 120=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3,$ тобто y=7.

Приклад 9. Довести тотожність $C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k$

Рішення: Перетворимо ліву частину рівності $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right)=$ $=\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}.$

Але $C_{n+1}^k=\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!},$ і тотожність доведено.

Приклад 10. Знайти найбільший біноміальний коефіцієнт розкладу $(n+\frac{1}{n})^n,$ якщо добуток 4-го від початку і 4-го з кінця доданків дорівнює 14400.

Рішення: Четвертий доданок спочатку має вигляд $T_4=C_n^3 n^{n-3}\frac{1}{n^3},$ а 4-й доданок від кінця – вид $T_{n-2}=C_n^{n-3}n^3\frac{1}{n^{n-3}}.$ Відповідно $T_4T_{n-2}=(C_n^3)^2=14\,400,$ звідки $C_n^3=120.$ Далі маємо $n(n-1)(n-2)=720;$ $n(n-1)(n-2)=10\cdot 9\cdot 8;\ n=10.$ Отже, найбільший біноміальний коефіцієнт, що входить в доданок, однаково віддалений від кінців розкладу є $C_{10}^5=252.$

Приклад 11. Сума третього від початку і третього від кінця біноміальних членів розкладу $(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{4})^n$ дорівнює 9900. Скільки раціональних членів містить цей розклад?

Рішення: Вказані в умові коефіцієнти дорівнюють $C_n^2.$ Маємо $2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=9900$ або $n(n-1)=100\cdot 99,$ звідки n=100. Тоді $T_{k+1}=C_{100}^k 3^{(100-k)/4}4^{k/3};$ згідно з умовою k/3 і

$(100-k)/4$ - цілі числа, тобто k ділиться на 12. Для n=100 таких чисел є $\left[\frac{100}{12}\right]+1=9.$

Рішення комбінаторних рівнянь

Приклад 1.

1) $A_x^2=42$;

Рішення:

ОДЗ: $x \in N$; $x \geq 2$

$$\frac{x!}{(x-2)!} = 42$$

$$\frac{(x-2)!(x-1)x}{(x-2)!} = 42$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

x_1=-6(виключити – не входить в ОДЗ); x_2=7

Відповідь: 7.

Приклад 2.

$5C_x^3 = C_{x+2}^4$;

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 3 \\ x+2 \geq 4 \end{cases} \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 2 \end{cases}$ $x \geq 3$

$C_x^3 = \frac{x!}{3!(x-3)!}$; $C_{x+2}^4 = \frac{(x+2)!}{4!(x-2)!}$

$$\frac{5(x-3)!(x-2)(x-1)x}{3!(x-3)!} = \frac{(x-2)!(x-1)x(x+1)(x+2)}{4!(x-2)!}$$

$\frac{5(x-2)(x-1)x}{1\cdot2\cdot3}$ $\frac{(x-1)x(x+1)(x+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$

=

$\cdot\ \cdot (x-1)=0$

(20(x-2)-(x+1)(x+2)) x

$(20x-40-x^2+2x+x+2)=0$ або x=0 або x-1=0

$x^2+3x-20x+42=0$ $x_1=0$ $x_2=1$

$x^2-17x+42=0$ корені 0 і 1 не входять до ОДЗ

$x_3=3$; $x_4=14$

Відповідь: 3; 14.

<u>Приклад 3.</u>

$$\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 10 \\ C_x^y : C_x^{y-1} = \frac{5}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge y \\ y \ge N \\ x \in N \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \frac{x!}{(x-y)!} : \frac{x!}{(x-y+1)!} = 10 \\ \frac{x!}{(x-y)!\,y!} : \frac{x!}{(y-1)!\,(x-y+1)!} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x!}{(x-y)!} \cdot \frac{(x-y+1)!}{x!} = 10 \\ \frac{x!}{(x-y)!\,y!} \cdot \frac{(y-1)!\,(x-y+1)!}{x!} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-y)!(x-y+1)}{(x-y)!} = 10 \\ \frac{(y-1)!(x-y+1)!}{(x-y)!y!} = \frac{5}{3} \end{cases} <=> \begin{cases} x-y+1 = 10 \\ \frac{x-y+1}{y} = \frac{5}{3} \end{cases} <=> \begin{cases} x-y = 9 \\ 3x-8y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x+3y = -27 \\ 3x-8y = -3 \end{cases}$$ вирішуємо методом додавання - 5y = -30; y = 6

x – 6 = 9; x=15

Відповідь: (15; 6).

<u>Приклад 4.</u>

$$\begin{cases} C_x^{y+1} = 2{,}5x \\ C_{x-1}^y = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > y+1 \\ x-1 > y \\ x > 0, y > 0x > 1 \quad > 0 \end{cases}$$

ОДЗ: ; y

$$\begin{cases} \dfrac{x!}{(x-(y+1))!(y+1)!} = 2{,}5x \\ \dfrac{(x-1)!}{(x-(y+1))!y!} = 10 \end{cases} <=> \begin{cases} \dfrac{x(x-1)!}{(x-(y+1))!(y+1)y!} = 2{,}5x \\ \dfrac{(x-1)!}{(x-(y+1))!y!} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y+1} = 0{,}25x \\ \dfrac{(x-1)!}{(x-(y+1))!y!} = 10 \end{cases} <=> \begin{cases} y+1 = 4 \\ \dfrac{(x-1)!}{(x-(y+1))!y!} = 10 \end{cases} <=> \begin{cases} y = 3 \\ \dfrac{(x-1)!}{(x-4))!3!} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ \dfrac{(x-4)!(x-3)(x-2)(x-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot (x-4))!} = 10 \end{cases}$$

(x-3)(x-2)(x-1) = 60

(x-3)(x-2)(x-1) = $3^{\cdot\, 4\, \cdot\, 5}$

x-3 = 3; x=6

Відповідь: (6;3)

Приклад 5.

$$\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 8 \\ C_x^y : C_x^{y-1} = 1{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} : \dfrac{x!}{(x-(y-1))!} = 8 \\ \dfrac{x!}{(x-y)!\,y!} : \dfrac{x!}{(y-1)!\,(x-(y-1))!} = 1{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} \cdot \dfrac{(x-(y-1))!}{x!} = 8 \\ \dfrac{x!}{(x-y)!\,y(y-1)!} \cdot \dfrac{(y-1)!\,(x-(y-1))!}{x!} = 1{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-(y-1) = 8 \\ \dfrac{(x-y)!\,(x-(y-1))}{(x-y)!\,y} = 1{,}6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+1 = 8 \\ \dfrac{8}{y} = 1{,}6 \end{cases} <=> \begin{cases} x-y = 7 \\ y = 8:1{,}6 \end{cases} <=> \begin{cases} x = 7+5 \\ y = 5 \end{cases} <=> \begin{cases} x = 12 \\ y = 5 \end{cases}$$

Ответ: (12;5)

Ще декілька прикладів знаходження коефіцієнтів розкладу многочлену за формулою бінома Ньютона:

Приклад 1. Написати розклад за формулою бінома Ньютона і спростити $(a+b)^4$.

Рішення:

$$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4 =$$
$$\frac{4!}{0!4!}a^4 + \frac{4!}{1!3!}a^3 в + \frac{4!}{2!2!}a^2 b^2 + \frac{4!}{3!1!}ab^3 + \frac{4!}{4!0!}b^4 = a^4 + 4a^3 в + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Прикад 2. Знайти алгебраїчну суму коефіцієнтів многочлену відносно x, який отриманий розкладом бінома Ньютона $(3x-4)^{17}$.

Рішення.

$$(3x-4)^{17} = C_{17}^0(3x)^{17}(-4)^0 + C_{17}^1(3x)^{16}(-4)^1 + C_{17}^2(3x)^{15}(-4)^2 + C_{17}^3(3x)^{14}(-4)^3 +$$
$$+ \cdots + C_{17}^{17}(3x)^0(-4)^{17}.$$

Ця рівність істинна при будь-яких значеннях x.

При x = 1 ліва частина дорівнює $(3-4)^{17} = (-1)^{17} = -1$, а в правій частині отримуємо алгебраїчну суму коєфіцієнтів:

$$C_{17}^0 3^{17}(1)^{17} + C_{17}^1 3^{16} 1^{16}(-4) + C_{17}^2 3^{15} 1^{15}(-4)^2 + \cdots + C_{17}^{17}(-4)^{17} =$$
$$C_{17}^0 3^{17} - 4 \cdot 3^{16} C_{17}^1 + 16 \cdot 3^{15} C_{17}^2 + \cdots + -4^{17} \cdot C_{17}^{17}$$

Отже, алгебраїчна сума коефіцієнтів даного многочлену дорівнює –1.

Приклад 3. Знайти 13-й член розкладу бінома

$$\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}\right)^{15}.$$

Рішення. Згідно з формулою загального члену розкладу бінома,

$$T_{13} = T_{12+1} = C_{15}^{12}\left(\sqrt[3]{3}\right)^3\left(\sqrt{2}\right)^{12} = C_5^3 \cdot 3 \cdot 2^6 = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 \cdot 2^6 = 87360.$$

Приклад 4. Знайти номер члена розкладу бінома $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^{16}$, що не містить х.

Рішення. Для загального члена розкладу
маємо

$$T_{m+1}=C_{16}^{m}(\sqrt[3]{x})^{16-m}\left(\frac{1}{x}\right)^{m}=C_{16}^{m}x^{\frac{16-m}{3}}x^{-m}=C_{16}^{m}x^{\frac{16-4m}{3}}.$$

Член розкладу не залежить від х; це означає, що показник степені х дорівнює 0, тільки
тоді, коли $\frac{16-4m}{3}=0$, 16 – 4m = 0, m = 4.

Отже, п`ятий член даного розкладу не залежить від х.

Приклад 5. Побудувати трикутник Паскаля для знаходження
коефіцієнтів розкладу бінома Ньютона $(a+b)^7$.

Рішення.

n	C_n^m
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
	C_7^0 C_7^1 C_7^2 C_7^3 C_7^4 C_7^5 C_7^6

Домашнє завдання:

1. Вирішити рівняння $\frac{P_{x+3}}{A_x^5 P_{x-5}}=720.$

2. Вирішити систему рівнянь: $\begin{cases}A_x^y+3C_x^y=90,\\ A_x^y-2C_x^y=40.\end{cases}$

3. Знайти x і y, якщо

а) $C_{x+1}^{y} : C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y-1} = 6:5:2;$

б) $C_{x}^{y-1} : (C_{x-2}^{y} + C_{x-2}^{y-2} + 2C_{x-2}^{y-1}) : C_{x}^{y+1} = 3:5:5.$

4. Різниця між третім біноміальним членом розкладів $(a+b)^{n+1}$ і $(a+b)^{n}$ дорівнює 225. Знайти кількість раціональних членів розкладу $(\sqrt[5]{x}+\sqrt[9]{y})^{n}$.