

Задача 60

Згідно з теорією Бора, електрон в атомі Гідрогену може рухатися тільки по таких колових орбітах, для яких добуток імпульсу електрона на довжину орбіти кратний сталій Планка:

$$mv \cdot 2\pi r = nh, n = 1, 2, 3, \dots$$

Виходячи з цього,

ВИЗНАЧИТИ

кутову швидкість електрона ω на другій орбіті ($n = 2$).

$$\begin{array}{l} \text{Дано:} \\ mv \cdot 2\pi r = nh \\ n = 2 \\ \hline \omega - ? \end{array}$$

Розв'язання

В теорії Бора рух електрона в атомі Гідрогену навколо ядра розглядається як рух точкового заряду під дією кулонівської сили, яка створює доцентрове прискорення. Тому згідно з рівнянням (2.5) та формулами (10.3) і (2.17) можна записати

$$\frac{ke^2}{r^2} = m\omega r \Rightarrow ke^2 = m\omega^2 r^3, \quad (1)$$

де ω – шукана кутова швидкість електрона, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг – його маса,

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}.$$

Крім того враховано, що заряди електрона та ядра атома Гідрогену по модулю рівні $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Зробимо в заданій у тексті задачі умові стаціонарності заміни $v = \omega \cdot r$, $h = h/2\pi = \hbar$, і об'єднаємо її з рівнянням (1):

$$\begin{cases} n\hbar = m\omega r^2 \\ m\omega^2 r^3 = ke^2 \end{cases}$$

Розв'язавши отриману систему відносно, дістанемо

$$\omega = \frac{k^2 e^4 m}{\hbar^3 n^3} = \frac{(9 \cdot 10^9)^2 (1,6 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{(1,05 \cdot 10^{-34})^3 2^3} = 5,2 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

Задача 61

У спектрі випромінювання атомарного Гідрогену при заданих умовах збудження спостерігається тільки три спектральні лінії.

Визначити

довжини хвиль цих ліній $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Дано:

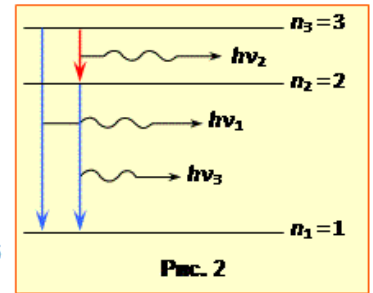
$$N = 3$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 - ?$

Розв'язання

Згідно з квантовим механізмом випромінювання і умовою **(20.1)** атом Гідрогену випромінює фотон при переході електрона з будь-якого збудженого енергетичного рівня на будь-який з більш низьких рівнів.

Якщо нижчий рівень сам є збудженим, то через короткий час (час життя збудженого стану) електрон знову переходить на один з більш низьких рівнів. Так продовжується, доки електрон не опиниться в основному стані. З наведених міркувань і схеми енергетичних рівнів (рис.2) неважко збагнути, що найвищий рівень, на якому знаходяться електрони в умовах задачі, відповідає головному квантовому числу $n_3 = 3$. Тільки в цьому випадку можливі лише три переходи, показані стрілками на рис.2, і відповідно - три спектральні лінії з енергіями фотонів $h\nu_1, h\nu_2, h\nu_3$. Частоти ν_1, ν_2, ν_3 визначаються формулою Бальмера **(20.4)**. Врахувавши значення $R = 3,29 \cdot 10^{15}$ Гц, отримаємо



$$\nu_1 = 3,29 \cdot 10^{15} \left(1 - \frac{1}{9} \right) = 2,93 \cdot 10^{15} \text{ Гц,}$$

$$\nu_2 = 3,29 \cdot 10^{15} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = 4,58 \cdot 10^{14} \text{ Гц,}$$

$$\nu_3 = 3,29 \cdot 10^{15} \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 2,47 \cdot 10^{15} \text{ Гц.}$$

Довжини хвиль визначаються формулою **(15.4a)**, отже

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,93 \cdot 10^{15}} = 102,7 \text{ нм;}$$

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{4,58 \cdot 10^{14}} = 656 \text{ нм;}$$

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,47 \cdot 10^{15}} = 121 \text{ нм;}$$

Задача 62

Збуджені атоми Гідрогену знаходяться на n -ому енергетичному рівні.

Визначити

повну кількість ліній N , що спостерігаються у спектрі випромінювання цих атомів.

Дано:

$$\underline{n}$$
 $N - ?$

Дано:	Розв'язання
n	
$N - ?$	На рис. 3 схематично показані всі енергетичні рівні, на яких можуть перебувати електрони за умовою задачі.

Відповідь на поставлене запитання можна отримати прямим підрахунком, взявши до уваги, що шукане число N дорівнює сумі кількостей всіх можливих переходів електронів на кожен з рівнів від першого до $(n - 1)$ -го. Очевидно, що таких можливих переходів є:

на перший рівень – $n - 1$,

на другий рівень – $n - 2$,

на третій рівень – $n - 3$,

.....

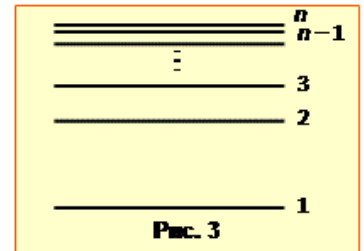
на $(n - 1)$ -й рівень – 1.

Отримана числова послідовність є арифметичною прогресією з $(n - 1)$ членів, причому $a_1 = n - 1$, $a_{n-1} = 1$. Сума арифметичної прогресії дорівнює добутку півсуми першого та останнього членів на їх кількість:

$$N = \frac{(n-1)+1}{2}(n-1) \Rightarrow N = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Примітка. Той, хто знає основи комбінаторики, може отримати відповідь коротше. У кожному переході беруть участь 2 з n рівнів. Тому кількість переходів дорівнює кількості комбінацій з n по 2:

$$N = C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-1)n}{2}.$$



Задача 63

Електрон в нерухомому атомі Гідрогену знаходиться на енергетичному рівні $n_2 = 2$.

Визначити

швидкість v руху атома після випромінювання фотона.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Дано:} \\ n_2 = 2 \\ v - ? \end{array} \right|$$

Розв'язання

Фотон випромінюється при переході електрона зі збудженого рівня $n_2 = 2$ на основний рівень $n_1 = 1$. Енергія фотона W визначається співвідношенням **(20.1)** і формулою **(20.3a)**:

$$W = E_0 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = \frac{3E_0}{4}, \quad (1)$$

де $E_0 = 13,6$ еВ.

Система атом – фотон є ізольованою, тому в ній зберігається імпульс. Оскільки до випромінювання імпульс системи дорівнював нулю, то

$$0 = \vec{p}_\phi + \vec{p}_a \Rightarrow \vec{p}_a = -\vec{p}_\phi,$$

де $\vec{p}_a, \vec{p}_\phi$ – імпульси атома та випроміненого фотона. Таким чином, атом отримує імпульс "віддачі", рівний за величиною та протилежний за напрямком імпульсу фотона, що випромінюється. Імпульс фотона p_ϕ визначається через його енергію W співвідношенням **(19.4)**:

$$p_\phi = \frac{W}{c},$$

де c – швидкість світла.

В такому разі для модулів маємо:

$$\frac{W}{c} = mv_a \Rightarrow v = \frac{W}{m_a c},$$

де $m_a = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг – маса атома Гідрогену. Підставивши в цей вираз значення W з виразу **(1)**, отримаємо

$$v = \frac{3E_0}{4m_a c}.$$

Виразивши величину $E_0 = 13,6$ еВ у джоулях і виконавши обчислення, дістанемо відповідь:

$$v = \frac{3 \cdot 13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^8} \approx 3,26 \text{ м/с}.$$

Задача 64

На нерухомий атом Гідрогену налітає інший атом Гідрогену. До зіткнення обидва атоми знаходилися в основному стані ($n_1 = 1$).

Визначити

мінімальну кінетичну енергію W_1 , яку повинен мати рухомий атом, щоб при прямому непружному зіткненні один з атомів випустив фотон.

Дано:
 $n_1 = 1$
 $W_1 = ?$

Розв'язання

Зіткнення атомів відбувається з виконанням законів збереження енергії та імпульсу. При непружному зіткненні частина кінетичної енергії налітаючого атома перетворюється на внутрішню енергію, що означає перехід одного або двох атомів у збуджений стан. Мінімальна необхідна енергія очевидно відповідає переходу одного атома з основного стану ($n_1 = 1$) у перший збуджений ($n_2 = 2$). При зворотному переході цей атом випускає фотон.

За законом збереження енергії

$$W_1 = W_2 + \Delta W, \quad (1)$$

де W_1 – кінетична енергія атома, що налітає, W_2 – кінетична енергія атомів після непружного зіткнення, ΔW – зміна внутрішньої енергії, тобто енергія збудження.

Згідно виразами (20.1) і (20.3а)

$$\Delta W = E_0 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (2)$$

За законом збереження імпульсу

$$p_1 = p_2, \quad (3)$$

де p_1 – імпульс атома, що налітає, p_2 – імпульс атомів після непружного удару.

Імпульс і кінетична енергія зв'язані співвідношенням (4.3б)

$$W = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mW}.$$

Тому вираз (3) можна записати у вигляді

$$\sqrt{2mW_1} = \sqrt{2 \cdot 2mW_2} \Rightarrow W_1 = 2W_2, \quad (4)$$

де враховано, що після непружного удару атоми рухаються разом, як одна частинка з масою $2m$ (m – маса одного атома). З огляду на вирази (2) і (4), формула (1) набуває вигляду

$$W_1 = \frac{W_1}{2} + E_0 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \Rightarrow W_1 = E_0 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right).$$

Підставивши сюди значення $E_0 = 13,6$ еВ, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, дістанемо:

$$W_1 = 2 \cdot 13,6 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 20,4 \text{ еВ}.$$

Задача 65-1

Визначити енергію електрона, що перебуває на другій орбіті атома водню.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$\left. \begin{array}{l} W_n - ? \\ n = 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{Згідно з теорією Бора радіус } r \text{ електронної орбіти і} \\ \text{швидкість } v \text{ електрона на ній зв'язані співвідношенням} \end{array} \quad mvr = n\hbar, \quad (1)$$

де e і m – заряд і маса електрона; n – головне квантове число ($n = 1, 2, 3, \dots$); $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

До цього виразу входять дві невідомі величини r і v . За друге рівняння використаємо рівняння руху електрона. Згідно з теорією Бора електрон обертається навколо ядра. При цьому сила взаємодії між електричним зарядом ядра та електроном надає електрону доцентрового прискорення. З використанням другого закону Ньютона можна записати

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}, \quad (2)$$

звідси

$$mv^2 r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (3)$$

Поділимо (3) на (2) та одержимо

$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar}. \quad (4)$$

Тоді радіус n -ї орбіти електрона

$$r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2 n^2}{me^2}. \quad (5)$$

Енергія атома складається з кінетичної енергії електрона та енергії взаємодії електрона з ядром:

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}. \quad (6)$$

Задача 65-2

З використанням співвідношень (4) та (5) одержимо для енергії електрона на n -му рівні

$$W_n = \frac{1}{2} \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^2 \hbar^2} - \frac{1}{2} \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2} = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^2 \hbar^2}.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин визначимо

$$W_n = -\frac{1}{2} \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^4}{(4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12})^2 2^2 (1,05 \cdot 10^{-34})^2} = -5,47 \cdot 10^{-19} \text{ (Дж)} = -3,42 \text{ (eV)}.$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$\begin{aligned} [W] &= \frac{1}{[\epsilon_0]^2} \frac{[m][e]^4}{[\hbar]^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Кл}^4}{(\text{Ф/м})^2 (\text{Дж} \cdot \text{с})^2} = \frac{\text{Кл}^4 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{Ф}^2 \cdot \text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{Ф}^4 \cdot \text{В}^4 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Ф}^2 \cdot \text{Дж}^2} = \\ &= \frac{\text{Ф}^2 \cdot \text{В}^4}{\text{Дж}} = \frac{\text{Кл}^2 \text{В}^4}{\text{В}^2 \text{Дж}} = \frac{\text{Кл}^2 \text{В}^2}{\text{Дж}} = \frac{\text{Дж}^2}{\text{Дж}} = \text{Дж}. \end{aligned}$$

Відповідь: $W_n = -5,47 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = -3,42 \text{ eV}$.

Задача 66

Розрахувати, користуючись теорією Бора, період обертання електрона в атомі водню, що перебуває у збудженому стані з головним квантовим числом $n=2$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\frac{T-?}{n=2}$	Згідно з теорією Бора радіус r електронної орбіти і швидкість v електрона на ній пов'язані співвідношенням
	$mvr = n\hbar, \quad (1)$

де m – маса електрона; n – головне квантове число ($n=1, 2, 3, \dots$); $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

До цього виразу входять дві невідомі величини r і v . З використанням другого закону Ньютона можна записати

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}, \quad (2)$$

звідси

$$mv^2 r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (3)$$

Поділимо (3) на (2) та одержимо, що швидкість електрона на n -й орбіті дорівнює

$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar}. \quad (4)$$

Тоді радіус n -ї орбіти електрона

$$r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2 n^2}{me^2}. \quad (5)$$

Період обертання електрона на орбіті визначається співвідношенням

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (6)$$

Підставивши у вираз (6) значення v та r , із співвідношень (4) та (5) одержимо

$$T = \frac{2\pi 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{me^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar}} = \frac{32\pi^3 \epsilon_0^2 \hbar^3 n^3}{me^4}. \quad (7)$$

Після підставлення числових значень фізичних величин у співвідношення (7) одержимо

$$T = \frac{32 \cdot (3,14)^3 \cdot (8,85 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (1,05 \cdot 10^{-34})^3 \cdot 2^3}{9,1 \cdot 10^{-31} (1,6 \cdot 10^{-19})^4} = 1,21 \cdot 10^{-17} \text{ (с)}.$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$\begin{aligned} [T] &= \frac{[\epsilon_0]^2 [\hbar]^3}{[m] [e]^4} = \frac{(\Phi/\text{М})^2 (\text{Дж} \cdot \text{с})^3}{\text{кг} \cdot \text{Кл}^4} = \frac{\Phi^2 \cdot \text{Дж}^3 \text{с}^3}{\text{Кл}^4 \text{кг} \cdot \text{М}^2} = \frac{\text{Кл}^2 \text{Дж}^3 \text{с}}{\text{В}^2 \text{Кл}^4 \text{Н} \cdot \text{М}} = \\ &= \frac{\text{Дж}^2 \cdot \text{с}}{\text{В}^2 \text{Кл}^2} = \frac{\text{Дж}^2 \cdot \text{с}}{\text{Дж}^2} = \text{с}. \end{aligned}$$

Відповідь: $T = 1,21 \cdot 10^{-17} \text{ с}$.

Задача 67

Скільки ліній спектра атома водню потрапляє у видиму область ($0,4\text{ мкм} \leq \lambda \leq 0,76\text{ мкм}$)? Визначити довжини цих хвиль.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\lambda - ?$	Серіальна формула (узагальнена формула Бальмера) визначає довжину хвилі світла, що випромінюється або поглинається воднеподібним атомом при переході електрона з однієї орбіти на іншу,
$0,4\text{ мкм} \leq \lambda \leq 0,76\text{ мкм},$ $R = 1,097 \cdot 10^7\text{ м}^{-1}$	

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

де R – стала Рідберга; Z – заряд ядра у відносних одиницях ($Z=1$ для водню); $n=1, 2, 3, \dots$, $k=n+1; n+2; \dots$

У видимій області спектра містяться лінії серії Бальмера ($n=2, k=3; 4; 5; 6\dots$). Довжини цих хвиль дорівнюють:

$$\frac{1}{\lambda_1} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \Rightarrow \lambda_1 = \frac{36}{5R} = \frac{36}{5 \cdot 1,097 \cdot 10^7} = 6,56 \cdot 10^{-7} (\text{м}) = 0,656 (\text{мкм}),$$

$\lambda_1 = 0,656 (\text{мкм})$ – червона лінія.

$$\frac{1}{\lambda_2} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) \Rightarrow \lambda_2 = \frac{16}{3R} = \frac{16}{3 \cdot 1,097 \cdot 10^7} = 4,86 \cdot 10^{-7} (\text{м}) = 0,486 (\text{мкм}),$$

$\lambda_2 = 0,486 (\text{мкм})$ – блакитна лінія.

$$\frac{1}{\lambda_3} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right) \Rightarrow \lambda_3 = \frac{25}{21R} = \frac{25}{21 \cdot 1,097 \cdot 10^7} = 4,34 \cdot 10^{-7} (\text{м}) = 0,434 (\text{мкм}),$$

$\lambda_3 = 0,434 (\text{мкм})$ – фіолетова лінія.

$$\frac{1}{\lambda_4} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2} \right) \Rightarrow \lambda_4 = \frac{36}{8R} = \frac{36}{8 \cdot 1,097 \cdot 10^7} = 4,1 \cdot 10^{-7} (\text{м}) = 0,41 (\text{мкм}),$$

$\lambda_4 = 0,41 (\text{мкм})$ – фіолетова лінія.

$$\frac{1}{\lambda_5} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{7^2} \right) \Rightarrow \lambda_5 = \frac{49 \cdot 4}{45R} = \frac{49 \cdot 4}{45 \cdot 1,097 \cdot 10^7} = 3,9 \cdot 10^{-7} (\text{м}) = 0,39 (\text{мкм}),$$

$\lambda_5 = 0,39 (\text{мкм}) < 0,4\text{ мкм}$ – ультрафіолетова лінія.

Відповідь: у видимій області спектра містяться чотири лінії серії Бальмера $\lambda_1 = 0,656\text{ мкм}$ – червона лінія; $\lambda_2 = 0,486\text{ мкм}$ – блакитна лінія; $\lambda_3 = 0,434\text{ мкм}$ – фіолетова лінія; $\lambda_4 = 0,41\text{ мкм}$ – фіолетова лінія.

Задача 68-1

Визначити найбільші та найменші довжини світлових хвиль, що випромінюються в серіях Лаймана, Бальмера та Пашена.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\lambda - ?$	Серіальна формула (узагальнена формула Бальмера) визначає довжину хвилі світла, що випромінюється або поглинається воднеподібним атомом при переході електрона з однієї орбіти на іншу,
$R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$	

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (1)$$

де R – стала Рідберга; Z – заряд ядра у відносних одиницях ($Z=1$ для водню); $n=1, 2, 3, \dots$, $k=n+1; n+2; \dots$

З формули (1) знайдемо довжину хвилі

$$\lambda = \frac{1}{R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)}.$$

У серії Лаймана переходи електрона здійснюються на першу орбіту з усіх інших, тобто $n=1$, $k=2, 3, 4, \dots, \infty$. Отже, максимальна та мінімальна довжини хвиль визначаються таким чином:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{R \left(1 - \frac{1}{2^2} \right)} = \frac{4}{3R} = \frac{4}{3 \cdot 1,097 \cdot 10^7} = 1,22 \cdot 10^{-7} (\text{м}) = 0,122 (\text{мкм}).$$

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{R \left(1 - \frac{1}{\infty} \right)} = \frac{1}{R} = \frac{1}{1,097 \cdot 10^7} = 9,1 \cdot 10^{-8} (\text{м}) = 0,091 (\text{мкм}).$$

У видимій області спектра містяться лінії серії Бальмера ($n=2$, $k=3; 4; 5; \dots, \infty$):

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)} = \frac{36}{5R} = \frac{36}{5 \cdot 1,097 \cdot 10^7} = 6,56 \cdot 10^{-7} (\text{м}) = 0,656 (\text{мкм}).$$

Задача 68-2

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{R' \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty} \right)} = \frac{4}{R'} = \frac{4}{1,097 \cdot 10^7} = 3,65 \cdot 10^{-7} (\text{м}) = 0,365 (\text{нм}).$$

У серії Пашена перехід електрона відбувається на орбіту з головним квантовим числом $n=3$, тоді $k=4,5,6,\dots\infty$.

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{R' \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right)} = \frac{144}{7R'} = \frac{144}{7 \cdot 1,097 \cdot 10^7} = 1,875 \cdot 10^{-6} (\text{м}) = 1,875 (\text{нм}).$$

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{R' \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty} \right)} = \frac{9}{R'} = \frac{9}{1,097 \cdot 10^7} = 8,2 \cdot 10^{-7} (\text{м}) = 0,82 (\text{нм}).$$

Відповідь: серія Лаймана $\lambda_{\max} = 0,122 \text{ нм}$; $\lambda_{\min} = 0,091 \text{ нм}$.

Серія Бальмера $\lambda_{\max} = 0,656 \text{ нм}$; $\lambda_{\min} = 0,365 \text{ нм}$.

Серія Пашена $\lambda_{\max} = 1,875 \text{ нм}$; $\lambda_{\min} = 0,82 \text{ нм}$.

Задача 69

Визначити колову частоту ω обертання електрона на n -й коловій орбіті воднеподібного атома. Визначити цю величину для іона He^+ при $n=2$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\omega = ?$ $n=2,$ $Z=2$	Частоту обертання електрона на n -й коловій орбіті воднеподібного атома визначимо за формулою	$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (1)$
---------------------------------	---	--------------------------------------

де T – період обертання електрона. Він дорівнює

$$T = \frac{2\pi r_n}{v_n}, \quad (2)$$

де v_n – швидкість електрона.

Згідно з теорією Бора радіус r електронної орбіти воднеподібного атома і швидкість v_n електрона на ній зв'язані співвідношенням

$$mv_n r_n = n\hbar, \quad (3)$$

де m – маса електрона; n – головне квантове число ($n=1, 2, 3, \dots$); $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

До цього виразу входять дві невідомі величини r_n і v_n . За друге рівняння використаємо рівняння руху електрона. Згідно з теорією Бора електрон обертається навколо ядра. При цьому сила взаємодії між електричним зарядом ядра Ze та електроном e надає електрону доцентрового прискорення. З використанням другого закону Ньютона можна записати

$$\frac{mv_n^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}, \quad (4)$$

звідси

$$mv_n^2 r = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (5)$$

Поділимо (5) на (4) та одержимо

$$v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar}. \quad (6)$$

Тоді радіус n -ї орбіти електрона

$$r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2 n^2}{mZe^2}. \quad (7)$$

Підставимо вирази (2), (6) і (7) у співвідношення (1) та одержимо

$$\omega = \frac{v_n}{r_n} = \frac{mZe^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar} = \frac{mZ^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^3 \hbar^3} = \frac{2Z^2}{n^3} R, \quad (1)$$

де $R = \frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3}$ – стала Рідберга, вона дорівнює $R = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}$.

Для іона He^+ ($Z=2$) при $n=2$ колова частота дорівнює

$$\omega = \frac{2Z^2}{n^3} R = \frac{2 \cdot 2^2}{2^3} R = R \Rightarrow \omega = 2,07 \cdot 10^{16} (\text{c}^{-1}).$$

Відповідь: $\omega = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}$.

Задача 70-1

Визначити, які спектральні лінії з'являються у видимій області спектра випромінювання атома водню під дією ультрафіолетових променів із довжиною хвилі $\lambda = 95 \text{ нм}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$\lambda_n - ?$$

$$\lambda = 95 \text{ нм} = 9,5 \cdot 10^{-8} \text{ м},$$

$$Z = 1$$

Енергія кванта світла $\varepsilon = hc/\lambda$ дорівнює різниці енергій збудженого та основного станів, тобто

$$W_n - W_1 = \varepsilon \Rightarrow W_n = \varepsilon + W_1. \quad (1)$$

Енергія збудженого стану дорівнює

$$W_n = \frac{W_1}{n^2}, \text{ звідси } n = \sqrt{\frac{W_1}{W_n}} = \sqrt{\frac{W_1}{\varepsilon + W_1}}. \quad (2)$$

Енергія кванта світла дорівнює

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{9,5 \cdot 10^{-8}} = 20,9 \cdot 10^{-19} (\text{Дж}) = 13,08 (\text{еВ}).$$

Енергія електрона в основному стані дорівнює

$$W_1 = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2} = -13,6 (\text{еВ}).$$

Тоді номер збудженого стану

$$n = \sqrt{\frac{-13,6}{13,08 - 13,6_1}} = 5. \quad (4)$$

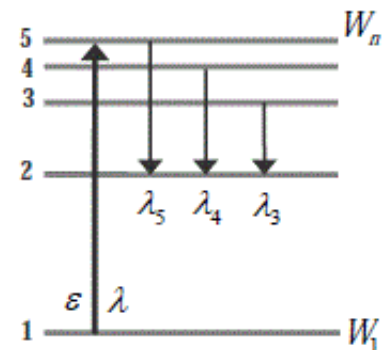


Рисунок 6.3 – До задачі 6.6

Серіальна формула (узагальнена формула Бальмера) визначає довжину хвилі світла, що випромінюється або поглинається атомом водню при переході електрона з однієї орбіти на іншу,

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (5)$$

де R – стала Рідберга ($R = R/c = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$).

Для видимої області спектра $m = 2$, тоді можна застосувати формулу Бальмера

Задача 70-2

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (6)$$

У нашому випадку квантове число n може набувати значень $n=5$, $n=4$ та $n=3$, тоді

$$\frac{1}{\lambda_5} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right) \Rightarrow \lambda_5 = \frac{1}{R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right)},$$

$$\frac{1}{\lambda_4} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) \Rightarrow \lambda_4 = \frac{1}{R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right)},$$

$$\frac{1}{\lambda_3} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)}.$$

Розрахунки дають

$$\lambda_5 = \frac{1}{3,29 \cdot 10^{15} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right)} = 434 \cdot 10^{-9} (\text{м}) = 434 (\text{нм}),$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{3,29 \cdot 10^{15} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right)} = 486 \cdot 10^{-9} (\text{м}) = 486 (\text{нм}),$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3,29 \cdot 10^{15} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)} = 656 \cdot 10^{-9} (\text{м}) = 656 (\text{нм}).$$

Відповідь: $\lambda_3 = 656 \text{ нм}$, $\lambda_4 = 486 \text{ нм}$, $\lambda_5 = 434 \text{ нм}$.

Задача 71

Електрон в іонізованому атомі гелію перейшов із п'ятого енергетичного рівня на другий. Визначити енергію фотона, що при цьому випромінюється.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$W = ?$	Для визначення енергії фотона скористаємося серіальною формулою для воднеподібних іонів
$n = 2,$ $m = 5$	$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (1)$

де λ – довжина хвилі фотона; R – стала Рідберга; z – заряд ядра у відносних одиницях (при $Z = 1$ формула набирає вигляду, що є характерним для водню); n – номер орбіти, на яку перейшов електрон; m – номер орбіти, з якої перейшов електрон (n і m – головні квантові числа).

Енергія фотона W визначається співвідношенням

$$W = \frac{hc}{\lambda}.$$

Тому, помноживши обидві частини рівняння (1) на hc , одержимо вираз для енергії фотона у вигляді

$$W = Z^2 hc R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Оскільки всі величини у співвідношенні відомі, проведемо розрахунок W :

$$\begin{aligned} W &= 1,1 \cdot 10^7 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right) = \\ &= 1,83 \cdot 10^{-18} \text{ (Дж)} = 11,48 \text{ (eV)}. \end{aligned}$$

Виконаємо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[W] = [R][h][c] = \text{м}^{-1} \cdot \text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м/с} = \text{Дж}.$$

Відповідь: $W = 1,83 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 11,48 \text{ eV}.$

Задача 72

Фотон вибиває з атома водню, який перебуває в основному стані, електрон із кінетичною енергією $W_K = 10 \text{ eB}$. Визначити енергію W цього фотона.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$W - ?$	Енергія фотона витрачається на іонізацію атома водню і надання електрону кінетичної енергії:
$W_K = 10 \text{ eB}$	
$W = W_K + W_I.$ (1)	

Енергія іонізації атома водню дорівнює

$$W_I = h\nu = h \frac{c}{\lambda}, \quad (2)$$

де λ знайдемо застосувавши серіальну формулу та врахувавши, що відбувається перехід електрона між основним станом $n=1$ і рівнем вакууму $m=\infty$:

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (3)$$

де R – стала Рідберга; Z – заряд ядра атома водню; n і m – головні квантові числа.

Підставивши співвідношення (3) у (4), одержимо

$$W_I = hcRZ^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right). \quad (4)$$

Тепер із виразів (1) (4) знайдемо енергію фотона:

$$W = W_K + hcRZ^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right).$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо

$$W = 10 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} + 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,1 \cdot 10^7 \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) = 2,35 (\text{Дж}).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[W] = [W_K] + [R][h][c] = \text{Дж} + \text{м}^{-1} \cdot \text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м/с} = \text{Дж}.$$

Відповідь: $W = 2,35 \text{ Дж}$.

Задача 73

Позитроній – це атомоподібна система, яка містить позитрон і електрон, що обертається навколо загального центра мас. Визначити мінімальні розміри подібної системи в рамках теорії Бора.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$d_{\min} - ?$	Застосуємо правило квантування орбіт (другий постулат Бора) до позитронію
$ e^+ = e^- = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл},$	$(m_{e^+} v r)_+ + (m_{e^-} v r)_- = n \hbar, \quad (1)$
$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м},$	де $\hbar$ – стала Планка – Дірака.
$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж/с},$	Оскільки маси електрона і позитрона однакові $m_{e^+} = m_{e^-} = m_e$, то
$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$	

$$2m_e v r = n \hbar. \quad (2)$$

Сила Кулона надає електрону доцентрового прискорення навколо загального центра мас, тобто

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 (2r)^2} \Rightarrow 2m_e v^2 r = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}, \quad (3)$$

де e – заряд електрона.

Поділимо рівняння (3) на рівняння (2) та одержимо вираз для швидкості електрона

$$v = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 n \hbar}, \quad (4)$$

який підставимо у рівняння (2) та визначимо вираз для радіусів борівських орбіт позитронію:

$$2m_e \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 n \hbar} r = n \hbar \Rightarrow r = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_e e^2}. \quad (5)$$

Розміри позитронію будуть мінімальними за умови $n=1$. З урахуванням, що $\hbar = h/2\pi$, одержимо для мінімального радіуса вираз

$$r_{\min} = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}, \quad (6)$$

тоді мінімальний діаметр позитронію дорівнює

$$d_{\min} = 2r_{\min} = \frac{2\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}. \quad (7)$$

Підставимо в одержаний вираз числові значення фізичних величин, виконаємо розрахунки та одержимо

$$d_{\min} = \frac{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6,63^2 \cdot 10^{-68}}{3,14 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6^2 \cdot 10^{-38}} = 1,06 \cdot 10^{-10} (\text{м}) = 106 (\text{нм}).$$

Відповідь: $d_{\min} = 106 \text{ нм}$.

Задача 74

Визначити швидкість v електронів, що падають на антикатод рентгенівської трубки, якщо мінімальна довжина хвилі в суцільному спектрі рентгенівського випромінювання дорівнює $\lambda_{\min} = 1 \text{ нм}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$v - ?$ $\lambda_{\min} = 1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$	Скористаємося формулою для короткохвильової межі суцільного рентгенівського спектра $\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU}, \quad (1)$
--	--

де U – різниця потенціалів, прикладена до рентгенівської трубки.
Тоді

$$eU = \frac{hc}{\lambda_{\min}}. \quad (2)$$

Прискорювальна різниця потенціалів, прикладена до трубки, надає електрону кінетичної енергії

$$eU = \frac{mv^2}{2}. \quad (3)$$

З виразів (2) і (3) одержимо формулу для швидкості

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2hc}{m\lambda_{\min}}}.$$
$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-9}}} = 2,08 \cdot 10^7 \text{ (м/с)}.$$

Одержаний вираз свідчить, що електрони, які падають на антикатод, є нерелятивістськими.

Відповідь: $v = 2,08 \cdot 10^7 \text{ м/с}$.

Задача 75

Визначити довжину хвилі λ_{K_α} та енергію W_{K_α} фотона K_α -лінії рентгенівського спектра, що випромінюється ренієм ($Z=75$) при бомбардуванні його швидкими електронами.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

При бомбардуванні ренію швидкими електронами виникає рентгенівське випромінювання, що має лінійчастий спектр. Ці електрони проникають усередину електронної оболонки атома та вибивають електрони, які належать до глибинних електронних оболонок. Найближча до ядра електронна оболонка (K -оболонка) має два електрони. Якщо один із цих електронів виявляється вибитим за межі атома, то на вільне місце переходить електрон з оболонки, що лежить вище (L, M, N). При цьому виникає відповідна лінія K -серії. При переході електрона з L -оболонки на K -оболонку випромінюється найінтенсивніша K_α -лінія рентгенівського спектра.

Довжина хвилі цієї лінії визначається за законом Мозлі для ліній K_α :

$$\omega_{K_\alpha} = R(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} R(Z-1)^2.$$

Ураховуючи, що $\omega = 2\pi c / \lambda$, одержимо

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{3}{4} R(Z-1)^2.$$

Із цього співвідношення довжина хвилі дорівнює

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{4}{3R(Z-1)^2}.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин в останнє співвідношення одержимо відповідь

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{4}{31,097 \cdot 10^7 (75-1)^2} = 2,2 \cdot 10^{-11} (\text{м}).$$

Знаючи довжину хвилі, визначимо енергію фотона за виразом

$$W_{K_\alpha} = \frac{hc}{\lambda}.$$

Після підставлення числових значень величин визначимо енергію фотона

$$W_{K_\alpha} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2,2 \cdot 10^{-11}} = 5,64 \cdot 10^{-14} (\text{Дж}).$$

Виконаємо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[W_{K_\alpha}] = \frac{[\hbar][c]}{[\lambda]} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м/с}}{\text{м}} = \text{Дж}.$$

Відповідь: $\lambda_{K_\alpha} = 2,2 \cdot 10^{-11} \text{ м}$; $W_{K_\alpha} = 5,64 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}$.

Задача 76

Гранична довжина хвилі K -серії характеристичного рентгенівського випромінювання дорівнює $\lambda = 0,11284 \text{ нм}$. Визначити, який це елемент.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$Z - ?$	Довжина хвилі рентгенівського випромінювання визначається законом Мозлі
$\lambda = 0,11284 \text{ нм} = 1,1284 \cdot 10^{-10} \text{ м},$	$\frac{1}{\lambda} = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$ де n і m – енергетичні рівні, між якими відбувається перехід електрона.
$\sigma = 1,$	
$n = 1,$	
$m = \infty$	

Фотон із граничною довжиною хвилі в K -серії випромінюється при переході з рівня $m = \infty$ на рівень $n = 1$.

Тоді

$$(Z - \sigma)^2 = \frac{1}{\lambda R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)} = \frac{1}{\lambda R \left(1 - \frac{1}{\infty} \right)} = \frac{1}{\lambda R},$$
$$Z - \sigma = \sqrt{\frac{1}{\lambda R}} \Rightarrow Z = \sqrt{\frac{1}{\lambda R}} + \sigma.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз:

$$Z = \sqrt{\frac{1}{1,1284 \cdot 10^{-10} \cdot 1,097 \cdot 10^7}} + 1 \approx 27.$$

Визначили, що порядковий номер елемента в таблиці Менделєєва дорівнює $Z = 27$. Цим елементом є кобальт.

Відповідь: $Z = 27$ – кобальт.

Задача 77-1

Електрон, початковою швидкістю якого можна знехтувати, пройшов прискорювальну різницю потенціалів U . Знайти довжину хвилі де Бройля λ для двох випадків: 1) $U_1 = 60 \text{ В}$; 2) $U_2 = 600 \text{ кВ}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\lambda - ?$	Довжина хвилі де Бройля λ частинки залежить від її імпульсу p і визначається виразом
$U_1 = 60 \text{ В},$ $U_2 = 600 \text{ кВ} = 6 \cdot 10^5 \text{ В}$	$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}. \quad (1)$

Імпульс частинки можна знайти, якщо відома її кінетична енергія W_K . Зв'язок імпульсу з кінетичною енергією для нерелятивістського (коли $W_K \leq W_0$) і релятивістського (коли $W_K \approx W_0$) випадків визначається співвідношеннями

$$p = \sqrt{2m_0W_K}, \quad p = \frac{1}{c}\sqrt{W_K(W_K + 2W_0)},$$

де $W_0 = m_0c^2$ – енергія спокою частинки.

Вираз (1) з урахуванням цих співвідношень запишеться у нерелятивістському та релятивістському випадках таким чином:

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0W_K}}, \quad \lambda_2 = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{W_K(W_K + 2W_0)}}. \quad (2)$$

Порівняємо кінетичні енергії електронів, що пройшли задані в умові задачі різниці потенціалів $U_1 = 60 \text{ В}$ і $U_2 = 600 \text{ кВ}$, з енергією спокою електрона і залежно від цього зробимо висновок, яку з наведених формул необхідно використовувати для розрахунків довжини хвилі де Бройля.

Кінетична енергія електрона, що пройшов прискорювальну різницю потенціалів U , дорівнює

$$W_K = |e|U. \quad (3)$$

Задача 77-2

У першому випадку

$$W_{K1} = |e|U_1 = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 60 \text{ Дж} = 60 \text{ eB} = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ MeB},$$

тобто енергія набагато менша від енергії спокою електрона $W_0 = m_0 c^2 = 0,51 \text{ MeB}$. Тому для розрахунків можна використати нерелятивістську формулу.

У другому випадку кінетична енергія

$$W_{K2} = |e|U_2 = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^5 \text{ Дж} = 0,6 \text{ MeB},$$

тобто більша за енергію спокою електрона. Тому в цьому випадку необхідно використати релятивістську формулу.

З урахуванням виразу (3) співвідношення (2) наберуть вигляду

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 eU_1}}, \quad \lambda_2 = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{eU_2(eU_2 + 2m_0 c^2)}}. \quad (4)$$

Після підставлення числових значень фізичних величин у співвідношення (4) одержимо відповідь

$$\lambda_1 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 60}} = 1,58 \cdot 10^{-10} (\text{м}),$$
$$\lambda_2 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{(2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 + 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^5) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^5}} = 1,26 \cdot 10^{-12} (\text{м}).$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$[\lambda] = \frac{[\hbar]}{\sqrt{[m][e][U]}} = \frac{1 \text{ Дж} \cdot \text{с}}{\sqrt{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В}}} = \sqrt{\frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ кг}}} 1 \text{ с} = \sqrt{\frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2}{1 \text{ кг}}} 1 \text{ с} = 1 \text{ м}.$$

Відповідь: $\lambda_1 = 158 \text{ пм}$; $\lambda_2 = 1,26 \text{ пм}$.

Задача 78

Визначити товщину шару половинного ослаблення $d_{1/2}$ паралельного пучка γ -випромінювання для води, якщо лінійний коефіцієнт поглинання води для цього випромінювання дорівнює $\mu = 0,047 \text{ см}^{-1}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\frac{d_{1/2} - ?}{\mu = 0,047 \text{ см}^{-1}}$	При проходженні γ -випромінювання через шар речовини його поглинання здійснюється за рахунок трьох факторів: фотоефекту, ефекту Комптона та утворення пар (електрон – позитрон). Унаслідок дії цих трьох факторів інтенсивність γ -випромінювання зменшується за експонентою залежно від товщини шару:
---	--

$$I = I_0 e^{-\mu d}. \quad (1)$$

Після проходження шару води, товщина якого дорівнює товщині шару половинного ослаблення $d_{1/2}$, інтенсивність пучка γ -випромінювання буде дорівнювати $I = I_0/2$, тоді після підставлення у вираз (1) та виконання низки нескладних перетворень одержимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I_0 = I_0 e^{-\mu d} &\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\mu d_{1/2}} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = \ln e^{-\mu d_{1/2}} \Rightarrow -\ln 2 = -\mu d_{1/2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}. \end{aligned} \quad (2)$$

Підставимо в одержаний вираз (2) значення $\ln 2$ та коефіцієнта поглинання μ та проведемо розрахунки:

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{4,7} = 0,147 \text{ м}.$$

Таким чином, шар води товщиною $d_{1/2} = 0,147 \text{ м}$ зменшує інтенсивність γ -випромінювання вдвічі.

Відповідь: $d_{1/2} = 0,147 \text{ м}$.

Задача 79-1

На поверхню води падає гамма-випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 0,414 \text{ нм}$. На якій глибині інтенсивність випромінювання зменшиться вдвічі?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$\begin{array}{l} d_{1/2} - ? \\ \mu = 0,047 \text{ см}^{-1} \end{array}$$

При проходженні γ -випромінювання через шар речовини його поглинання здійснюється за рахунок трьох факторів: фотоефекту, ефекту Комптона та утворення пар (електрон – позитрон). Унаслідок дії цих

трьох факторів інтенсивність γ -випромінювання зменшується за експонентою залежно від товщини шару:

$$I = I_0 e^{-\mu d}. \quad (1)$$

Після проходження шару води, товщина якого дорівнює товщині шару половинного ослаблення $d_{1/2}$, інтенсивність пучка γ -випромінювання буде дорівнювати $I = I_0/2$, тоді після підставлення у вираз (1) та виконання низки нескладних перетворень одержимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} I_0 = I_0 e^{-\mu d} &\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\mu d_{1/2}} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = \ln e^{-\mu d_{1/2}} \Rightarrow -\ln 2 = -\mu d_{1/2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для визначення коефіцієнта лінійного поглинання обчислимо енергію фотонів гамма-квантів:

$$W_\phi = \frac{hc}{\lambda}. \quad (3)$$

Підставимо у вираз (3) числові значення фізичних величин та одержимо

$$W_\phi = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4,14 \cdot 10^{-13}} = 4,8 \cdot 10^{-13} \text{ (Дж)} = 3 \text{ (МеВ)}.$$

За таблицею 5.1 залежності лінійного коефіцієнта поглинання гамма-променів від їх енергії знаходимо $\mu = 0,039 \text{ (см}^{-1}\text{)}$.

Підставимо у вираз (2) числові значення $\ln 2$, коефіцієнта поглинання μ та одержимо

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = 0,178 \text{ (м)}.$$

Таким чином, шар води товщиною $d_{1/2} = 0,178 \text{ м}$ зменшує інтенсивність γ -випромінювання з енергією $W_\phi = 3 \text{ МеВ}$ удвічі.

Відповідь: $d_{1/2} = 0,178 \text{ м}$.

Задача 80

На поверхню води падає γ -випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 0,414 \text{ нм}$. На якій глибині інтенсивність випромінювання зменшується вдвічі?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Згідно із законом поглинання

$x = ?$ $\lambda = 0,414 \text{ нм} = 4,14 \cdot 10^{-13} \text{ м};$ $I_0/I = 2$	γ -випромінювання речовиною $I = I_0 e^{-\mu x}. \quad (1)$
---	---

Розв'язуючи рівняння відносно x , обчислимо

$$x = \frac{1}{\mu} \ln \frac{I_0}{I}. \quad (2)$$

Для визначення коефіцієнта лінійного послаблення знайдемо енергію фотонів

$$W_\phi = \frac{hc}{\lambda}. \quad (3)$$

Підставимо в (3) числові значення та одержимо

$$W_\phi = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4,14 \cdot 10^{-13}} = 4,8 \cdot 10^{-13} (\text{Дж}) = 3 (\text{МеВ}).$$

За графіком на рисунку 5.1 знайдемо коефіцієнт поглинання води для енергії кванта $W_\phi = 3 (\text{МеВ})$, він дорівнює $\mu = 0,02 \text{ см}^{-1} = 2 \text{ м}^{-1}$. Підставимо одержане значення у формулу (2):

$$x = \frac{1}{2} \ln 2 = 0,35 (\text{м}).$$

Відповідь: $x = 0,35 \text{ м}$.

Задача 81

Іонний струм у циклотроні під час роботи з α -частинками $I = 15 \text{ мкА}$. У скільки разів такий циклотрон продуктивніший за $m = 1 \text{ г}$ радію $^{226}_{88}\text{Ra}$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$n_2/n_1 - ?$	
$m = 1 \text{ г} = 10^{-3} \text{ кг},$	Знайдемо, яку кількість α -частинок випромінює за 1 секунду $m = 1 \text{ г}$ радію. Кількість атомів, які розпалися за час t , дорівнює
$I = 15 \text{ мкА} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ А},$	
$q_\alpha = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Кл},$	
$T_{1/2} = 1,62 \cdot 10^3 \text{ р} = 5,11 \cdot 10^{10} \text{ с}$	

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}).$$

Якщо проміжок часу $\Delta t \ll T_{1/2}$, то для визначення кількості атомів, які розпалися, можна використовувати наближену формулу

$$\Delta N \approx \lambda N \Delta t.$$

Кількість атомів, яка міститься в радіоактивному ізотопі, дорівнює

$$N = \frac{m}{M} N_A,$$

де m – маса ізотопу; M – його молярна маса; N_A – стала Авогадро.

Період піврозпаду пов'язаний зі сталою розпаду співвідношенням

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Тоді кількість α -частинок випромінює за 1 секунду m радію, що дорівнює

$$n_1 = \Delta N \approx \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m}{M} N_A \Delta t.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержане співвідношення та проведемо розрахунки:

$$n_1 = \frac{\ln 2}{5,11 \cdot 10^{10}} \cdot \frac{10^{-3}}{226 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 1 = 3,61 \cdot 10^{10} (\text{с}^{-1}).$$

Струм $I = 15 \text{ мкА}$ відповідає потоку α -частинок $n_2 = I/q_\alpha$

$$n_2 = 1,5 \cdot 10^{-5} / 3,2 \cdot 10^{-19} = 4,7 \cdot 10^{13} (\text{с}^{-1}).$$

Таким чином, цей циклотрон продуктивніший за $m = 1 \text{ г}$ радію в

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{4,7 \cdot 10^{13}}{3,7 \cdot 10^{10}} = 1270 \text{ разів.}$$

Відповідь: $n_2/n_1 = 1270$.

Задача 82

Електрон і позитрон, утворені фотоном з енергією $W = 5,7 \text{ MeB}$, рухаються в камері Вільсона, що міститься в магнітному полі, за траєкторіями з радіусом кривизни $R = 3 \text{ см}$. Визначити магнітну індукцію B поля.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$n_2/n_1 - ?$	Кінетична енергія електрона (позитрона) дорівнює $W_K = 0,5(W - W_0)$, де W_0 – енергія спокою електрона. Енергія спокою електрона дорівнює $W_0 = 0,511 \text{ MeB}$.
$W = 5,7 \text{ MeB} = 9,12 \cdot 10^{-13} \text{ Дж};$	На електрон (позитрон) у магнітному полі діє сила Лоренца, модуль якої дорівнює
$R = 3 \text{ см} = 0,03 \text{ м}$	

$$qBv = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow B = \frac{mv}{qR} \Rightarrow B = \frac{p}{qR}. \quad (1)$$

Згідно з теорією відносності імпульс частинки $p = mv$ пов'язаний з її кінетичною енергією співвідношенням

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{W_K(W_K + 2m_0c^2)}, \quad (2)$$

де m_0 – маса спокою частинки.

Підставимо вираз (2) у співвідношення (1) та одержимо вираз для індукції магнітного поля, що діє на частинки в камері Вільсона:

$$B = \frac{1}{qcR} \sqrt{W_K(W_K + 2m_0c^2)} \Rightarrow \frac{1}{qcR} \sqrt{0,5(W - W_0)(0,5(W - W_0) + 2m_0c^2)}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та проведемо розрахунки:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} \times \\ &\times \sqrt{0,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} (5,7 - 0,511) (0,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} (5,7 - 0,511) + 1,022 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13})} = \\ &= \frac{1,6 \cdot 10^{-13}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 9 \cdot 10^6} \cdot \sqrt{0,5(5,7 - 0,511)(0,5(5,7 - 0,511) + 1,022)} = \\ &= \frac{1}{9} \cdot \sqrt{2,59(2,59 + 1,022)} = 0,34 \text{ (Тл)}. \end{aligned}$$

Відповідь: $B = 0,34 \text{ Тл}$.

Задача 83

Позитрон та електрон анігілюють з утворенням двох фотонів. Визначити:
а) енергію кожного з утворених фотонів за умови, що кінетична енергія електрона та позитрона до їх зіткнення дорівнювала нулю; б) довжину хвилі цих фотонів.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$\left. \begin{array}{l} \omega - ? \\ m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \end{array} \right|$$

Запишемо реакцію, яка відбулася:

$$e_{-1}^0 + e_1^0 \rightarrow 2\gamma.$$

Енергія γ -квантів, що утворилися, згідно з формулою Ейнштейна для зв'язку маси та енергії дорівнює

$$2W_\phi = 2m_e c^2 \Rightarrow W_\phi = m_e c^2,$$

де m_e – маса спокою електрона (позитрона); c – швидкість світла у вакуумі.

Підставимо числові значення фізичних величин в одержане співвідношення та визначимо енергію фотона:

$$W_\phi = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 8,19 \cdot 10^{-14} \text{ (Дж)} = 0,51 \text{ (MeV)}.$$

Із формули для енергії фотона визначимо його довжину хвилі

$$W_\phi = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{W_\phi},$$

де $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж/с}$ – стала Планка.

Підставимо числові значення фізичних величин в одержане співвідношення та виконаємо обчислення:

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{8,19 \cdot 10^{-14}} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ (м)}.$$

Відповідь: а) енергія кожного фотона – $W_\phi = 0,51 \text{ MeV}$; б) $\lambda = 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ м}$.