

Задача 36

Паралельний пучок моноенергетичних електронів спрямований на вузьку щілину шириною $b = 1 \text{ мкм}$. Визначити швидкість цих електронів, якщо на екрані, який міститься на відстані $l = 20 \text{ см}$ від щілини, ширина центрального дифракційного максимуму дорівнює $\Delta x = 48 \text{ мкм}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

v -?
$m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг},$
$b = 1 \text{ мкм} = 10^{-6} \text{ м},$
$l = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м},$
$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж/с},$
$\Delta x = 48 \text{ мкм} = 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}$

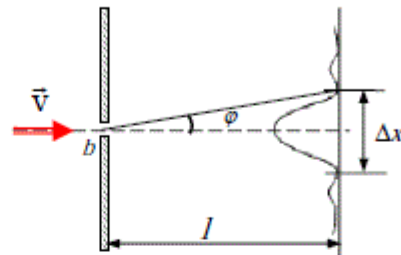


Рисунок 2.3 – До задачі 2.2

Умова мінімумів при дифракції на щілині

$$b \sin \varphi = \pm k \lambda, \quad (1)$$

де b – ширина щілини; φ і k – кут і порядок дифракції; λ – довжина хвилі. В умові цієї задачі $k = 1$, тоді $\sin \varphi = \lambda/b$. З рисунка 2.3 знаходимо, що ширина центрального дифракційного максимуму дорівнює $\Delta x = 2l \tan \varphi$. Оскільки кут φ є малим ($\Delta x \ll l$), то $\sin \varphi = \tan \varphi$. Отже,

$$\Delta x = 2l \sin \varphi = \frac{2l \lambda}{b} \Rightarrow \lambda = \frac{\Delta x b}{2l}. \quad (3)$$

Довжина хвилі де Бройля λ частинки залежить від її швидкості й визначається виразом

$$\lambda = \frac{2\pi \hbar}{mv} \Rightarrow v = \frac{2\pi \hbar}{m \lambda} = \frac{4\pi \hbar l}{m \Delta x b}. \quad (4)$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та проведемо розрахунки:

$$v = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 0,2}{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 4,8 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6}} = 6,06 \cdot 10^6 \text{ (м/с)} = 6,06 \text{ (Мм/с)}.$$

Відповідь: $v = 6,06 \text{ Мм/с}$.

Задача 37

Кінетична енергія електрона в атомі водню приблизно дорівнює $W_K = 10 \text{ eB}$. Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити мінімальні лінійні розміри атома.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\frac{l_{\min} - ?}{W_K = 10 \text{ eB} = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}}$	Для розв'язування задачі використаємо співвідношення невизначеностей $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$
--	--

де Δx – невизначеність координати частинки; Δp_x – невизначеність імпульсу частинки; $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

Нехай атом має лінійні розміри l , тоді електрон атома перебуватимедесь у межах цієї області з похибкою

$$\Delta x = l/2.$$

У цьому випадку співвідношення невизначеностей набирає вигляду

$$\frac{l}{2} \Delta p_x \geq \hbar,$$

звідси

$$l \geq \frac{2\hbar}{\Delta p_x}. \quad (1)$$

Фізично розумна невизначеність імпульсу Δp_x не повинна перевищувати значення самого імпульсу p_x , тобто $\Delta p_x \leq p_x$. Імпульс p_x пов'язаний із кінетичною енергією W_K співвідношенням

$$p_x = \sqrt{2mW_K}.$$

Підставивши ці вирази у (1) та перейшовши від нерівності до рівності, одержимо

$$l_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mW_K}}.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо відповідь

$$l_{\min} = \frac{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10}} = 1,23 \cdot 10^{-10} (\text{м}).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$\frac{[\hbar]}{\sqrt{[m][W_K]}} = \frac{1 \text{ Дж} \cdot \text{с}}{\sqrt{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ Дж}}} = \sqrt{\frac{1 \text{ Дж} \cdot \text{с}}{1 \text{ кг}}} \cdot 1 \text{ с} = \sqrt{\frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2}{1 \text{ кг}}} \cdot 1 \text{ с} = 1 \text{ м}.$$

Відповідь: $l_{\min} = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$

Задача 38

Електрон із кінетичною енергією $W_K = 15 \text{ eB}$ локалізований в області розміром $l = 1 \text{ мкм}$. Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей відносну невизначеність його швидкості.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta v_x / v_x - ?$	Співвідношення Гейзенберга має вигляд	невизначеностей
$W_K = 15 \text{ eB} = 2,4 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$	$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$	(1)
	де Δx – невизначеність координати електрона; Δp_x – невизначеність його імпульсу.	

Врахуємо, що імпульс частинки дорівнює

$$p = mv \Rightarrow \Delta p = m \Delta v_x. \quad (2)$$

Підставимо вираз (1) в (2) та одержимо

$$\Delta x m \Delta v_x \geq \hbar.$$

Врахуємо, що $\Delta x = d/2$.

$$\frac{d}{2} m \Delta v_x \geq \hbar,$$

звідси

$$\Delta v_x \geq \frac{2\hbar}{md}. \quad (3)$$

Імпульс частинки пов'язаний із його кінетичною енергією виразом

$$p = mv = \sqrt{2mW_K}.$$

Із рівняння знайдемо, що

$$v = \sqrt{\frac{2mW_K}{m^2}} = \sqrt{\frac{2W_K}{m}}. \quad (4)$$

Відносну невизначеність швидкості електрона визначимо розділивши рівняння (3) на (4):

$$\frac{\Delta v_x}{v} = \frac{2\hbar}{md \sqrt{\frac{2W_K}{m}}} = \frac{2\hbar}{d \sqrt{2mW_K}}.$$

Після підставлення числових значень величин одержимо

$$\frac{\Delta v_x}{v} = \frac{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{10^{-6} \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10}} = 3,18 \cdot 10^{-4}.$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$\frac{[\hbar]}{[d] \sqrt{[m]} [W_K]} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{м} \cdot \sqrt{\text{кг} \cdot \text{Дж}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{м}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{м}} = 1.$$

Відповідь: $\Delta v/v = 3,18 \cdot 10^{-4}$.

Задача 39

Довжина хвилі фотона, який випромінюється атомом, дорівнює $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$. Ураховуючи, що час життя збудженого стану $\Delta t = 10^{-8} \text{ с}$, визначити відношення природної ширини енергетичного рівня, на який електрон був збуджений, до енергії, випромінюваної атомом.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta W/W - ?$
$\lambda = 0,6 \text{ мкм} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м},$
$\Delta t = 10^{-8} \text{ с}$

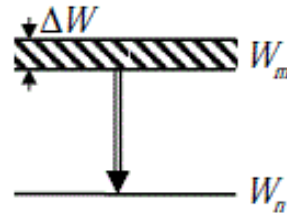


Рисунок 2.4 – До задачі 2.5

Співвідношення невизначеностей Гейзенберга для енергії та часу

$$\Delta W \Delta t \geq \hbar,$$

де ΔW – невизначеність енергії даного квантового стану; Δt – час перебування системи в цьому стані.

$$\Delta W = \hbar / \Delta t.$$

Енергія, що випромінюється атомом, дорівнює

$$W = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

тоді відношення ширини енергетичного рівня, на який електрон був збуджений, до енергії, випромінюваної атомом, дорівнює

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\hbar \lambda}{\Delta t h c} = \frac{\hbar \lambda}{2\pi \hbar c \Delta t} = \frac{\lambda}{2\pi c \Delta t}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та виконаємо розрахунки

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8}} = 3,18 \cdot 10^{-8}.$$

Відповідь: $\Delta W/W = 3,18 \cdot 10^{-8}$.

Задача 40

Атом випромінює фотон із довжиною хвилі $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$. Тривалість випромінювання $\Delta t = 10 \text{ нс}$. Визначити найменшу похибку, з якою можна виміряти довжину хвилі випромінювання.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta\lambda - ?$ $\lambda = 0,55 \text{ мкм} = 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ м},$ $\Delta t = 10^{-8} \text{ с}$	Енергія фотона дорівнює $W = \frac{hc}{\lambda}, \quad (1)$ де h – стала Планка; c – швидкість світла у вакуумі; λ – довжина хвилі випромінювання.
--	--

Продиференціюємо вираз (1) $dW = -hc \frac{d\lambda}{\lambda^2}$, тоді $\Delta W = -hc \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$, звідси

$$\Delta\lambda = \frac{|\Delta W| \lambda^2}{hc}. \quad (2)$$

Візьмемо співвідношення невизначеностей Гейзенберга для енергії та часу

$$\Delta W \Delta t \geq \hbar, \quad (3)$$

де ΔW – невизначеність енергії цього квантового стану; Δt – час перебування системи в цьому стані.

Із виразу (3) визначимо невизначеність енергії $\Delta W = \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{h}{2\pi\Delta t}$, підставимо у вираз (2) та одержимо

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi\Delta t c}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз, проведемо обчислення:

$$\Delta\lambda = \frac{0,55^2 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot \pi \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^8} = 1,6 \cdot 10^{-14} (\text{м}).$$

Відповідь: $\Delta\lambda = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ м}$.

Задача 41

Середній час життя атома у збудженому стані дорівнює $\tau = 10 \text{ нс}$. Визначити природну ширину $\Delta\lambda$ спектральної лінії ($\lambda = 12 \text{ мкм}$), що відповідає переходу між збудженими рівнями атома.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta\lambda - ?$	При переході електрона з одного стаціонарного стану в інший випромінюється (або поглинається) енергія, що дорівнює
$\lambda = 12 \text{ мкм} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ м},$	
$\tau = 10^{-8} \text{ с}$	
	$\frac{hc}{\lambda} = W_m - W_n, \quad (1)$

де h – стала Планка; c – швидкість світла у вакуумі; λ – довжина хвилі випромінювання.

З виразу (1) випливає, що невизначеність довжини хвилі $\Delta\lambda$ випромінювання пов'язана з невизначеністю енергії рівнів W_m і W_n атома співвідношенням

$$\frac{hc}{\lambda^2} \Delta\lambda = \Delta W_m + \Delta W_n. \quad (2)$$

Візьмемо співвідношення невизначеностей Гейзенберга для енергії та часу

$$\Delta W \Delta t \geq \hbar, \text{ або } \Delta W \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}, \quad (3)$$

де ΔW – невизначеність енергії цього квантового стану; Δt – невизначеність часу переходу атома з одного стаціонарного стану в інший.

Оскільки Δt не перевищує середнього часу життя τ збудженого стану атома, то мінімальна невизначеність енергії збуджених рівнів згідно з (3) дорівнює

$$\Delta W_{\min} = \frac{h}{2\pi\tau}. \quad (4)$$

З виразу (2) з урахуванням (4) знайдемо мінімальну невизначеність довжини хвилі випромінювання, що називається природною шириною спектральної лінії:

$$\Delta\lambda_{\min} = \lambda^2 \frac{\Delta W_m + \Delta W_n}{hc} = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_n} \right). \quad (5)$$

Коли один зі станів, між якими здійснюється перехід, є основним, то

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2\pi c\tau}. \quad (6)$$

Підставимо у вираз (6) числові значення й одержимо

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{(1,2 \cdot 10^{-5})^2}{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8}} = 5,2 \cdot 10^{-14} (\text{м}).$$

Відповідь: $\Delta\lambda = 5,2 \cdot 10^{-14} \text{ м}$.

Задача 42-1

Електрон перебуває у збудженому стані ($n=3$) в нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі, ширина якої l . Визначити ймовірність Ψ виявлення електрона в середній третині ями. Зобразити графічно густину ймовірності виявлення електрона у цьому стані та пояснити фізичний зміст одержаного результату.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$W - ?$	Власна функція для частинки в потенціальній ямі має вигляд
$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x,$ $n=3,$ $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$	$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right), \quad (1)$ де l – ширина ями; n – головне квантове число (номер енергетичного рівня); x – координата частинки.

У нашому випадку

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \left(\frac{3\pi}{l} x \right). \quad (2)$$

Густина ймовірності є квадратом модуля хвильової функції

Задача 42-2

$$|\psi_3(x)|^2 = \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{3\pi}{l}x\right);$$

$$|\psi_3(x)|^2 = \max \text{ за умови}$$

$$\sin^2\left(\frac{3\pi}{l}x\right) = 1 \Rightarrow \frac{3\pi}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Таким чином, координати максимумів густини ймовірності виявлення частинки

$$x = \frac{l(1/2 + k)}{3}; \Rightarrow x_1 = \frac{l}{6}, \quad x_2 = \frac{l}{2}, \quad x_3 = \frac{5l}{6}.$$

$$|\psi_3(x)|^2 = \min \text{ за умови } \sin^2\left(\frac{3\pi}{l}x\right) = 0 \Rightarrow \frac{3\pi}{l}x = \pi k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Відповідно координати мінімумів густини ймовірності виявлення частинки

$$x = kl/3, \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = l/3; \quad x_3 = 2l/3; \quad x_4 = l.$$

Графічно густина ймовірності виявлення електрона в цьому стані зображена на рисунку 2.5.

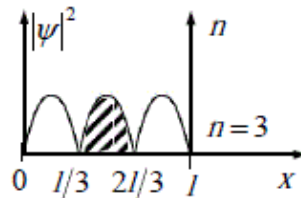


Рисунок 2.5 – Густина ймовірності виявлення електрона в потенціальному ямі на енергетичному рівні з головним квантовим числом $n=3$

Ймовірність W виявлення електрона в середній третині ями визначається інтегралом, після розв'язування якого одержимо

$$\begin{aligned} W &= \int_{l/3}^{2l/3} |\psi_3(x)|^2 dx = \int_{l/3}^{2l/3} \frac{2}{l} \sin^2 \frac{3\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{6\pi}{l} x\right) dx = \\ &= \frac{1}{l} \int_{l/3}^{2l/3} dx - \frac{1}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \cos \frac{6\pi}{l} x dx = \frac{1}{l} x \Big|_{l/3}^{2l/3} - \frac{1}{l} \frac{l}{6\pi} \sin \frac{6\pi}{l} x \Big|_{l/3}^{2l/3} = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6\pi} \left(\sin \frac{6\pi}{l} \frac{2l}{3} - \sin \frac{6\pi}{l} \frac{l}{3} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6\pi} (\sin 4\pi - \sin 2\pi) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Відповідь: $W = 1/3$.

Задача 43-1

Електрон перебуває в потенціальному ящику шириною l (рис. 2.6). В яких точках в інтервалі $(0 \leq x \leq l)$ густина ймовірності перебування електрона на першому та другому енергетичних рівнях однакова? Розрахувати густину ймовірності для цих точок.

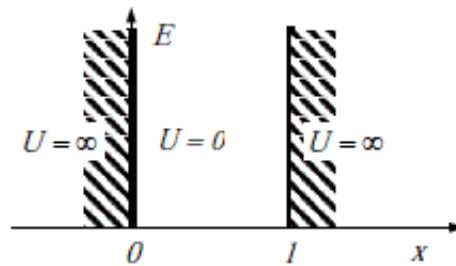


Рисунок 2.6 – Частинка в одновимірній потенціальній ямі

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$\begin{array}{|l} x - ? \quad |\psi|^2 - ? \\ \hline l \\ |\psi_1|^2 = |\psi_2|^2 \end{array}$$

Припустимо, що квантова частинка може рухатися лише вздовж осі x . При цьому рух обмежується непроникними для частинки стінками: $x=0$ і $x=l$. Потенціальна енергія в цьому випадку має вигляд, зображений на рис. 2.5: вона дорівнює нулю при $0 \leq x \leq l$ та перетворюється на нескінченність при $x < 0$ та $x > l$.

Для розв'язування задачі використаємо рівняння Шредінгера для одновимірного випадку

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} + \frac{2m}{\hbar^2} (W - U) \psi = 0. \quad (1)$$

Задача 43-2

За межі потенціальної ями частинка потрапити не може. Тому ймовірність виявлення частинки зовні ями дорівнює нулю. Відповідно і функція ψ за межами потенціальної ями повинна дорівнювати нулю. З умови неперервності випливає, що хвильова функція ψ дорівнює нулю і на межах ями, тобто

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (2)$$

Цю умову повинен задовольняти розв'язок рівняння (1).

В області $0 < x < l$, де хвильова функція не дорівнює нулю, рівняння (1) має вигляд

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} W \psi = 0 \quad (3)$$

(у цій області $U = 0$). Уведемо позначення $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} W$,

в результаті одержимо рівняння, добре відоме з теорії коливань,

$$\psi'' + k^2 \psi = 0.$$

Це диференціальне рівняння гармонічних коливань.

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha). \quad (4)$$

Умову (2) можна задовольнити відповідним вибором сталих k і α . З умови $\psi(0) = 0$ одержимо

$$\psi(0) = A \sin \alpha = 0,$$

звідси випливає, що стала α повинна дорівнювати нулю: $\alpha = 0$. Крім того, повинна виконуватись умова

$$\psi(l) = A \sin(kl + \alpha), \quad (5)$$

що можливо лише в разі, якщо

$$kl = \pm n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6)$$

Підставивши значення k у співвідношення (5), одержимо власні функції частинки в потенціальному ящику шириною l :

Задача 43-3

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (7)$$

Для знаходження коефіцієнта A використаємо умову нормування хвильової функції, яка в цьому разі має вигляд

$$A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = 1. \quad (8)$$

На кінцях проміжку інтегрування підінтегральна функція перетворюється на нуль. Тому значення інтеграла можна одержати помноживши середнє значення $\sin^2 \frac{n\pi x}{l}$ (яке, як добре відомо, дорівнює 0,5) на довжину проміжку l :

$A^2 (1/2) l = 1$, звідси $A = \sqrt{2/l}$. Таким чином, власні функції мають вигляд

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$

На першому та другому енергетичних рівнях ці функції мають вигляд

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi x}{l}. \quad (9)$$

Ймовірність перебування частинки в будь-якій точці потенціальної ями на цих рівнях визначається співвідношеннями

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \int_0^l \psi_1^2(x) dx = \int_0^l \frac{2}{l} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx, \\ \Psi_2 &= \int_0^l \psi_2^2(x) dx = \int_0^l \frac{2}{l} \sin^2 \frac{2\pi x}{l} dx. \end{aligned}$$

Згідно з умовою задачі густина ймовірності перебування квантової частинки в деяких точках на першому і другому рівнях енергії однакова, звідси $|\psi_1|^2 = |\psi_2|^2$. Після зіставлення співвідношень (9) одержимо

$$\frac{2}{l} \sin^2 \frac{\pi x}{l} = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{2\pi x}{l}.$$

Задача 43-4

Розв'язавши тригонометричне рівняння $\sin \frac{\pi x}{l} = \pm \sin \frac{2\pi x}{l}$, одержимо $x_1 = l/3$, $x_2 = 2l/3$.

Підставимо відповідні значення x у співвідношення

$$|\psi|_1^2 = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{\pi x}{l} = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{2}{l} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2l}, \quad |\psi|_2^2 = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{2\pi x}{l} = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2l}.$$

На рисунку 2.7 схематично зображені графіки розподілу хвильової функції та густини ймовірності в одновимірній потенціальній ямі на першому та другому енергетичних рівнях.

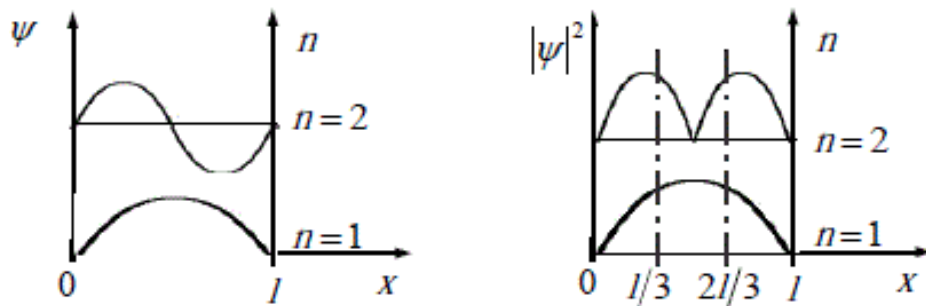


Рисунок 2.7 – Хвильова функція (ліворуч) та густина ймовірності виявлення електрона (праворуч) у потенціальній ямі на першому та другому енергетичних рівнях

Відповідь: $x_1 = l/3$; $x_2 = 2l/3$; $|\psi|^2 = \frac{3}{2l}$.

Задача 44-1

Знайти енергію основного стану атома водню.

$W = ?$ $n = 1$	РОЗВ'ЯЗАННЯ Рівняння Шредінгера для тривимірного випадку має вигляд $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0.$
---------------------------------	--

Оскільки задача є симетричною, це рівняння зручно записати у сферичних координатах. Зв'язок між декартовими та сферичними координатами має такий вигляд:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Після підставлення цих виразів рівняння Шредінгера набирає вигляду

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(W - U)\psi. \quad (1)$$

Для того щоб одержати рівняння Шредінгера для атома водню, необхідно врахувати, що потенціальна енергія електрона має вигляд $U = -ke^2/r$, де $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$. Як розв'язок диференціального рівняння хвилюву функцію візьмемо у вигляді $\psi = e^{-r/a}$. Підставляючи цей вираз у співвідношення (1) і враховуючи, що часткові похідні $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ та $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$ перетворюються на нуль, одержимо

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial (e^{-r/a})}{\partial r} \right) = -\frac{2m}{\hbar^2} \left(W + \frac{ke^2}{r} \right) e^{-r/a}.$$

Після ряду перетворень одержимо

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{r^2}{a} e^{-r/a} \right) = -\frac{2m}{\hbar^2} \left(W + \frac{ke^2}{r} \right) e^{-r/a}, \quad \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{2r}{a} \right) = -\frac{2m}{\hbar^2} \left(W + \frac{ke^2}{r} \right),$$

Задача 44-2

$$\frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} \frac{1}{r} = -\frac{2m}{\hbar^2} W - \frac{2mk_0 e^2}{\hbar^2} \frac{1}{r}. \quad (2)$$

Прирівнявши члени, що містять $1/r$, знайдемо

$$\frac{2}{a} = \frac{2mke^2}{\hbar^2},$$

звідси

$$a = \frac{\hbar^2}{mke^2}. \quad (3)$$

Прирівнявши вільні члени рівняння (2), одержимо вираз для енергії

$$W = -\frac{\hbar^2}{2ma^2},$$

Підставляючи у це рівняння співвідношення (3), одержимо кінцевий результат

$$W = -\frac{(mke^2)^2}{2m\hbar^2} = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{2\hbar^2}.$$

Після підставлення числових значень m , e , $\hbar$ знайдемо

$$W = -\left(\frac{1}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}\right)^2 \frac{9,1 \cdot 10^{-31} (1,6 \cdot 10^{-19})^4}{2(1,05 \cdot 10^{-34})^2} = -21,8 \cdot 10^{-19} (\text{Дж}) = -13,6 (\text{еВ}).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$\begin{aligned} [W] &= \frac{1}{[\epsilon_0]^2} \frac{[m][e]^4}{[\hbar]^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Кл}^4}{(\Phi/\text{М})^2 (\text{Дж} \cdot \text{с})^2} = \frac{\text{Кл}^4 \cdot \text{кг} \cdot \text{М}^2}{\Phi^2 \cdot \text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2} = \frac{\Phi^4 \cdot \text{В}^4 \cdot \text{Н} \cdot \text{М}}{\Phi^2 \cdot \text{Дж}^2} = \\ &= \frac{\Phi^2 \cdot \text{В}^4}{\text{Дж}} = \frac{\text{Кл}^2 \text{В}^4}{\text{В}^2 \text{Дж}} = \frac{\text{Кл}^2 \text{В}^2}{\text{Дж}} = \frac{\text{Дж}^2}{\text{Дж}} = \text{Дж}. \end{aligned}$$

Відповідь: $W = -13,6 \text{ еВ}$.

Задача 45

Хвильова функція $\psi = Ae^{-r/a}$ описує основний стан електрона в атомі водню: r – відстань електрона від ядра; a – перший борівський радіус. Використовуючи умову нормування ймовірностей, визначити нормувальний коефіцієнт A .

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$A - ?$	Умова нормування хвильової функції
$\psi = Ae^{-r/a},$ $a = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}$	$\int_0^{\infty} \psi(r, t) ^2 dV = 1. \quad (1)$

У нашому випадку елементарний об'єм $dV = 4\pi r^2 dr$. Квадрат модуля хвильової функції дорівнює

$$|\psi(r, t)|^2 = A^2 e^{-2r/a}, \quad (2)$$

тоді вираз (1):

$$\int_0^{\infty} A^2 e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr = 4\pi A^2 \int_0^{\infty} r^2 e^{-2r/a} dr = 1. \quad (3)$$

Із таблиці А.8 знаходимо інтеграл:

$$\int_0^{\infty} r^2 e^{-2r/a} dr = \frac{2!}{\left(\frac{2}{a}\right)^3} = \frac{a^3}{4}. \quad (4)$$

Підставимо значення інтеграла у співвідношення (3) та одержимо

$$4\pi A^2 \frac{a^3}{4} = 1 \Rightarrow A = 1/\sqrt{\pi a^3}. \quad (5)$$

Підставимо значення борівського радіуса та визначимо нормувальний коефіцієнт A :

$$A = 1/\sqrt{3,14 \cdot (5,29 \cdot 10^{-11})^3} = 1,47 \cdot 10^{15} (\text{м}^{-3/2}).$$

Відповідь: $A = 1/\sqrt{\pi a^3} = 1,47 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3/2}$.

Задача 46-1

ψ – функція частинки має вигляд $\psi = \frac{A}{r} e^{-r/a}$, де r – відстань цієї частинки від силового центра; a – стала. Визначити середню відстань $\langle r \rangle$ частинки до силового центра.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\langle r \rangle - ?$	Середнє значення фізичної величини визначається за формулою
$\psi = \frac{A}{r} e^{-r/a},$ $a = \text{const}$	$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \psi ^2 dV. \quad (1)$

У нашому випадку середня відстань $\langle r \rangle$ частинки до силового центра дорівнює

$$\langle r \rangle = \int_0^{\infty} r |\psi|^2 dV, \quad (2)$$

де dV – елементарний об'єм, $dV = 4\pi r^2 dr$. Квадрат модуля хвильової функції

$$|\psi|^2 = \frac{A^2}{r^2} e^{-2r/a}. \quad (3)$$

Нормувальний коефіцієнт A визначимо з умови нормування хвильової функції

$$\int_0^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dV = 1. \quad (4)$$

Підставимо значення елементарного об'єму та вираз (3) в умову (4) та одержимо

$$\int_0^{\infty} \frac{A^2}{r^2} e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr = 4\pi A^2 \int_0^{\infty} e^{-2r/a} dr = 1. \quad (5)$$

Інтеграл $\int_0^{\infty} e^{-2r/a} dr$ визначимо використовуючи таблицю А.8:

Задача 46-2

$$\int_0^{\infty} e^{-2r/a} dr = \frac{a}{2} e^{-2r/a} \Big|_0^{\infty} = \frac{a}{2},$$

підставимо його значення в (5) та визначимо нормувальний коефіцієнт

$$4\pi A^2 \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}. \quad (6)$$

Для визначення середньої відстані частинки до силового центра підставимо в умову (2) вирази елементарного об'єму (3) та (6):

$$\langle r \rangle = \int_0^{\infty} r \frac{A^2}{r^2} e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr = \frac{2}{a} \int_0^{\infty} r e^{-2r/a} dr. \quad (7)$$

Із таблиці А.8 знаходимо інтеграл

$$\int_0^{\infty} r e^{-2r/a} dr = \frac{1}{\left(\frac{2}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{4}, \quad (8)$$

підставимо його значення в (7) та визначимо середню відстань частинки до силового центра:

$$\langle r \rangle = \frac{2}{a} \frac{a^2}{4} = \frac{a}{2}.$$

Відповідь: $\langle r \rangle = a/2$.

Задача 47-1

Хвильова функція $\psi = Ae^{-r/a}$ описує основний стан електрона в атомі водню: r – відстань електрона від ядра; a – перший борівський радіус. Визначити середнє значення квадрата відстані $\langle r^2 \rangle$ електрона до ядра в основному стані.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\langle r^2 \rangle = ?$	Середнє значення фізичної величини визначається за формулою
$\psi = Ae^{-r/a},$ $a = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}$	$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \psi ^2 dV. \quad (1)$

У нашому випадку середня відстань $\langle r \rangle$ частинки до силового центра дорівнює

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^{\infty} r^2 |\psi|^2 dV, \quad (2)$$

де dV – елементарний об'єм,

$$dV = 4\pi r^2 dr. \quad (3)$$

Квадрат модуля хвильової функції

$$|\psi|^2 = A^2 e^{-2r/a}. \quad (4)$$

Значення нормувального коефіцієнта A визначимо з умови нормування хвильової функції (див. приклад 2.11):

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}. \quad (5)$$

З урахуванням виразів (3), (4) та (5) середня відстань (2) частинки до силового центра набере вигляду

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^{\infty} r^2 \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr = \frac{4}{a^3} \int_0^{\infty} r^4 e^{-2r/a} dr.$$

З таблиці А.8 знаходимо інтеграл

Задача 47-2

$$\int_0^{\infty} r^4 e^{-2r/a} dr = \frac{4!}{\left(\frac{2}{a}\right)^5} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 a^5}{32} = \frac{3}{4} a^5,$$

тоді

$$\langle r^2 \rangle = \frac{4}{a^3} \cdot \frac{3}{4} a^5 = 3 a^2. \quad (6)$$

Підставимо значення борівського радіуса в одержаний вираз для середнього значення квадрата відстані електрона до ядра в основному стані та проведемо розрахунки:

$$\langle r^2 \rangle = 3 \cdot 5,29^2 \cdot 10^{-22} = 8,4 \cdot 10^{-21} (\text{м}^2).$$

Відповідь: $\langle r^2 \rangle = 3 a^2 = 8,4 \cdot 10^{-21} \text{м}^2$.

Задача 48

Визначити, за якої температури дискретність енергії електрона, що перебуває в одновимірній прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками шириною $l = 2 \cdot 10^{-9} \text{ м}$, дорівнює енергії теплового руху.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$T = ?$	Енергія електрона, що перебуває в потенціальній ямі на n -му енергетичному рівні, дорівнює
$l = 2 \cdot 10^{-9} \text{ м}$	

$$W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

де l – ширина потенціальної ями.

Дискретність (різниця) ΔW енергій на n -му та $(n+1)$ -му енергетичних рівнях

$$\Delta W = W_{n+1} - W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} [(n+1)^2 - n^2] = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (n^2 + 2n + 1 - n^2) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n + 1).$$

Енергія теплового руху електрона $W = \frac{3}{2} kT$.

За умовою задачі $\Delta W = W$, звідси визначимо температуру:

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n + 1) = \frac{3}{2} kT \Rightarrow T = \frac{\pi^2 \hbar^2}{3kml^2} (2n + 1).$$

ΔW має мінімальне значення при $n=1$, тоді

$$T = \frac{\pi^2 \hbar^2}{kml^2}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин та одержимо

$$T = \frac{\pi^2 (1,05 \cdot 10^{-34})^2}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} (2 \cdot 10^{-9})^2} = 2166 (K).$$

Відповідь: $T = 2166 \text{ К}$.

Задача 49

Хвильова функція, що описує основний стан електрона в атомі водню $\psi = Ae^{-r/a}$, де r – відстань електрона від ядра; a – перший борівський радіус. Визначити найбільш імовірну відстань r_l електрона до ядра.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$r_l - ?$	Ймовірність виявити частинку в об'ємі dV дорівнює
$\psi = Ae^{-r/a},$ $a = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}$	$d\Psi = \psi(r) ^2 dV,$ (1) де dV – елементарний об'єм, $dV = 4\pi r^2 dr.$ (2)

Квадрат модуля хвильової функції

$$|\psi|^2 = A^2 e^{-2r/a}. \quad (3)$$

Тоді ймовірність

$$d\Psi = A^2 e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr = 4\pi A^2 r^2 e^{-2r/a} dr. \quad (4)$$

Густина ймовірності дорівнює

$$w = \frac{d\Psi}{dr} = 4\pi A^2 r^2 e^{-2r/a}. \quad (5)$$

Найбільш імовірна швидкість визначається з умови $\frac{dw}{dr} = 0$.

Знайдемо похідну від густини ймовірності:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dr} &= 4\pi A^2 r^2 e^{-2r/a} = 4\pi A^2 \frac{d}{dr} (r^2 e^{-2r/a}) = 4\pi A^2 \left(2r e^{-2r/a} - r^2 e^{-2r/a} \frac{2}{a} \right) = \\ &= 8\pi A^2 r e^{-2r/a} \left(1 - \frac{r}{a} \right) \end{aligned}$$

та прирівнюємо її до нуля:

$$8\pi A^2 r e^{-2r/a} \left(1 - \frac{r_l}{a} \right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{r_l}{a} = 0 \Rightarrow r_l = a.$$

Ураховуючи, що a – борівський радіус, дійдемо висновку

$$r_l = a = 5,29 \cdot 10^{-11} (\text{м}).$$

Відповідь: $r_l = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}.$

Задача 50-1

Хвильова функція, що описує основний стан електрона в атомі водню, має вигляд $\psi = Ae^{-r/a}$, де r – відстань електрона від ядра; A і a – сталі.

Визначити:

- сталі A і a ;
- енергію електрона W_1 ;
- найбільш імовірну відстань між електроном і ядром;
- середнє значення модуля кулонівської сили, що діє на електрон;
- середнє значення потенціальної енергії електрона в полі ядра.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$\begin{array}{l} A - ? \quad a - ? \quad W_1 - ? \\ r - ? \quad \langle F_K \rangle - ? \quad U - ? \end{array}$$

Значення нормувальної сталої A візьмемо з прикладу 2.11:

$$\psi = Ae^{-r/a}$$

$$A = 1/\sqrt{\pi a^3}. \quad (1)$$

задачі

Підставимо вираз для хвильової функції з умови

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \quad (2)$$

у рівняння Шредінгера для стаціонарних станів

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 r} + \frac{2m}{\hbar^2} (W - U) \psi = 0. \quad (3)$$

Потенціальна енергія електрона в кулонівському полі

$$U = \frac{-ke^2}{r}, \quad (4)$$

де $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$; e – заряд електрона; ϵ_0 – електрична стала.

Після ряду перетворень одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 r} &= \frac{\partial^2}{\partial^2 r} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}, \\ \frac{1}{a^2} \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{ke^2}{r} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} &= 0, \end{aligned}$$

Задача 50-2

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right) + \frac{2}{r}\left(+\frac{kme^2}{\hbar^2 r}\right) = 0,$$

$$a = \frac{\hbar^2}{kme^2} \quad W = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}. \quad (5)$$

При $n=1$

$$W_1 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} = -\frac{ke^2}{2} = -2\pi\epsilon_0 e^2. \quad (6)$$

Ймовірність того, що частинка міститься між двома нескінченно близькими сферичними поверхнями з радіусами r і $r+dr$, визначається виразом

$$d\Psi = 4\pi |\psi(r)|^2 r^2 dr. \quad (7)$$

З виразу (7) випливає, що найбільш імовірна відстань між електроном і ядром відповідає максимуму функції $d\Psi/dr$. Продиференціюємо цю функцію та прирівняємо її до нуля:

$$\frac{d}{dr} \left[4\pi \left| \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \right|^2 r^2 \right] = 0,$$

$$4\pi \left[\frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a} \left(-\frac{2}{a} \right) r^2 + \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a} 2r \right] = 0 \Rightarrow e^{-2r/a} 2r \left[\left(-\frac{1}{a} \right) r + 1 \right] = 0.$$

Таким чином, найімовірніша відстань дорівнює

$$r_l = a.$$

Середнє значення модуля кулонівської сили $F(r) = ke^2/r^2$, що діє на електрон, визначається формулою

$$\langle F_K \rangle = \int_0^\infty F(r) |\psi|^2 4\pi r^2 dr = \frac{4ke^2}{a^3} \int_0^\infty e^{-2r/a} dr = \frac{4ke^2}{a^3} \frac{a}{2} = \frac{2ke^2}{a^2}.$$

Аналогічно визначається середнє значення потенціальної енергії $U(r) = -ke^2/r$:

$$\langle U \rangle = \int_0^\infty U(r) |\psi|^2 4\pi r^2 dr = -4\pi \int_0^\infty \frac{ke^2}{r} e^{-2r/a} r^2 dr = -\frac{4\pi ke^2}{\pi a^3} \int_0^\infty r e^{-2r/a} dr = -\frac{ke^2}{a}.$$

Відповідь: а) $A = 1/\sqrt{\pi a^3}$; $a = \hbar^2/kme^2$; б) $W_1 = -2\pi\epsilon_0 e^2$; в) $r_l = a$;

г) $\langle F_K \rangle = 2ke^2/a^2$; д) $\langle U \rangle = -ke^2/a$.

Задача 51

Визначити енергію Фермі для міді, виходячи з припущення, що кількість вільних електронів дорівнює кількості атомів металу.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\varepsilon_F - ?$	Енергія Фермі у металі при $T = 0$ визначається співвідношенням
$\rho = 8,93 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3,$	
$M = 63,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	

$$W_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}, \quad (1)$$

де m – маса електрона; n – концентрація вільних носіїв; $\hbar$ – стала Планка – Дірака; $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$.

Концентрація атомів міді дорівнює

$$n = \frac{\rho N_A}{M}, \quad (2)$$

де N_A – стала Авогадро; ρ – густина міді; M – молярна маса міді.

Підставимо формулу (2) у співвідношення (1) та одержимо

$$W_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 \rho N_A}{M} \right)^{2/3}.$$

Виконаємо перевірку розмірності

$$\begin{aligned} [W_F] &= \frac{[\hbar]^2}{[m]} \left(\frac{[\rho][N_A]}{[M]} \right)^{2/3} = \frac{(\text{Дж} \cdot \text{с})^2}{\text{кг}} \left(\frac{[\text{кг/м}^3][\text{моль}^{-1}]}{[\text{кг/моль}]} \right)^{2/3} = \\ &= \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}^2} = \text{Дж}. \end{aligned}$$

Підставимо числові значення та виконаємо розрахунки

$$W_F = \frac{1,05^2 \cdot 10^{-68}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \left(\frac{3 \cdot 3,14^2 \cdot 8,93 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{63,5 \cdot 10^{-3}} \right)^{2/3} = 1,13 \cdot 10^{-18} (\text{Дж}).$$

Відповідь: $W_F = 1,13 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$.

Задача 52

Визначити ширину забороненої зони власного напівпровідника ΔW , якщо за температури $T_1 = 27^\circ\text{C}$ і $T_2 = 127^\circ\text{C}$ його опір відповідно дорівнює $R_1 = 157\text{ кОм}$ та $R_2 = 10\text{ Ом}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta W - ?$	Залежність питомої електропровідності від температури визначається за законом
$T_1 = 27^\circ\text{C} = 300\text{ K},$	$\sigma = \sigma_0 e^{\frac{\Delta W}{kT}}, \quad (1)$ де ΔW – ширина забороненої зони; k – стала Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}\text{ Дж/К}$.
$T_2 = 127^\circ\text{C} = 400\text{ K},$	
$R_1 = 157\text{ кОм} = 1,57 \cdot 10^5\text{ Ом},$	
$R_2 = 10\text{ Ом}$	

Знайдемо зв'язок між питомою електропровідністю та опором

$$\sigma = \frac{1}{\rho}, \quad R = \rho \frac{l}{S} \Rightarrow \rho = R \frac{S}{l} \Rightarrow \sigma = \frac{l}{RS}. \quad (2)$$

Визначимо відношення питомих електропровідностей для різних температур з урахуванням співвідношення (1):

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \frac{l}{R_1 S} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{l}{R_2 S} \Rightarrow \frac{\sigma_2}{\sigma_1} &= \frac{R_1}{R_2} \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sigma_0 e^{\frac{\Delta W}{kT_2}}}{\sigma_0 e^{\frac{\Delta W}{kT_1}}} &= e^{\frac{\Delta W}{k} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)} \Rightarrow \frac{\Delta W}{k} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) = \ln \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta W &= \frac{k}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \ln \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \Delta W = \frac{k T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{R_1}{R_2}. \end{aligned}$$

Підставимо значення фізичних величин в останній вираз та одержимо

$$\Delta W = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 400}{400 - 300} \ln \frac{1,57 \cdot 10^5}{10} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ (Дж)} = 1 \text{ (eВ)}.$$

Відповідь: $\Delta W = 1 \text{ eВ}$.

Задача 53

Питома провідність кремнію дорівнює $\sigma_1 = 19 \text{ См/м}$ за температури $T_1 = 600 \text{ К}$ і $\sigma_2 = 4095 \text{ См/м}$ за температури $T_2 = 1200 \text{ К}$. Визначити ширину ΔW забороненої зони для кремнію.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta W - ?$	Залежність питомої електропровідності власного напівпровідника від температури визначається за формулою
$\sigma_1 = 19 \text{ См/м},$ $T_1 = 600 \text{ К},$ $\sigma_2 = 4095 \text{ См/м},$ $T_2 = 1200 \text{ К}$	$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right), \quad (1)$

де ΔW – ширина забороненої зони матеріалу; γ_0 – стала, на значення якої температура практично не впливає; k – стала Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$.

Злогарифмуємо вираз (1) та одержимо

$$\ln \sigma = \ln \sigma_0 + \ln \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right) \Rightarrow \ln \sigma = \ln \sigma_0 - \frac{\Delta W}{2kT}.$$

$$\ln \sigma_1 = \ln \sigma_0 - \frac{\Delta W}{2kT_1}, \quad \ln \sigma_2 = \ln \sigma_0 - \frac{\Delta W}{2kT_2}.$$

Знайдемо різницю логарифмів

$$\ln \sigma_2 - \ln \sigma_1 = \frac{\Delta W}{2k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right).$$

Тоді ширина забороненої зони

$$\Delta W = 2k \frac{\ln \sigma_2 / \sigma_1}{(1/T_1 - 1/T_2)}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин та виконаємо розрахунки

$$\Delta W = 2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\ln 4095/19}{(1/600 - 1/1200)} = 1,78 \cdot 10^{-19} (\text{Дж}) = 1,11 (\text{еВ}).$$

Відповідь: $\Delta W = 1,78 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,11 \text{ еВ}$.

Задача 54

Визначити концентрацію n вільних електронів у металі, якщо відомо, що при густині струму провідності $j = 5 \text{ A/cm}^2$ середня швидкість спрямованого руху електронів дорівнює $\langle v \rangle = 0,05 \text{ cm/c}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$n - ?$	Густина струму пов'язана із середньою швидкістю спрямованого руху $\langle v \rangle$ співвідношенням
$j = 5 \text{ A/cm}^2 = 5 \cdot 10^4 \text{ A/m}^2,$ $\langle v \rangle = 0,05 \text{ cm/c} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m/c},$ $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$	$j = ne\langle v \rangle,$ де n – концентрація вільних електронів у металі; e – заряд електрона.

З цього виразу визначимо концентрацію

$$n = \frac{j}{e\langle v \rangle}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин та виконаємо розрахунки:

$$n = \frac{5 \cdot 10^4}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 6,25 \cdot 10^{26} (\text{м}^{-3}).$$

Відповідь: $n = 6,25 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3}$.

Задача 55

У скільки разів зміниться у разі підвищення температури від $T_1 = 300\text{ K}$ до $T_2 = 330\text{ K}$ електропровідність власного напівпровідника, ширина забороненої зони якого дорівнює $\Delta W = 0,5\text{ eV}$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta W - ?$	Залежність питомої електропровідності власного напівпровідника від температури визначається за формулою
$T_1 = 300\text{ K},$	
$T_2 = 330\text{ K},$	
$\Delta W = 0,5\text{ eV} = 0,8 \cdot 10^{-19}\text{ Дж}$	
	$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right), \quad (1)$

де ΔW – ширина забороненої зони матеріалу; σ_0 – стала, на значення якої температура практично не впливає; k – стала Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}\text{ Дж/К}$.

Тоді

$$\sigma_1 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right),$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right),$$

звідси

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right)}{\sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right)} = \exp\left[\frac{\Delta W}{2k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Підставимо числові значення фізичних величин та виконаємо обчислення:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \exp\left[\frac{0,8 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \left(\frac{1}{300} - \frac{1}{330}\right)\right] = 2,41.$$

Відповідь: $\sigma_2/\sigma_1 = 2,41$, питома електропровідність збільшиться у 2,41 раза.

Задача 56

Зразок германію нагрівають від 0 до 17°C . Визначити, як зміниться його опір. Ширина забороненої зони германію дорівнює $\Delta W = 0,72 \text{ eB}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$R_1/R_2 - ?$	Залежність питомої електропровідності власного напівпровідника від температури визначається за формулою
$T_1 = 0^{\circ}\text{C} = 273 \text{ K},$	
$T_2 = 17^{\circ}\text{C} = 290 \text{ K},$	
$\Delta W = 0,72 \text{ eB} = 1,152 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$	$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right), \quad (1)$

де ΔW – ширина забороненої зони матеріалу; σ_0 – стала, на значення якої температура практично не впливає; k – стала Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$.

Тоді

$$\sigma_1 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right),$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right),$$

звідси

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right)}{\sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right)} = \exp\left[\frac{\Delta W}{2k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Питома провідність є оберненою величиною питомого опору $\rho = 1/\sigma$.

Опір циліндричного провідника дорівнює

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S},$$

де l – довжина провідника; S – площа його перерізу.

Зі збільшенням температури опір власного напівпровідника зменшується, відношення опорів дорівнює

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \exp\left[\frac{\Delta W}{2k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Підставимо числові значення фізичних величин та виконаємо обчислення:

$$\frac{R_1}{R_2} = \exp\left[\frac{1,152 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \left(\frac{1}{273} - \frac{1}{290}\right)\right] = 2,45.$$

Відповідь: $\sigma_2/\sigma_1 = 2,45$.

Задача 57

Опір $p-n$ -переходу, що перебуває під зворотною напругою $U = 0,1 В$, дорівнює $R = 692 Ом$. Чому дорівнює опір переходу при прямому підключенні? Температура дорівнює $T = 300 К$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$R_2 - ?$
$U = 0,1 В,$
$R_1 = 692 Ом,$
$T = 300 К$

Сила струму у $p-n$ -переході

$$I = I_s \left(e^{eU/(kT)} - 1 \right),$$

де I_s – максимальне значення зворотного струму; U – зовнішня напруга на переході; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} Кл$; k – стала Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} Дж/К = 8,625 \cdot 10^{-5} еВ/К$; T – абсолютна температура.
За законом Ома для ділянки кола опір дорівнює

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_s \left(e^{eU/(kT)} - 1 \right)}.$$

У випадку зворотного та прямого підключень маємо

$$R_1 = \frac{-U}{I_s \left(e^{-eU/(kT)} - 1 \right)} \text{ та } R_2 = \frac{U}{I_s \left(e^{eU/(kT)} - 1 \right)}.$$

$$\frac{R_2}{R_1} = -\frac{e^{-eU/(kT)} - 1}{e^{eU/(kT)} - 1} \Rightarrow R_2 = -R_1 \frac{e^{-eU/(kT)} - 1}{e^{eU/(kT)} - 1}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та проведемо розрахунки

$$R_2 = -692 \frac{e^{-1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,1 / (1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300)} - 1}{e^{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,1 / (1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300)} - 1} = 692 \frac{0,979}{46,7} = 14,5 (Ом).$$

Відповідь: $R_2 = 14,5 Ом$.

Задача 58

Опір $p-n$ -переходу, що перебуває під прямою напругою $U=1B$, дорівнює $R_1=10\text{ Ом}$. Чому дорівнює опір переходу при зворотному підключенні? Температура дорівнює $T=300\text{ K}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$R_2 - ?$
$U = 1B,$
$R_1 = 10\text{ Ом},$
$T = 300\text{ K}$

Сила струму у $p-n$ -переході

$$I = I_s \left(e^{eU/(kT)} - 1 \right),$$

де I_s – максимальне значення зворотного струму; U – зовнішня напруга на переході; $e=1,6 \cdot 10^{-19}\text{ Кл}$; k – стала Больцмана, $k=1,38 \cdot 10^{-23}\text{ Дж/К} = 8,625 \cdot 10^{-5}\text{ еВ/К}$; T – абсолютна температура.

За законом Ома для ділянки кола опір дорівнює

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_s \left(e^{eU/(kT)} - 1 \right)}.$$

У випадку прямого та зворотного підключень маємо

$$R_1 = \frac{U}{I_s \left(e^{eU/(kT)} - 1 \right)} \quad \text{та} \quad R_2 = \frac{-U}{I_s \left(e^{-eU/(kT)} - 1 \right)}.$$

$$R_2 = -R_1 \frac{e^{eU/(kT)} - 1}{e^{-eU/(kT)} - 1}.$$

Під час розрахунку врахуємо, що $e^{eU/(kT)} \gg 1 \Rightarrow e^{eU/(kT)} - 1 \approx e^{eU/(kT)}$ і $e^{-eU/(kT)} \ll 1 \Rightarrow e^{-eU/(kT)} - 1 = -1$. Тоді

$$R_2 \approx R_1 e^{eU/(kT)}.$$

Проведемо обчислення $R_2 \approx e^{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 / (1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300)} = 6,1 \cdot 10^{17} \text{ (Ом)}$.

Відповідь: $R_2 = 6,1 \cdot 10^{17} \text{ Ом}$.

Задача 59

Визначити мінімальну енергію $W_{\min}$, необхідну для утворення пари електрон – дірка в кристалі арсеніду галію $GaAs$, якщо його питома провідність змінюється в 10 разів за зміни температури від $T_1 = 20^\circ C$ до $T_2 = 3^\circ C$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$\begin{array}{l} W_{\min} - ? \\ U = 1 B, \\ R_1 = 10 \text{ Ом}, \\ T_1 = 20^\circ C = 293 K, \\ T_2 = 3^\circ C = 276 K \end{array}$$

Мінімальна енергія, необхідна для утворення пари електрон – дірка у власному напівпровіднику, дорівнює ширині забороненої зони $W_{\min} = \Delta W$. Питома провідність власних напівпровідників залежить від температури згідно з виразом

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right),$$

де ΔW – ширина забороненої зони матеріалу; σ_0 – стала, на значення якої температура практично не впливає.

Запишемо цей вираз для двох температур

$$\sigma_1 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right) \quad \text{і} \quad \sigma_2 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right).$$

Поділимо перший вираз на другий та визначимо ширину забороненої зони напівпровідника

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right)}{\exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right)} = \exp\frac{\Delta W}{2k}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) \Rightarrow \Delta W = \frac{2kT_1T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Підставимо числові значення відповідних фізичних величин в одержаний вираз та знайдемо мінімальну енергію, необхідну для утворення пари електрон – дірка в кристалі арсеніду галію $GaAs$:

$$W_{\min} = \Delta W = \frac{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293 \cdot 276}{293 - 276} \ln 10 = 3,023 \cdot 10^{-19} \text{ (Дж)} = 1,89 \text{ (eВ)}.$$

Відповідь: $W_{\min} = 1,89 \text{ eВ}$.