

Задача 1

Визначити енергію W , що випромінюється за одну хвилину зі спостережувального вікна плавильної печі, якщо її температура $T = 1,2 \text{ кК}$. Площа вікна дорівнює $S = 8 \text{ см}^2$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$W - ?$	Потік енергії, яка випромінюється із спостережувального вікна плавильної печі, дорівнює
$S = 8 \text{ см}^2 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$ $t = 1 \text{ хв} = 60 \text{ с},$ $T = 1,2 \text{ кК} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ К}$	$\Phi = R_\epsilon S.$ (1) Енергетичну світність абсолютно чорного тіла, яким можна вважати це вікно, визначимо із закону Стефана – Больцмана

$$R_\epsilon = \sigma T^4. \quad (2)$$

Енергія, що випромінюється піччю, дорівнює

$$W = \Phi_\epsilon t. \quad (3)$$

Підставивши співвідношення (2), (3) в (1), одержимо

$$W = \sigma T^4 S t.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо остаточно

$$W = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (1,2 \cdot 10^3)^4 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 60 = 5643,5 (\text{Дж}).$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$[W] = [\sigma][T]^4[S][t] = \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4) \cdot \text{К}^4 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с} = \text{Вт} \cdot \text{с} = \text{Дж}.$$

Відповідь: $W = 5643,5 \text{ Дж}$.

Задача 2

Муфельна піч, яка споживає потужність $N = 1 \text{ кВт}$, має отвір площею $S = 100 \text{ см}^2$. Визначити частку η потужності, що розсіюється стінками печі, якщо температура її внутрішньої поверхні дорівнює $T = 1 \text{ кК}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\eta - ?$	Потік енергії, що випромінюється через отвір муфельної печі, дорівнює
$N = 1 \text{ кВт} = 10^3 \text{ Вт},$ $S = 100 \text{ см}^2 = 10^{-2} \text{ м}^2,$ $T = 1 \text{ кК} = 10^3 \text{ К}$	$\Phi_e = R_e S,$ (1) де R_e – енергетична світність отвору.

Отвір муфельної печі можна розглядати як абсолютно чорне тіло, звідси, скориставшись законом Стефана – Больцмана, можна записати

$$R_e(T) = \sigma T^4. \quad (2)$$

Підставивши цей вираз у (1), одержимо

$$\Phi_e(T) = \sigma T^4 S.$$

Скориставшись законом збереження енергії, запишемо

$$\eta N = \Phi_e(T) = \sigma T^4 S.$$

Звідси

$$\eta = \frac{\sigma T^4 S}{N}.$$

Підставивши числові значення фізичних величин, одержимо відповідь:

$$\eta = \frac{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (10^3)^4 \cdot 100 \cdot 10^{-4}}{10^3} = 0,57.$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$[\eta] = \frac{[\sigma][T]^4[S]}{[N]} = ((\text{Вт}/\text{м}^2 \text{ К}^4) \cdot \text{К}^4 \cdot \text{м}^2) / \text{Вт} = 1.$$

Відповідь: $\eta = 0,57$.

Задача 3

Розрахувати справжню температуру T розжареної вольфрамової стрічки, якщо радіаційний пірометр показує температуру $T_p = 2,5 \text{ кК}$. Взяти, що поглинальна здатність для вольфраму не залежить від частоти випромінювання і дорівнює $\alpha_r = 0,35$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$T - ?$	Радіаційною температурою T_p називають температуру, за якої енергетична світність R_e^* абсолютно чорного тіла дорівнює енергетичній світності R_e тіла, що досліджується за його справжньої температури T :
$T_p = 2,5 \text{ кК} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ К},$	
$\alpha_r = 0,35$	

$$R_e^*(T_p) = R_e(T). \quad (1)$$

Для визначення енергетичної світності чорного та сірого тіл скористаємося законом Стефана – Больцмана:

$$R_e^*(T_p) = \sigma T_p^4, \quad (2)$$

$$R_e(T) = a\sigma T^4. \quad (3)$$

Підставивши вирази (2), (3) у (1), одержимо

$$\sigma T_p^4 = a\sigma T^4. \quad (4)$$

Із цього співвідношення справжня температура вольфрамової стрічки дорівнює

$$T = \frac{1}{\sqrt[4]{a}} T_p.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо

$$T = \frac{1}{\sqrt[4]{0,35}} \cdot 2,5 \cdot 10^3 = 3250 (\text{К}).$$

Відповідь: $T = 3250 \text{ К}$.

Задача 4

Мідну кульку діаметром $d = 1,2 \text{ см}$ помістили у посудину, з якої повітря відкачане і температура стінок якої близька до абсолютного нуля. Початкова температура кульки $T_0 = 300 \text{ К}$. Через який час температура кульки зменшиться вдвічі, якщо вважати, що її поверхня є абсолютно чорною?

$t - ?$	РОЗВ'ЯЗАННЯ
$d = 1,2 \text{ см} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м},$	За визначенням внутрішня енергія тіла дорівнює
$T_0 = 300 \text{ К},$	$U = mCT, \quad (1)$
$T = \frac{1}{2} T_0,$	де m і C – маса та питома теплоємність тіла
$\rho = 8960 \text{ кг/м}^3,$	відповідно; T – його термодинамічна температура.
$C = 395 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$	Маса тіла
	$m = \rho V, \quad (2)$

де ρ – його густина; V – об'єм.

Об'єм кульки

$$V = \frac{1}{6} \pi d^3, \quad (3)$$

де d – діаметр кульки.

Тоді внутрішня енергія мідної кульки визначається співвідношенням

$$U = \frac{1}{6} \pi \rho C T d^3. \quad (4)$$

Енергія, яка випромінюється кулькою за одиницю часу, дорівнює

$$\Phi_e = R_e S, \quad (5)$$

де R_e – енергетична світність поверхні кульки; $S = \pi d^2$ – площа поверхні кульки.

Оскільки поверхню кульки можна вважати абсолютно чорним тілом, то за законом Стефана – Больцмана енергетична світність дорівнює

$$R_e = \sigma T^4, \quad (6)$$

де σ – стала Стефана – Больцмана $\left[\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4) \right]$.

З урахуванням закону (6) вираз (5) набере вигляду

$$\Phi_e = \sigma T^4 \pi d^2. \quad (7)$$

Ураховуючи, що зміна внутрішньої енергії кульки за одиницю часу

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\pi \rho C d^3}{6} \cdot \frac{dT}{dt}, \quad (8)$$

повинна дорівнювати енергії випромінювання за той самий час із протилежним знаком, тобто

$$\frac{dU}{dt} = -\Phi_e. \quad (9)$$

Підставимо (7) і (8) у (9) та одержимо

$$\frac{\pi \rho C d^3}{6} \cdot \frac{dT}{dt} = -\sigma T^4 \pi d^2 \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{6 \sigma T^4}{\rho C d}.$$

Поділимо змінні в одержаному виразі

$$\frac{dT}{T^4} = -\frac{6\sigma}{\rho C d} dt$$

та виконаємо інтегрування цього виразу:

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T^4} = -\int_0^t \frac{6\sigma}{\rho C d} dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3} \frac{1}{T^3} \Big|_{T_0}^T = -\frac{6\sigma}{\rho C d} t \Big|_0^t,$$

або

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{T_0^3} - \frac{1}{T^3} \right) = -\frac{6\sigma}{\rho C d} t. \quad (11)$$

Після нескладних перетворень знайдемо час, упродовж якого температура кульки зменшиться вдвічі:

$$t = \frac{\rho C d}{18\sigma} \left(\frac{1}{T^3} - \frac{1}{T_0^3} \right).$$

Після підставлення числових значень фізичних величин в одержане співвідношення та обчислень одержимо

$$t = \frac{8960 \cdot 395 \cdot 1,2 \cdot 10^{-2}}{18 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}} \left(\frac{1}{150^3} - \frac{1}{300_0^3} \right) = 1,08 \cdot 10^4 (c) = 3(год).$$

Відповідь: $t = 3 год$.

Задача 5

Визначити, яку потужність потрібно підводити до мідної кульки діаметром $d = 2 \text{ см}$, щоб за температури довкілля $T_0 = -13^\circ \text{C}$ температура кульки дорівнювала $T = 17^\circ \text{C}$. Коефіцієнт чорноти міді $a_r = 0,6$. Прийняти, що теплові втрати обумовлені лише випромінюванням.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$N - ?$	Енергетична світність сірого тіла визначається за законом Стефана – Больцмана
$d = 2 \text{ см} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м},$ $T_0 = -13^\circ \text{C} = 260 \text{ K},$ $T = 17^\circ \text{C} = 290 \text{ K},$ $a_r = 0,6$	$R_\epsilon = a_r \sigma T^4,$ де a_r – коефіцієнт чорноти (поглинання) сірого тіла; T – термодинамічна температура; σ – стала Стефана – Больцмана $[\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{K}^4)]$.

Енергетична світність тіла визначається потужністю випромінювання з одиниці площі його поверхні

$$R_{\epsilon S} = \frac{N_S}{S},$$

тоді

$$N_S = R_{\epsilon S} S = a_r \sigma T^4 S.$$

Енергетична поглинальна здатність сірого тіла

$$N_\pi = R_{\epsilon \pi} S = a_r \sigma T_0^4 S.$$

Для того щоб температура тіла не змінювалася, до нього потрібно підводити потужність, яка дорівнює різниці потужностей випромінювання та поглинання:

$$N = N_S - N_\pi = a_r \sigma T^4 S - a_r \sigma T_0^4 S = a_r \sigma S (T^4 - T_0^4).$$

Площа поверхні кулі дорівнює

$$S = 4\pi r^2 = \pi d^2,$$

тоді

$$N = a_r \sigma \pi d^2 (T^4 - T_0^4).$$

Після підставлення числових значень фізичних величин в одержане співвідношення та обчислень одержимо

$$N = 0,6 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 3,14 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 (290^4 - 260^4) = 0,107 (\text{Вт}).$$

Відповідь: $N = 0,107 \text{ Вт}$.

Задача 6

Визначити силу струму, що проходить по вольфрамовому дроту, діаметр якого дорівнює $d = 0,8 \text{ мм}$. Дріт міститься у вакуумі, і температура дроту підтримується сталою, вона дорівнює $T = 2800^\circ \text{C}$. Питомий опір дроту за цієї температури $\rho = 9,2 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{см}$. Температура середовища, яке оточує дріт, $T_0 = 17^\circ \text{C}$. Поверхню дроту вважати сірою з поглинальною здатністю $a_r = 0,343$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$I - ?$	Потужність сталого струму за законом Джоуля – Ленца дорівнює
$d = 0,8 \text{ мм} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м},$	$N = I^2 R,$ (1)
$T_0 = 17^\circ \text{C} = 290 \text{ К},$	де I – сила струму у провіднику; R – його
$T = 2800^\circ \text{C} = 3073 \text{ К},$	електричний опір.
$a_r = 0,343,$	Знайдемо силу струму за законом Джоуля – Ленца (1):
$\rho = 9,2 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{см} =$	
$= 9,2 \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}$	

$$I = \sqrt{N/R}. \quad (2)$$

Опір провідника циліндричної форми (дроту) дорівнює $R = \rho l / S_\pi$, де ρ – питомий опір провідника; l – його довжина; S_π – площа перерізу дроту, вона

$$I = \sqrt{\frac{N \pi d^2}{4 \rho l}}, \quad (3)$$

З іншого боку, потужність, яку потрібно підводити до тіла для підтримання температури сталою, дорівнює (див. приклад 4.7):

$$N = a_r \sigma S (T^4 - T_0^4), \quad (4)$$

де S – площа бокової поверхні циліндра, вона дорівнює $S = \pi dl$.

Підставимо значення площі у співвідношення (4) та одержимо

$$N = a_r \sigma \pi dl (T^4 - T_0^4). \quad (5)$$

Підставимо одержане співвідношення (5) у вираз для сили струму (3):

$$I = \sqrt{\frac{a_r \sigma \pi dl (T^4 - T_0^4) \pi d^2}{4 \rho l}} = \sqrt{\frac{a_r \sigma \pi^2 d^3 (T^4 - T_0^4)}{4 \rho}}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в останнє співвідношення, проведемо обчислення та одержимо

$$I = \sqrt{\frac{0,343 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 3,14^2 (8 \cdot 10^{-4})^3 (3073^4 - 290^4)}{4 \cdot 9,2 \cdot 10^{-7}}} = 48,8 \text{ (А)}.$$

Відповідь: $I = 48,8 \text{ А}$.

Задача 7

Визначити величину сонячної сталої, тобто потік сонячної світлової енергії за одиницю часу через площу $S = 1 \text{ м}^2$ на орбіті Землі. Вважати, що Сонце випромінює абсолютно чорне тіло. Температура поверхні Сонця $T = 5800 \text{ К}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$P_c - ?$	За визначенням
$r = 6,95 \cdot 10^8 \text{ м},$ $R = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ м},$ $T = 5800 \text{ К}$	$P_c = W/St = N/S.$ (1)
	Енергетична світність чорного тіла визначається за законом Стефана – Больцмана

$$R_e = \sigma T^4, \quad (2)$$

де T – термодинамічна температура; σ – стала Стефана – Больцмана: $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$; N – потужність випромінювання.

Потужність, яка випромінюється з усієї поверхні Сонця, дорівнює

$$N = R_e S. \quad (3)$$

Вважаючи Сонце кулею, підставимо площу його поверхні $S = 4\pi r^2$ (r – радіус Сонця) у вираз (3) та одержимо

$$N = 4\pi R_e r^2 = 4\pi \sigma r^2 T^4. \quad (4)$$

Інтенсивність світла послаблюється обернено пропорційно квадрату відстані від джерела випромінювання, тобто сонячна стала буде дорівнювати

$$P_c = \frac{4\pi r^2 \sigma T^4}{4\pi R^2} = \frac{r^2 \sigma T^4}{R^2}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз, проведемо обчислення та одержимо величину сонячної сталої

$$P_c = \frac{7^2 \cdot 10^{16} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 5800^4}{1,4^2 \cdot 10^{22}} = 1,6 \cdot 10^3 \left(\text{Вт}/\text{м}^2 \right) = 1,6 \left(\text{кВт}/\text{м}^2 \right).$$

Відповідь: $P_c = 1,6 \text{ кВт}/\text{м}^2$.

Задача 8-1

Температура поверхні Сонця $T_0 = 5\,500\text{ K}$. Оцінити температуру Землі за умови, що вона перебуває у стані теплової рівноваги. Взяти, що поглинальна здатність Сонця і Землі дорівнює одиниці.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$T - ?$	Оскільки за умовою задачі поглинальні здатності Сонця та Землі дорівнюють одиниці, то енергетичні світності Сонця і Землі можна визначати за законом Стефана – Больцмана
$r = 6,95 \cdot 10^8\text{ м,}$	
$R = 1,49 \cdot 10^{11}\text{ м,}$	
$T_0 = 5500\text{ K}$	

$$R_{\text{ec}} = \sigma T_0^4, \quad (1)$$

де T – термодинамічна температура; σ – стала Стефана – Больцмана: $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{K}^4)$.

Потужність, яка випромінюється з усієї поверхні Сонця, дорівнює

$$N = R_{\text{ec}} S, \quad (2)$$

де S – площа поверхні Сонця.

Вважаючи Сонце кулею, підставимо площу його поверхні $S = 4\pi r^2$ (r – радіус Сонця) у вираз (2) та одержимо

$$N = 4\pi R_{\text{ec}} r^2 = 4\pi \sigma r^2 T_0^4. \quad (3)$$

N – потужність випромінювання.

Потік енергії випромінювання Сонця на одиницю тілесного кута дорівнює

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{N}{4\pi} = \sigma r^2 T_0^4. \quad (4)$$

Та частина потоку енергії, яка попадає у тілесний кут,

$$\Delta\Omega = \frac{\pi R_z^2}{R^2}, \quad (5)$$

де R_z – радіус Землі; R – її відстань від Сонця.

Задача 8-2

Таким чином, енергія випромінювання Сонця, яка поглинається Землею за одиницю часу, визначається співвідношенням

$$N' = \frac{dN}{d\Omega} \Delta\Omega = \frac{\pi \sigma r^2 R_3^2 T_0^4}{R^2}. \quad (6)$$

Енергія випромінювання Землі за одиницю часу дорівнює

$$N'' = 4\pi R_3^2 R_{\epsilon 3} = 4\pi \sigma R_3^2 T^4, \quad (7)$$

де $R_{\epsilon 3}$ – випромінювальна здатність Землі; T – температура її поверхні.

Оскільки Земля перебуває у тепловій рівновазі з довкіллям, то вирази (6) і (7) можна прирівняти. Тоді

$$\frac{\pi \sigma r^2 R_3^2 T_0^4}{R^2} = 4\pi \sigma R_3^2 T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{r^2 T_0^4}{4R^2}} = T_0 \sqrt{\frac{r}{2R}}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз, проведемо обчислення та одержимо

$$T = 5500 \sqrt{\frac{6,95 \cdot 10^8}{2 \cdot 1,49 \cdot 10^{11}}} = 266 \text{ (K)}.$$

Відповідь: $T = 266 \text{ K}$.

Задача 9

Як і в скільки разів зміниться енергетична світність абсолютно чорного тіла, якщо максимум енергії випромінювання переміститься з червоної межі видимого спектра ($\lambda_{m1} = 780 \text{ нм}$) на фіолетову ($\lambda_{m2} = 390 \text{ нм}$)?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$R_{e1}/R_{e2} - ?$	Енергетична світність абсолютно чорного тіла визначається рівнянням Стефана – Больцмана:
$\lambda_{m1} = 780 \text{ нм} = 7,8 \cdot 10^{-7} \text{ м},$	$R_e = \sigma T^4.$ (1)
$\lambda_{m2} = 390 \text{ нм} = 3,9 \cdot 10^{-7} \text{ м}$	Для знаходження температури тіла скористаємося законом зміщення Віна:

$$\lambda_m = \frac{b}{T} \Rightarrow T = \frac{b}{\lambda_m}, \quad (2)$$

де λ_m – довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінювання; b – стала закону зміщення Віна: $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$.

Підставивши вираз (2) в (1), одержимо

$$R_e = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_m} \right)^4. \quad (3)$$

Для різних довжин енергетичні світності визначаються такими виразами:

$$R_{e1} = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_{m1}} \right)^4, \quad (4)$$

$$R_{e2} = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_{m2}} \right)^4. \quad (5)$$

Поділивши рівняння (5) на (4), одержимо

$$\frac{R_{e2}}{R_{e1}} = \left(\frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}} \right)^4. \quad (6)$$

Підставивши у вираз (7) числові значення величин, одержимо

$$\frac{R_{e2}}{R_{e1}} = \left(\frac{7,8 \cdot 10^{-7}}{3,9 \cdot 10^{-7}} \right)^4 = 16.$$

Відповідь: $R_{e2}/R_{e1} = 16$.

Задача 10

ПЕРЕКЛАД 9.14

При збільшенні термодинамічної температури T абсолютно чорного тіла удвічі довжина хвилі λ_m , на яку припадає максимум випромінювальної здатності, зменшилася на $\Delta\lambda = 400\text{ нм}$. Визначити початкову і кінцеву температури T_1 і T_2 .

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$T_1 = ? \quad T_2 = ?$ $\Delta\lambda = 400\text{ нм} = 4 \cdot 10^{-7}\text{ м}$	Відповідно до закону зміщення Віна довжина, на яку припадає максимум випромінювальної здатності, дорівнює $\lambda_m = \frac{b}{T}. \quad (1)$
---	---

Для різних довжин хвиль цей вираз запишемо у вигляді

$$\lambda_{m1} = \frac{b}{T_1} \quad \text{і} \quad \lambda_{m2} = \frac{b}{T_2}. \quad (3)$$

За умовою задачі

$$\Delta\lambda = \lambda_{m1} - \lambda_{m2} = \frac{b}{T_1} - \frac{b}{T_2}. \quad (4)$$

Урахуємо, що $T_2 = 2T_1$, тоді одержимо

$$\Delta\lambda = \frac{b}{T_1} - \frac{b}{2T_1} = \frac{b}{2T_1}.$$

Звідси

$$T_1 = \frac{b}{2\Delta\lambda} \quad \text{та} \quad T_2 = 2T_1 = \frac{b}{\Delta\lambda}.$$

Підставивши в отримані вирази числові значення фізичних величин, одержимо

$$T_1 = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 400 \cdot 10^{-9}} = 3,625 \cdot 10^3 \text{ (K)} \quad \text{та} \quad T_2 = 2T_1 = 7,25 \cdot 10^3 \text{ (K)}.$$

Перевіримо розмірності одиниць одержаної величини:

$$T = \frac{[b]}{[\lambda]} = \text{м} \cdot \text{К} / \text{м} = \text{К}.$$

Відповідь: $T_1 = 3,625 \cdot 10^3 \text{ К}$; $T_2 = 7,25 \cdot 10^3 \text{ К}$.

Задача 11

Площа, обмежена графіком спектральної густини енергетичної світності чорного тіла при переході від термодинамічної температури T_1 до температури T_2 , зменшилася у 5 разів. Визначити, як зміниться при цьому довжина хвилі, що відповідає максимуму спектральної густини енергетичної світності чорного тіла.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

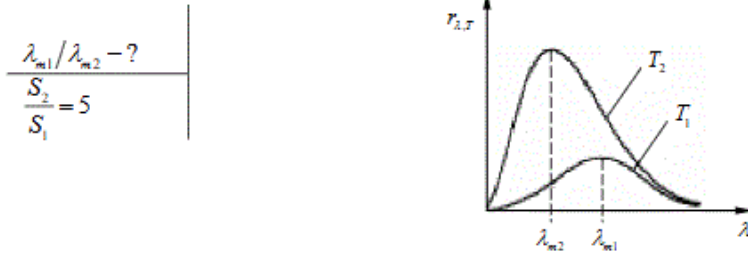


Рисунок 4.4

Площа, обмежена графіком спектральної густини енергетичної світності $r_{\lambda,T}$ чорного тіла, дорівнює за температури T_1

$$S_1 = R_{e1} = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T_1} d\lambda, \quad (1)$$

а за температури T_2

$$S_2 = R_{e2} = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T_2} d\lambda. \quad (2)$$

За законом Стефана – Больцмана

$$R_{e1} = \sigma T_1^4 \quad \text{і} \quad R_{e2} = \sigma T_2^4. \quad (3)$$

Визначимо з рівнянь (1), (2) і (3) відношення температур:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt[4]{\frac{R_{e2}}{R_{e1}}} = \sqrt[4]{\frac{S_2}{S_1}}. \quad (3)$$

Закон зміщення Віна дозволяє визначити довжину хвилі λ_m , на яку припадає максимум енергії випромінювання:

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

де b – стала закону зміщення Віна: $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$.

Тоді

$$\lambda_{m1} = \frac{b}{T_1} \quad \text{і} \quad \lambda_{m2} = \frac{b}{T_2}. \quad (4)$$

Звідки з урахуванням (3) одержимо

$$\frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}} = \frac{T_2}{T_1} = \sqrt[4]{\frac{S_2}{S_1}}.$$

Після підставлення числових даних в одержаний вираз впливає

$$\frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}} = \sqrt[4]{5} = 1,49.$$

Відповідь: зменшиться у 1,49 раза.

Задача 12

Перетворити формулу Планка для об'ємної спектральної густини випромінювання u_ω від змінної ω до змінних ν (лінійна частота) і λ (довжина хвилі).

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Енергію теплового випромінювання абсолютно чорного тіла в інтервалі частот $[\omega, \omega + d\omega]$ можна подати через об'ємну спектральну густину випромінювання

$$dW_\omega = u_\omega d\omega = u_\nu d\nu = u_\lambda d\lambda,$$

де u_ω визначається з формули Планка

$$u_\omega = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}.$$

Величини ω , ν і λ пов'язані співвідношеннями

$$\omega = 2\pi\nu, \quad d\omega = 2\pi d\nu \quad \text{і} \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \quad d\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda,$$

тобто додатному значенню $d\omega$ відповідає від'ємне значення $d\lambda < 0$.

Таким чином, вираз для dW можна переписати відповідно через $d\nu$ і $d\lambda$:

$$dW = \frac{\hbar (2\pi\nu)^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar\nu}{kT}\right) - 1} 2\pi d\nu$$

і

$$dW = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3 \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{kT\lambda}\right) - 1} \frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda.$$

Звідки випливає

$$u_\nu = \frac{16\pi^2 \hbar}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar\nu}{kT}\right) - 1}, \quad u_\lambda = \frac{16\pi^2 \hbar c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{kT\lambda}\right) - 1}.$$

Задача 13

Лазер у безперервному режимі випромінює світло з довжиною хвилі $\lambda = 600 \text{ нм}$ при потужності $P = 40 \text{ мВт}$. Скільки фотонів він випромінює за $t = 1 \text{ с}$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$N - ?$
$\lambda = 600 \text{ нм} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м},$
$P = 40 \text{ мВт} = 0,4 \text{ Вт},$
$t = 1 \text{ с}$

Енергія фотона

$$W_{\Phi} = \frac{hc}{\lambda},$$

де h – стала Планка; c – швидкість світла у вакуумі; λ – довжина світлової хвилі.

Енергія лазерного випромінювання за час t дорівнює

$$W = Pt,$$

тоді кількість фотонів, які випромінюються за час t лазером,

$$N = \frac{W}{W_{\Phi}} = \frac{Pt\lambda}{hc}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та виконаємо обчислення:

$$N = \frac{0,4 \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 1,2 \cdot 10^{18}.$$

Перевіримо розмірність одержаної величини:

$$N = \frac{[P][t][\lambda]}{[h][c]} = \frac{\text{Вт} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м}} = 1.$$

Відповідь: $N = 1,2 \cdot 10^{18}$.

Задача 14

Визначити, з якою швидкістю повинен рухатися електрон, щоб його імпульс дорівнював імпульсу фотона, довжина хвилі якого дорівнює $\lambda = 2 \text{ нм}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$n = ?$	Енергія фотона дорівнює
$\lambda = 2 \text{ нм} = 2 \cdot 10^{-12} \text{ м},$	$W = \frac{hc}{\lambda},$
$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с},$	де h – стала Планка; c – швидкість світла у вакуумі.
$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с},$	Енергія спокою електрона дорівнює
$m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$	$W_0 = m_0 c^2,$

де m_0 – маса спокою електрона.

Визначимо числові значення енергії фотона та електрона:

$$W = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{-12}} = 9,9 \cdot 10^{-14} \text{ (Дж)} = 0,62 \text{ (MeV)},$$

$$W_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} (3 \cdot 10^8)^2 = 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ [Дж]} = 0,51 \text{ (MeV)}.$$

Бачимо, що енергія фотона того самого порядку, що й енергія спокою електрона. Це означає, що потрібно використовувати релятивістську формулу для імпульсу, а саме

$$p_e = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Імпульс фотона дорівнює

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

тоді

$$\frac{m v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{h}{\lambda}.$$

Виконаємо перетворення та визначимо швидкість електрона:

$$m^2 v^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} (1 - v^2/c^2) \Rightarrow m^2 v^2 + \frac{h^2 v^2}{\lambda^2 c^2} = \frac{h^2}{\lambda^2} \Rightarrow v^2 (m^2 \lambda^2 c^2 + h^2) = h^2 c^2,$$

$$v = \frac{hc}{\sqrt{m^2 \lambda^2 c^2 + h^2}}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержане співвідношення та проведемо обчислення:

$$v = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{(9,1 \cdot 10^{-31} 2 \cdot 10^{-12} 3 \cdot 10^8)^2 + (6,63 \cdot 10^{-34})^2}} = 0,77 c = 2,31 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}.$$

Відповідь: $v = 2,31 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Задача 15

Використовуючи формулу Планка, визначити спектральну густину потоку випромінювання одиниці поверхні чорного тіла, яка припадає на вузький інтервал довжин хвиль $\Delta\lambda = 5 \text{ нм}$ біля максимуму спектральної густини енергетичної світності. Температура чорного тіла дорівнює $T = 2500 \text{ К}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\begin{aligned} (r_{\lambda,T} \cdot \Delta\lambda) - ? \\ \Delta\lambda = 5 \text{ нм} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ м}, \\ T = 2500 \text{ К} \end{aligned}$	Формула Планка для спектральної густини потоку випромінювання $r_{\lambda,T} = \frac{2\pi\hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\hbar c/(\lambda k T)} - 1}.$
--	--

де $r_{\lambda,T}$ – випромінювальна здатність чорного тіла; λ – довжина хвилі; c – швидкість світла у вакуумі; k – стала Больцмана; T – термодинамічна температура; $\hbar$ – стала Планка.

Замінімо довжину хвилі, використовуючи закон зміщення Віна: $\lambda = b/T$, де λ_m – довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінювання; b – стала закону зміщення Віна: $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$.

Тоді спектральна густина потоку випромінювання одиниці поверхні чорного тіла, яка припадає на вузький інтервал довжин хвиль $\Delta\lambda = 5 \text{ нм}$ біля максимуму спектральної густини енергетичної світності, дорівнює

$$(r_{\lambda,T} \cdot \Delta\lambda) = \frac{2\pi\hbar c^2 T^5}{b^5} \frac{\Delta\lambda}{e^{\hbar c/(\lambda k T)} - 1}.$$

Після підставлення числових даних фізичних величин в одержаний вираз випливає

$$\begin{aligned} (r_{\lambda,T} \cdot \Delta\lambda) &= \frac{2 \cdot \pi \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 9 \cdot 10^{16} \cdot 2,5^5 \cdot 10^{15}}{2,9 \cdot 10^{-15}} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-9}}{e^{\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{(2,9 \cdot 10^{-3} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23})}} - 1} = \\ &= \frac{2 \cdot \pi \cdot 6,63 \cdot 9 \cdot 2,5^5 \cdot 10^3}{2,9} \cdot \frac{5}{e^{4,97} - 1} = 4,41 \cdot 10^5 \text{ (Вт/м}^2\text{)} = 441 \text{ (кВт/м}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Відповідь: $(r_{\lambda,T} \cdot \Delta\lambda) = 441 \text{ кВт/м}^2$.

Задача 16

Потік енергії, що випромінюється електричною лампою, дорівнює $\Phi_e = 600 \text{ Вт}$. На відстані $r = 1 \text{ м}$ від лампи перпендикулярно до падаючих променів розміщене кругле плоске дзеркало діаметром $d = 2 \text{ см}$. Визначити силу світлового тиску на дзеркальце за умови, що воно повністю відбиває все випромінювання, яке на нього падає. Вважати, що випромінювання лампи однакове в усіх напрямках.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$F - ?$	За умовою задачі $d \ll r$, тому значення тілесного кута, в якому випромінювання падає на дзеркальце, можна визначити з виразу $\Omega_s = S/r^2$. Значення повного тілесного кута дорівнює $\Omega_0 = 4\pi$. У цьому куті випромінюється весь потік енергії Φ_e . Таким чином, частка потоку енергії, що випромінюється в тілесному куті Ω_s , визначається виразом
$\Phi_e = 600 \text{ Вт}$,	
$r = 1 \text{ м}$,	
$d = 2 \text{ см} = 0,02 \text{ м}$	

$$\Phi_s = \frac{\Phi_e \Omega_s}{\Omega_0} = \frac{\Phi_e S}{4\pi r^2}.$$

Площа поверхні дзеркала дорівнює $S = \pi d^2/4$,
отже,

$$\Phi_s = \frac{\Phi_e \pi d^2}{16\pi r^2} = \frac{\Phi_e d^2}{16r^2}.$$

Для визначення тиску світла використаємо вираз

$$p = \frac{I}{c}(1 + \rho),$$

де $I = \Phi_s/S$ – інтенсивність світла; ρ – коефіцієнт відбивання, для ідеального дзеркала $\rho = 1$.

З урахуванням вищезазначених виразів сила світлового тиску дорівнює

$$F = pS = \frac{I}{c}(1 + \rho)S = \frac{\Phi_s}{c}(1 + \rho) = 2 \frac{\Phi_e d^2}{16r^2 c} = \frac{\Phi_e d^2}{8cr^2}.$$

Підставимо в одержаний вираз числові значення фізичних величин та одержимо

$$F = \frac{600 \cdot 0,02^2}{8 \cdot 3 \cdot 10^8} = 0,1 \cdot 10^{-9} (\text{Н}) = 0,1 (\text{нН}).$$

Відповідь: $F = 0,1 \text{ нН}$.

Задача 17

Короткий імпульс світла, енергія якого $W = 7,5 \text{ Дж}$, падає на дзеркальну пластинку з коефіцієнтом відбивання $\rho = 0,6$. Кут падіння $\alpha = 60^\circ$. Визначити за допомогою корпускулярних уявлень, який імпульс отримує пластинка.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$\begin{array}{l} p - ? \\ W = 7,5 \text{ Дж}, \\ \rho = 0,6, \\ \alpha = 60^\circ \end{array}$$

Імпульс фотона

$$p_\phi = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

де h і $\hbar$ – стала Планка та стала Планка – Дірака; c – швидкість світла у вакуумі; ω та ν – циклічна частота та частота відповідного випромінювання.

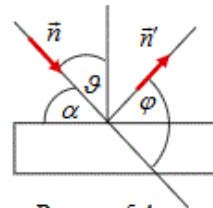


Рисунок 5.4

Повний імпульс фотонів, що налітають на пластинку, дорівнює

$$\vec{p} = N p_\phi \vec{n} = N \frac{\hbar\omega}{c} \vec{n},$$

де N – кількість фотонів у імпульсі світла; $\vec{n}$ – одиничний вектор у напрямку руху фотонів, що налітають на пластинку.

Енергія імпульсу світла дорівнює $W = N\hbar\omega$, тоді імпульс налітаючих фотонів

$$\vec{p} = N \frac{W}{c} \vec{n}.$$

Від дзеркальної пластинки з коефіцієнтом відбивання ρ відіб'ється $N' = \rho N$ фотонів. Їх загальний імпульс визначається виразом

$$\vec{p}' = N' \frac{\hbar\omega}{c} \vec{n}' = \rho N \frac{\hbar\omega}{c} \vec{n}' = \rho \frac{W}{c} \vec{n}',$$

де $\vec{n}'$ – одиничний вектор у напрямку руху відбитих фотонів. Імпульс, що передається пластинці, дорівнює

$$\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}' = \frac{W}{c} (\vec{n} - \rho \vec{n}').$$

Модуль імпульсу, що передається пластинці, визначимо підносячи вираз (3) до квадрата:

$$|\Delta\vec{p}|^2 = \frac{W^2}{c^2} (1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi),$$

де φ – кут між векторами $\vec{n}$ і $\vec{n}'$.

Із рисунка 5.4 $\varphi = \pi - 2\theta = \pi - 2(\pi/2 - \alpha) = 2\alpha$, тоді модуль імпульсу, що передається пластинці, дорівнює

$$\Delta p = \frac{W}{c} \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos 2\alpha}.$$

Підставимо в одержаний вираз числові значення фізичних величин та одержимо

$$\Delta p = \frac{7,5}{3 \cdot 10^8} \sqrt{1 + 0,6^2 - 2 \cdot 0,6 \cos 120^\circ} = 3,5 \cdot 10^{-8} (H \cdot c) = 35 (nH \cdot c).$$

Відповідь: $\Delta p = 35 nH \cdot c$.

Задача 18

Визначити

частоту ν та довжину хвилі λ у вакуумі випромінювання, маса фотонів якого дорівнює масі електрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Дано: $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг $\nu, \lambda - ?$	Розв'язання Відповідь дають формули (19.2) і (19.2а) , згідно з якими
--	---

$$\nu = \frac{mc^2}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{mc}.$$

Підставивши задане значення m та табличні константи $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, отримаємо:

$$\nu = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{6,62 \cdot 10^{-34}} \approx 1,24 \cdot 10^{20} \text{ Гц},$$

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} = 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 2,42 \text{ пм}.$$

Отримані числа відповідають найбільш високочастотній (короткохвильовій) ділянці електромагнітного спектра – гамма-випромінюванню.

Задача 19

У деякій речовині довжина хвилі світла становить $\lambda = 414$ нм при енергії фотонів $E = 2,0$ еВ ($1 \text{ еВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

Визначити

показник заломлення n цієї речовини.

Дано:

$$\lambda = 414 \text{ нм} = 4,14 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$E = 2,0 \text{ еВ} = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$n - ?$

Розв'язання

Енергія фотона визначає довжину світлової хвилі λ_0 у вакуумі (формула **(19.16)**):

$$E = \frac{hc}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{E}. \quad (1)$$

У середовищі довжина світлової хвилі зменшується згідно з формулою **(16.4)**, отже

$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda}.$$

Підставивши сюди вираз **(1)**, дістанемо відповідь:

$$n = \frac{hc}{\lambda e} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4,14 \cdot 10^{-7} \cdot 3,2 \cdot 10^{-19}} = 1,5.$$

Задача 20

Лазер випромінює в імпульсі $N = 2 \cdot 10^{19}$ фотонів з довжиною хвилі $\lambda = 694$ нм.

Визначити

середню потужність випромінювання лазера P , якщо тривалість імпульсу $\tau = 2$ мс.

Дано:

$$N = 2 \cdot 10^{19}$$

$$\lambda = 694 \text{ нм} = 6,94 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$\tau = 2 \text{ мс} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}$$

$P - ?$

Розв'язання

Енергія одного фотона, випроміненого лазером (формула (19.16)),

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda},$$

де $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла.

Загальна енергія лазерного імпульсу

$$W = N\varepsilon = N \frac{hc}{\lambda}.$$

Середня потужність імпульсу

$$P = \frac{W}{\tau} = \frac{Nhc}{\tau\lambda}.$$

Підставивши у цю формулу числові значення величин, одержимо відповідь:

$$P = 2,86 \cdot 10^{-3} \text{ Вт} = 2,86 \text{ мВт}.$$

Задача 21

Лазер випромінює імпульси з енергією $E = 10$ Дж і тривалістю $\tau = 10$ мкс. Промінь від цього лазера, що нормально падає на дзеркальну поверхню, сфокусований в цятку діаметром $d = 5$ мкм.

Визначити

середній тиск P , що його створює лазерний імпульс на поверхню.

Дано:

$$E = 10 \text{ Дж}$$

$$\tau = 10 \text{ мкс} = 10^{-5} \text{ с}$$

$$d = 5 \text{ мкм} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$P - ?$

Розв'язання

Згідно з умовою задачі шуканий тиск визначається формулою (19.10б):

$$P = \frac{2I}{c}, \quad (1)$$

де I – середня інтенсивність лазерного імпульсу, c – швидкість світла.

Відповідно до означення (15.11)

$$I = \frac{E}{\tau S} \frac{4I}{\pi d^2 \tau},$$

де $S = \pi d^2 / 4$ – площа поверхні, на яку сфокусоване випромінювання.

Підставивши вираз I у формулу (1), дістанемо

$$P = \frac{8E}{\pi c d^2 \tau}.$$

Обчислення дають:

$$P = 3,4 \cdot 10^8 \text{ Па}.$$

Отримана величина $n \approx 3000$ разів перевищує атмосферний тиск. Тому за допомогою сфокусованого лазерного променя можна робити отвори у найтвердіших матеріалах, а також використовувати його як «лазерний скальпель» у хірургії.

Задача 22

При опроміненні металу світлом кінетична енергія фотоелектронів виявилася $W = 2,0 \text{ eV}$ ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$).

Визначити

частку енергії ($k \%$) поглинутого фотона, яка витрачається на роботу виходу, якщо червона межа фотоефекту з цього металу $\lambda = 278 \text{ нм}$.

Дано:

$$W = 2,0 \text{ eV} = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$\lambda = 278 \text{ нм}$$

$k - ?$

Розв'язання

Енергія поглинутого фотона E розподіляється між роботою виходу A та кінетичною енергією фотоелектрона W у відповідності до закону збереження енергії: $E = A + W$.

Шукана частка енергії

$$k = \frac{A}{E} = \frac{A}{A + W} \Rightarrow k = \frac{1}{1 + W/A}. \quad (1)$$

Згідно з формулою **(19.8а)**

$$A = \frac{hc}{\lambda_0}.$$

Підставивши це значення у вираз **(1)**, дістанемо

$$k = \frac{1}{1 + \lambda W / (hc)}.$$

Підставивши сюди числові значення величин, отримаємо відповідь

$$k = 0,69 = 69 \%.$$

Задача 23

На металеву пластину падає монохроматичний пучок світла з частотою $\nu = 7,3 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$. Червона межа фотоефекту для цього матеріалу дорівнює $\lambda_0 = 560 \text{ нм}$. Визначити максимальну швидкість v_{max} фотоелектронів.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$v_{\text{max}} - ?$	Для визначення максимальної швидкості фотоелектронів скористаємося рівнянням Ейнштейна для фотоефекту
$\nu = 7,3 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$,	
$\lambda_0 = 560 \text{ нм} = 5,6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$,	
$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$	
	$h\nu = A + \frac{mv_{\text{max}}^2}{2} \quad (1)$

Робота виходу фотоелектронів із металу дорівнює

$$A = hc / \lambda_0 \quad (2)$$

Підставимо вираз (2) в (1):

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda_0} + \frac{mv_{\text{max}}^2}{2} \quad (3)$$

Розв'язавши це рівняння відносно швидкості, одержимо v_{max} :

$$v_{\text{max}}^2 = \frac{2h}{m} \left(\nu - \frac{c}{\lambda_0} \right) \Rightarrow v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2h}{m} \left(\nu - \frac{c}{\lambda_0} \right)}$$

Підставивши числові значення фізичних величин в останнє співвідношення, одержимо відповідь

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \left(7,3 \cdot 10^{14} - \frac{3 \cdot 10^8}{560 \cdot 10^{-9}} \right)} = 5,32 \cdot 10^5 \text{ (м/с)}$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$[v] = \sqrt{\frac{[h]}{[m]} \left([\nu] - \frac{[c]}{[\lambda]} \right)} = \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{с}}} = \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{с}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Відповідь: $v_{\text{max}} = 5,32 \cdot 10^5 \text{ м/с}$.

Задача 24

Фотон з енергією $W_{\Phi} = 10 \text{ eB}$ падає на срібну пластинку і викликає фотоелектр. Визначити імпульс p , одержаний пластиною, вважаючи, що напрями руху фотона й фотоелектрона лежать на одній прямій, перпендикулярній до поверхні пластини.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$p - ?$	
$W_{\Phi} = 10 \text{ eB} = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$	При падінні фотона на срібну пластинку з неї вибивається фотоелектрон. Імпульс, що передається пластинці, складається з імпульсу фотоелектрона та імпульсу фотона:

$$p = p_{\Phi} + p_e. \quad (1)$$

Імпульс фотона дорівнює

$$p_{\Phi} = \frac{W_{\Phi}}{c}, \quad (2)$$

де c – швидкість світла.

Імпульс електрона визначається співвідношенням

$$p_e = mv_e. \quad (3)$$

Швидкість фотоелектрона визначимо з рівняння Ейнштейна для фотоелектру:

$$W_{\Phi} = A + \frac{mv_e^2}{2} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2(W_{\Phi} - A)}{m}}. \quad (4)$$

Підставивши вираз (4) в (3), одержимо

$$p_e = m \sqrt{\frac{2(W_{\Phi} - A)}{m}} = \sqrt{2m(W_{\Phi} - A)}. \quad (5)$$

Тепер підставимо співвідношення (2) і (5) в (1):

$$p = \frac{W_{\Phi}}{c} + \sqrt{2m(W_{\Phi} - A)}. \quad (6)$$

Після підставлення числових значень величин одержимо відповідь

$$p = \frac{10 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} + \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-19} (10 \cdot 1,6 - 7,5)} = 1,24 \cdot 10^{-25} (\text{кг} \cdot \text{м/с}).$$

Зробимо перевірку розмірності фізичної величини:

$$\begin{aligned} [p] &= \frac{[W]}{[c]} + \sqrt{[m][W]} = \frac{\text{Дж}}{\text{м/с}} + \sqrt{\text{кг} \cdot \text{Дж}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{м}} + \sqrt{\text{кг} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \\ &= \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}^2} + \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} + \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Відповідь: $p = 1,24 \cdot 10^{-25} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$.

Задача 25

Яку частину енергії фотона становить енергія, витрачена на виконання роботи виходу електронів із фотокатода, якщо червона межа фотоефекту для матеріалу фотокатода дорівнює $\lambda_0 = 540 \text{ нм}$. Кінетична енергія фотоелектронів дорівнює $W_k = 0,5 \text{ eB}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\eta - ?$	Формула Ейнштейна для фотоефекта
$\lambda_0 = 540 \text{ нм} = 5,4 \cdot 10^{-7} \text{ м},$	$W_\phi = h\nu = A + W_{k, \text{max}}, \quad (1)$
$W_k = 0,5 \text{ eB} = 8 \cdot 10^{-20} \text{ Дж},$	де $W_\phi = h\nu$ – енергія фотона, який падає на
$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с},$	поверхню металу; де h – стала Планка; A – робота
$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$	виходу електрона з металу; $W_{k, \text{max}}$ – максимальна
	кінетична енергія фотоелектрона.

Довжина хвилі червоної межі дорівнює $\lambda_0 = hc/A$, звідси визначимо роботу виходу електрона $A = hc/\lambda_0$ та підставимо у формулу (1):

$$W_\phi = \frac{hc}{\lambda_0} + W_k. \quad (2)$$

Частина енергії фотона, витрачена на виконання роботи виходу електронів із фотокатода, дорівнює

$$\eta = \frac{A}{W_\phi} = \frac{hc}{\lambda_0 (hc/\lambda_0 + W_k)}. \quad (3)$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо остаточно

$$\eta = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / 5,4 \cdot 10^{-7}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / 5,4 \cdot 10^{-7} + 8 \cdot 10^{-20}} = \frac{3,68 \cdot 10^{-19}}{3,68 \cdot 10^{-19} + 0,8 \cdot 10^{-19}} = 0,82.$$

Відповідь: $\eta = 82 \%$.

Задача 26

Визначити максимальну швидкість електрона, вибитого з поверхні металу γ -квантом з енергією $W_\Phi = 1,53 \text{ MeV}$.

v – ?	РОЗВ'ЯЗАННЯ
$W_0 = 0,511 \text{ MeV} = 8,18 \cdot 10^{-12} \text{ Дж},$ $W_\Phi = 1,53 \text{ MeV} = 2,45 \cdot 10^{-13} \text{ Дж},$ $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$	Формула Ейнштейна для фотоефекту $W_\Phi = h\nu = A + W_{k,\max}, \quad (1)$ де $W_\Phi = h\nu$ – енергія фотона, який падає на поверхню металу; де h – стала Планка; A – робота виходу електрона з металу; $W_{k,\max}$ – максимальна кінетична енергія фотоелектрона.

Оскільки робота виходу є набагато меншою за енергію γ -кванта $A \ll W_\Phi$, то електрон буде релятивістським і його кінетичну енергію можна визначити зі співвідношення

$$W_k = W_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) = \frac{W_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - W_0,$$

де W_0 – енергія спокою електрона; c – швидкість світла у вакуумі.

Виконаємо нескладні перетворення:

$$W_k + W_0 = \frac{W_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{W_0}{W_k + W_0} \right)^2,$$

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{W_0}{W_k + W_0} \right)^2}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та виконаємо обчислення:

$$v = 3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - \left(\frac{0,511}{1,53 + 0,511} \right)^2} = 2,9 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}.$$

Відповідь: $v = 2,9 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Задача 27

При по черговому опроміненні катода фотоелемента світлом з довжинами хвилі λ і $n\lambda$ виявилося, що затримуючі напруги відрізняються в n разів.

Визначити

довжину хвилі червоної межі фотоефекту λ_0 .

Дано:

$$\lambda_1 = \lambda$$

$$\lambda_2 = n\lambda$$

$$\frac{U_1}{U_2} = n^2$$

$$\lambda_0 = ?$$

Розв'язання

Енергія фотона та робота виходу визначаються через довжини хвиль опромінюючого світла та червоної межі фотоефекту виразами **(19.1б)** та **(19.8а)**. Кінетична енергія фотоелектронів визначається затримуючою напругою згідно із співвідношенням **(19.6)**. Тому рівняння Ейнштейна **(19.7)** для вказаних двох випадків опромінення набувають

вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{hc}{\lambda} &= \frac{hc}{\lambda_0} + eU_1, & hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) &= eU_1 \\ \frac{hc}{n\lambda} &= \frac{hc}{\lambda_0} + e \frac{U_1}{n^2} & \Rightarrow & hc \left(\frac{1}{n\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) = \frac{eU_1}{n^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

У другому рівнянні враховано, що при збільшенні довжини хвилі енергія фотона зменшується, тому затримуюча напруга також зменшується. Поділивши ліві та праві частини рівнянь **(1)**, після нескладних викладок отримаємо:

$$\lambda_0 = (n + 1)\lambda.$$

Задача 28

За певних умов опромінення катода струм у фотоелементі припиняється при зворотній напрузі $U_3 = 2$ В.

Визначити

максимальну швидкість v , з якою електрони будуть потрапляти на анод, якщо до фотоелемента прикласти пряму напругу $U_{\text{п}} = U_3$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Дано:} \\ U_3 = 2 \text{ В} \\ U_{\text{п}} = U_3 \\ v - ? \end{array} \right|$$

Розв'язання

Згідно із законом збереження енергії кінетична енергія електрона при попаданні на анод

$$W = W_{\text{о}} + eU_{\text{п}}, \quad (1)$$

де $W_{\text{о}}$ – кінетична енергія електрона при виході з катода, $eU_{\text{п}}$ – робота поля, створюваного у фотоелементі прямою напругою $U_{\text{п}}$ ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – елементарний заряд).

Згідно з співвідношенням (19.6), максимальна кінетична енергія електрона при виході з катода

$$W_{\text{о}} = eU_3.$$

Тоді з рівнянням (1) максимальна кінетична енергія електрона при попаданні на анод

$$W = \frac{mv^2}{2} = e(U_3 + U_{\text{п}}).$$

Оскільки за умовою $U_{\text{п}} = U_3$, то

$$\frac{mv^2}{2} = 2eU_3 \Rightarrow v = 2\sqrt{\frac{eU_3}{m}}.$$

Взявши з таблиць масу електрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, отримаємо

$$v = 2\sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \approx 1,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Задача 29

До якого максимального потенціалу φ_m зарядиться віддалена від інших тіл мідна кулька при її опроміненні ультрафіолетовим світлом з довжиною хвилі $\lambda = 140$ нм? Робота виходу електронів з міді $A = 4$ еВ ($1 \text{ еВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

Дано: $\lambda = 140 \text{ нм} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ $A = 4 \text{ еВ} = 6,4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$	Розв'язання
$\varphi_m - ?$	Внаслідок фотоефекту кулька втрачає електрони, отже заряджається позитивно (Нагадаємо, що первісно всі тіла є електрично-нейтральними, тобто алгебраїчна сума зарядів в тілі дорівнює нулю. Тому втрата заряду одного знаку означає набуття тілом такого ж заряду протилежного знаку). При цьому в міру втрати електронів потенціал кульки поступово зростає. Тому вирвані електрони рухаються в усе сильнішому гальмівному електричному полі. Через певний час після початку опромінення позитивний потенціал кульки стає таким, що всі вирвані випромінюванням електрони повертаються назад на кульку. Інакше кажучи, встановлюється динамічна рівновага: кількості електронів, що вириваються та повертаються, стають однаковими. Тому потенціал кульки перестає збільшуватися. Процес встановлення динамічної рівноваги відбувається дуже швидко – практично миттєво. Згідно з формулою (10.13) для подолання притягання кульки електрон має виконати роботу

$$A_0 = e\varphi, \quad (1)$$

де φ – потенціал кульки, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – елементарний заряд. Цю роботу електрон виконує за рахунок кінетичної енергії W , яку отримує від опромінюючого світла. Отже максимальна робота, яку може виконати електрон

$$A_{\text{омах}} = W,$$

і з виразу (1), максимальний потенціал кульки

$$\varphi = \frac{W}{e}. \quad (2)$$

Згідно з рівнянням Ейнштейна (19.7а) кінетична енергія вильоту електрона з кульки

$$\frac{mv^2}{2} = W = \frac{hc}{\lambda} - A.$$

Отже з виразу (2) максимальний потенціал кульки дорівнює

$$\varphi_m = \frac{hc}{\lambda e} - \frac{A}{e}.$$

Після підстановки числових значень величин у цю формулу, обчислення дають:

$$\varphi = 4,87 \text{ В}.$$

Задача 30

Ультрафіолетове випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 232$ нм нормально падає на платинову пластинку (робота виходу $A = 5,29$ еВ). Вважаючи, що всі фотоелектрони вириваються з максимальною швидкістю і рухаються назустріч падаючим фотонам,

визначити

імпульс p , що його одержує пластинка при вильоті кожного електрона.

Дано:

$$\lambda = 232 \text{ нм} = 2,32 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$A = 5,29 \text{ еВ}$$

$p - ?$

Розв'язання

Пластинка одержує імпульс внаслідок двох процесів: поглинання фотона та вильоту електрона. При поглинанні фотона, пластинка отримує імпульс p_1 , рівний імпульсу фотона (формула (19.3а)):

$$p_1 = \frac{h}{\lambda}. \quad (1)$$

При вильоті електрона пластинка одержує імпульс віддачі p_2 , котрий за величиною дорівнює імпульсу електрона: $p_2 = p_e$. Згідно з формулою (4.3б)

$$p_e = \sqrt{2mW}, \quad (2)$$

де W – кінетична енергія, m – маса електрона.

Кінетична енергія електрона визначається з рівняння Ейнштейна для фотоефекту (19.7а):

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A.$$

Підставивши цей вираз у формулу (2), дістанемо:

$$p_2 = p_e \sqrt{2m \left(\frac{hc}{\lambda} - A \right)}. \quad (3)$$

Отже повний імпульс, що його отримує пластинка, відповідно до виразів (1) і (3) дорівнює:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{h}{\lambda} + \sqrt{2m \left(\frac{hc}{\lambda} - A \right)}.$$

Підставивши у цю формулу числові значення величин і вионавши обчислення, одержимо відповідь:

$$p = 1,35 \cdot 10^{-25} \text{ кг}\cdot\text{м/с}.$$

Задача 31

Фотон розсіявся під кутом $\theta = 120^\circ$ на вільному електроні, що перебував у стані спокою. Внаслідок ефекту Комптона електрон одержав кінетичну енергію $W_K = 0,45 \text{ MeV}$. Визначити енергію фотона до розсіювання.

$W - ?$	РОЗВ'ЯЗАННЯ
$W_K = 0,45 \text{ MeV} = 7,2 \cdot 10^{-14} \text{ Дж},$ $\theta = 120^\circ,$ $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с},$ $W_0 = 0,511 \text{ MeV} = 8,176 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}$	Зміна довжини хвилі $\Delta\lambda$ фотона при розсіюванні його на частинці (ефект Комптона) на кут θ визначається за формулою $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta), \quad (1)$

де λ та λ' – довжини хвиль фотона, що падає на електрон, та розсіяного фотона.

Виразимо довжини хвиль λ та λ' фотона до і після розсіювання через енергію, врахувавши, що $W = h\nu = hc/\lambda$, тоді

$$\frac{hc}{W'} - \frac{hc}{W} = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta). \quad (2)$$

Розділимо обидві частини рівності (1) на hc та одержимо

$$\frac{1}{W'} - \frac{1}{W} = \frac{1}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta). \quad (3)$$

Кінетична енергія, яку отримав електрон внаслідок ефекту Комптона, дорівнює різниці енергій фотона до розсіювання та його енергії після розсіювання:

$$W_K = W - W', \quad \text{звідси} \quad W' = W - W_K. \quad (4)$$

Підставимо вираз (4) у співвідношення (3) та одержимо

$$\frac{1}{W - W_K} - \frac{1}{W} = \frac{1}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta). \quad (5)$$

Врахуємо, що енергія спокою електрона дорівнює $W_0 = m_0 c^2$.

Виконаємо перетворення та одержимо квадратне рівняння відносно W :

$$W \cdot W_0 - (W - W_K) W_0 = (W - W_K) W (1 - \cos \theta),$$

або

$$(1 - \cos \theta) W^2 - W_K (1 - \cos \theta) \cdot W - W_K \cdot W_0 = 0. \quad (6)$$

Позитивний корінь цього рівняння визначається виразом

$$W = \frac{W_K (1 - \cos \theta) + \sqrt{W_K^2 (1 - \cos \theta)^2 + 4(1 - \cos \theta) W_K \cdot W_0}}{2(1 - \cos \theta)}. \quad (7)$$

Підставимо у цей вираз числові значення фізичних величин та визначимо енергію фотона до розсіювання:

$$\begin{aligned} W &= \frac{0,45(1 - \cos 120^\circ) + \sqrt{[0,45(1 - \cos 120^\circ)]^2 + 4(1 - \cos 120^\circ) 0,45 \cdot 0,511}}{2(1 - \cos 120^\circ)} = \\ &= 0,68 \text{ (MeV)} = 0,68 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} = 1,09 \cdot 10^{-13} \text{ (Дж)}. \end{aligned}$$

Відповідь: $W = 0,68 \text{ MeV}$.

Задача 32

Яка частка енергії фотона припадає при ефекті Комптона на електрон віддачі, якщо розсіювання фотона відбувається на кут $\theta = \pi/2$? Енергія фотона до розсіювання дорівнювала $W_1 = 0,51 \text{ MeV}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\eta - ?$	Відповідно до формули Комптона зміна довжини хвилі фотона, що розсіявся на електроні, дорівнює
$W_1 = 0,51 \text{ MeV} = 8,16 \cdot 10^{-14} \text{ Дж},$	
$\theta = \frac{\pi}{2}$	

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta),$$

де λ та λ' – довжини хвиль фотона, що падає на електрон, та розсіяного фотона.

Виразимо довжини хвиль λ та λ' фотона до і після розсіювання через енергію, врахувавши, що $W = h\nu = hc/\lambda$, тоді

$$\frac{hc}{W'} - \frac{hc}{W} = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta). \quad (1)$$

Поділимо обидві частини рівності (1) на hc , тоді одержимо

$$\frac{1}{W'} - \frac{1}{W} = \frac{1}{mc^2}(1 - \cos \theta).$$

Із цього співвідношення визначимо енергію фотона, що розсіявся:

$$W' = \frac{W}{\frac{W}{mc^2}(1 - \cos \theta) + 1}.$$

Відповідно до закону збереження енергії кінетична енергія електрона віддачі дорівнює

$$W_K = W - W' = W - \frac{W \cdot mc^2}{W(1 - \cos \theta) + mc^2}.$$

Тепер можемо знайти частину енергії, що припадає на електрон віддачі:

$$\eta = \frac{W_K}{W} = 1 - \frac{mc^2}{W(1 - \cos \theta) + mc^2}. \quad (2)$$

Після підставлення у (2) числових значень фізичних величин одержимо

$$\eta = 1 - \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{0,51 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right) + 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} = 0,499.$$

Відповідь: $\eta = 0,499$.

Задача 33-1

Визначити імпульс електрона віддачі, якщо фотон з енергією $W_{\phi} = 1,53 \text{ MeV}$ у результаті розсіювання на вільному електроні втратив $1/3$ своєї енергії.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$p - ?$

$$W_{\phi} = 1,53 \text{ MeV} = 1,53 \cdot 10^{-13} \text{ Дж},$$

$$W'_{\phi} = \frac{1}{3} W_{\phi}$$

Для розв'язування задачі спочатку визначимо енергію розсіяного фотона. Для цього скористаємося формулою Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta),$$

де λ', λ – довжини хвиль фотона, що падає на електрон, та розсіяного фотона.

Виразимо довжини хвиль λ' і λ відповідних фотонів через їх енергії W' і W . У результаті одержимо

$$\frac{hc}{W'} - \frac{hc}{W} = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta). \quad (1)$$

Поділимо обидві частини цієї рівності на hc :

$$\frac{1}{W'} - \frac{1}{W} = \frac{1}{mc^2}(1 - \cos\theta). \quad (2)$$

Задача 33-2

Урахуємо, що за умовою задачі енергія розсіяного фотона становить $W' = 2W/3$, звідси одержимо

$$\frac{3}{2W} - \frac{1}{W} = \frac{1 - \cos \theta}{mc^2} \Rightarrow \frac{1}{2W} = \frac{1 - \cos \theta}{mc^2} \Rightarrow 1 - \cos \theta = \frac{mc^2}{2W}. \quad (3)$$

Тоді визначимо зі співвідношення (2) енергію розсіяного фотона W' :

$$W' = \frac{W}{W(1 - \cos \theta)/mc^2 + 1}. \quad (4)$$

Кінетичну енергію електрона віддачі можна визначити за законом збереження енергії:

$$W_K = W - W' = W - \frac{W}{W(1 - \cos \theta)/mc^2 + 1}.$$

Кінетична енергія пов'язана з імпульсом частинки співвідношенням

$$W_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p_e^2}{2m},$$

звідси

$$p_e = \sqrt{2mW_K}. \quad (5)$$

Підставивши у вираз (5) значення W_K зі співвідношення (4), одержимо

$$p_e = \sqrt{2m \left(W - \frac{W}{W(1 - \cos \theta)/mc^2 + 1} \right)}. \quad (6)$$

Нарешті, підставимо в (6) значення кута розсіювання фотона з виразу (3) та визначимо

$$p_e = \sqrt{2m \left(W - \frac{W}{\frac{Wmc^2}{2W/mc^2} + 1} \right)} = \sqrt{2m \left(W - \frac{2W}{3} \right)} = \sqrt{2mW \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3} mW}.$$

Після підставлення числових величин одержимо остаточно

$$p_e = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,53 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 4,71 \cdot 10^{-22} \text{ (кг} \cdot \text{м / с)}.$$

Задача 34-1

Фотон із довжиною хвилі $\lambda = 6 \text{ нм}$ розсіявся під прямим кутом на вільному електроні, що перебував у стані спокою. Визначити: а) частоту розсіяного фотона; б) кінетичну енергію електрона віддачі.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$\nu' - ? \quad W_K - ?$$

$$\lambda = 6 \text{ нм} = 6 \cdot 10^{-12} \text{ м},$$

$$\theta = 90^\circ,$$

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг},$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

$$\lambda_c = 2,436 \text{ нм} = 2,436 \cdot 10^{-12} \text{ м}$$

Зміна довжини хвилі фотона при розсіюванні його на частинці (ефект Комптона) на кут θ визначається формулою Комптона

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) = \lambda_c(1 - \cos \theta), \quad (1)$$

де m – маса частинки віддачі (у нашій задачі – електрона); λ та λ' – довжини падаючої та розсіяної хвиль; c – швидкість світла у вакуумі; $\lambda_c = h/mc$ – комптонівська довжина хвилі.

При розсіюванні фотона на електроні комптонівська довжина хвилі дорівнює $\lambda_c = 2,436 \text{ нм}$.

При розсіюванні фотона під прямим кутом $\cos \theta$

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c, \quad (2)$$

звідси

а) частота пов'язана з довжиною хвилі співвідношенням

$$\nu' = \frac{c}{\lambda + \lambda_c}; \quad (3)$$

б) виразимо довжини хвиль λ та λ' фотона до та після розсіювання через енергію, врахувавши, що $W = h\nu = hc/\lambda$, тоді

Задача 34-2

$$\frac{hc}{W'} - \frac{hc}{W} = \frac{h}{mc}. \quad (4)$$

Поділимо обидві частини рівності (1) на hc та одержимо

$$\frac{1}{W'} - \frac{1}{W} = \frac{1}{mc^2}. \quad (5)$$

Із цього співвідношення визначимо енергію фотона, що розсіявся:

$$W' = \frac{W}{\frac{W}{mc^2} + 1}. \quad (6)$$

Відповідно до закону збереження енергії кінетична енергія електрона віддачі дорівнює

$$W_k = W - W' = W - \frac{W}{\frac{W}{mc^2} + 1},$$

або

$$W_k = \frac{hc}{\lambda} - \frac{\frac{hc}{\lambda}}{\frac{h}{\lambda mc} + 1} = \frac{hc}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\frac{h}{\lambda mc} + 1} \right). \quad (7)$$

Підставимо числові значення фізичних величин у співвідношення (3) і (5) та одержимо:

$$\text{а) } \nu' = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-12} + 2,436 \cdot 10^{-12}} = 3,56 \cdot 10^{19} \text{ (Гц)};$$

$$\begin{aligned} \text{б) } W_k &= \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-12}} \left(1 - \frac{1}{\frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{6 \cdot 10^{-12} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} + 1} \right) = \\ &= 9,55 \cdot 10^{-14} \text{ (Дж)} = (60 \text{ кеВ}). \end{aligned}$$

Відповідь: а) $\nu' = 3,56 \cdot 10^{19} \text{ Гц}$; б) $W_k = 60 \text{ кеВ}$.

Задача 35-1

Гамма-фотон з довжиною хвилі $\lambda = 1,2 \text{ нм}$ унаслідок комптонівського розсіювання на вільному електроні відхилився від початкового напрямку на кут $\theta = 60^\circ$. Визначити кінетичну енергію та імпульс електрона віддачі. До зіткнення електрон перебував у стані спокою.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$W_k = ? \quad p = ?$$

$$\lambda = 1,2 \text{ нм} = 1,2 \cdot 10^{-12} \text{ м},$$

$$\theta = 60^\circ,$$

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг},$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с},$$

$$\lambda_c = 2,43 \text{ нм} = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м},$$

$$W_0 = 8,16 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}$$

Зміна довжини хвилі фотона при розсіюванні його на частинці (ефект Комптона) на кут θ визначається формулою Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) = \lambda_c (1 - \cos \theta), \quad (1)$$

де m – маса частинки віддачі (у нашій задачі – електрона); λ і λ' – довжини падаючої та розсіяної хвилі; c – швидкість світла у вакуумі;

$\lambda_c = h/mc$ – комптонівська довжина хвилі.

При розсіюванні фотона на електроні комптонівська довжина хвилі дорівнює $\lambda_c = 2,436 \text{ нм}$.

З виразу (2) визначимо довжину хвилі розсіяного фотона:

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c (1 - \cos \theta). \quad (2)$$

Виразимо енергію падаючого та розсіяного фотонів через їх довжини хвилі:

$$W = h \frac{c}{\lambda}, \quad W' = h \frac{c}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda + \lambda_c (1 - \cos \theta)}. \quad (3)$$

Кінетична енергія електрона віддачі відповідно до закону збереження енергії дорівнює

$$W_k = W - W', \quad (4)$$

Підставимо у (4) вирази (3) та одержимо

Задача 35-2

$$W_k = h \frac{c}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \lambda_c (1 - \cos \theta)} = hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \lambda_c (1 - \cos \theta)} \right). \quad (5)$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержане співвідношення та одержимо

$$\begin{aligned} W_k &= 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \left(\frac{1}{1,2 \cdot 10^{-12}} - \frac{1}{1,2 \cdot 10^{-12} + 2,43 \cdot 10^{-12} (1 - \cos 60^\circ)} \right) = \\ &= 8,34 \cdot 10^{-14} \text{ (Дж)} = 0,52 \text{ (MeV)}. \end{aligned}$$

Знаючи кінетичну енергію електрона, визначимо його імпульс. Оскільки кінетична енергія електрона того самого порядку, що й його енергія спокою W_0 , то імпульс та кінетична енергія пов'язані релятивістським співвідношенням

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{W_k (W_k + 2W_0)}. \quad (6)$$

Підставимо числові значення в одержаний вираз (6) та проведемо розрахунки:

$$p = \frac{1}{3 \cdot 10^8} \sqrt{8,34 \cdot 10^{-14} (8,34 \cdot 10^{-14} + 2 \cdot 8,16 \cdot 10^{-14})} = 4,78 \cdot 10^{-22} \text{ (кг} \cdot \text{м/с)}.$$

Відповідь: $W_k = 0,52 \text{ MeV}$; $p = 4,8 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$.