

Задача_36

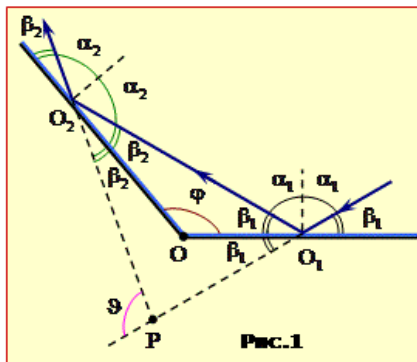
Визначити кут ϑ відхилення променя світла, відбитого від двох плоских дзеркал, що утворюють двогранний кут φ . Площина, у якій лежить падаючий промінь, перпендикулярна ребру двогранного кута.

Дано:

φ
 $\vartheta - ?$

Розв'язання

На **рис.1** ребро двогранного кута є перпендикулярним площині рисунка і проходить через точку O . Промінь світла, що падає на одне з дзеркал під кутом α_1 (у точці O_1), після відбивання падає на друге дзеркало під кутом α_2 (у точці O_2).



На **рис.1** також показані всі кути, необхідні для подальшого розв'язування. Рівність відповідних кутів випливає із закону відбивання (**16.5**) і очевидних геометричних співвідношень. Кут відхилення ϑ – це кут між напрямками променя, відбитого від другого дзеркала в точці O_2 і променя, який падає на перше дзеркало в точку O_1 (див. **рис.1**). Цей кут є зовнішнім кутом трикутника PO_1O_2 , тому

$$\vartheta = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 2(\beta_1 + \beta_2).$$

З трикутника O_1OO_2 маємо

$$\beta_1 + \beta_2 = 180^\circ - \varphi,$$

Отже шуканий кут відхилення

$$\vartheta = 360^\circ - 2\varphi.$$

Зверніть увагу на те, що цей кут визначається тільки двограним кутом φ і не залежить від напрямку падаючого променя. Зокрема, при $\varphi = 90^\circ$ $\vartheta = 180^\circ$. Це означає, що будь-який промінь відбивається у зворотному напрямку. Таку ж властивість має і тригранне прямокутне дзеркало. Воно використовується у так званих кутових відбивачах, якими, зокрема, є катодоти автомобілів і велосипедів, а також рефлектори на раннях школярів.

Задача_37

При падінні променя світла на межу поділу двох середовищ відбитий та заломлений промені виявились взаємно перпендикулярними.

Визначити

кут падіння, якщо відношення показників заломлення середовищ $k = 1,5$.

Дано: $k = 1,5$ $\varphi = 90^\circ$ $\alpha - ?$	Розв'язання На рис.2 показано хід променів для випадку $n_1 < n_2$. З рисунка видно, що $\alpha + \varphi + \beta = 180^\circ$ отже при $\varphi = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ - \alpha$, і згідно із законом заломлення (16.6)
--	--

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{n_2}{n_1}.$$

Таким чином шуканий кут падіння

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{n_2}{n_1} \right).$$

Числове значення α залежить від того, яке з середовищ більш оптично густе. Є дві можливості:

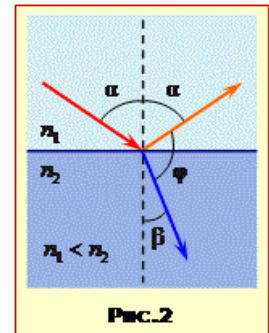
$$1) \frac{n_2}{n_1} = k \quad \text{і} \quad 2) \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{k}.$$

Відповідно задача має дві числові відповіді:

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}_2 1,5 = 56,3^\circ;$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}_2 \frac{1}{1,5} = 33,7^\circ$$

Корисно звернути увагу на те, що за умов задачі незалежно від послідовності розміщення середовищ одне з отриманих значень є кутом падіння, а інше - кутом заломлення.



Задача_38

У точці K на дні непрозорої кубічної посудини лежить маленька важка кулька. Око спостерігача розташоване так, що дно невидиме (рис.3). У посудину починають наливати воду ($n = 1,33$).

Визначити

висоту рівня води h , при якій спостерігач зможе побачити кульку, не змінюючи положення ока, якщо відстань між точками K і N $S = 10$ см (див. рис.3).

Дано:
 $n = 1,33$
 $S = 10$ см
 $h = ?$

Розв'язання

Аби спостерігач зміг бачити кульку, частина відбитих нею променів повинна потрапляти в око, як показано на рис.3-1.

Це можливо лише при такій висоті рівня води h , при якій промені KO та OM задовольняють закону заломлення світла (16.6)

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}. \quad (1)$$

(Тут враховано, що показник заломлення повітря практично дорівнює одиниці).

За умовою $\beta = 45^\circ$ (посудина - куб), отже

$$\sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \quad (2)$$

З рис.3-1 видно, що висота рівня води

$$h = \frac{PK}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad (3)$$

а $PK = h \operatorname{tg} \alpha$, $PN = h \operatorname{tg} \beta$, $S = KN = PN - PK$. Отже

$$S = h(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) \Rightarrow h = \frac{S}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}.$$

Враховуючи співвідношення

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1/\sin^2 \alpha - 1}}$$

та формулу (1), маємо

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{n^2/\sin^2 \beta - 1}}.$$

Отже

$$h = \frac{S}{\operatorname{tg} \beta - \sqrt{n^2/\sin^2 \beta - 1}}.$$

Оскільки посудина куб, то $\beta = 45^\circ$ і

$$h = \frac{S}{1 - 1/\sqrt{2n^2 - 1}} = \frac{10}{1 - 1/\sqrt{2 \cdot 1,33^2 - 1}} = 26,9 \text{ см.}$$

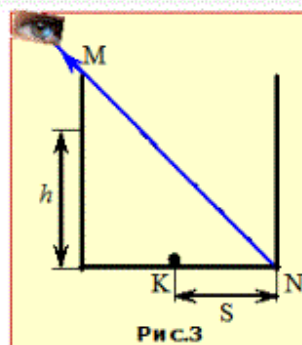


Рис.3

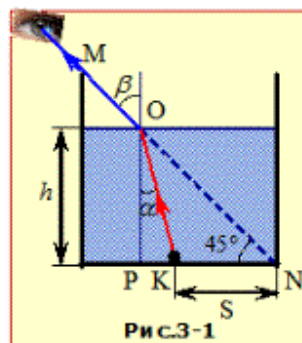
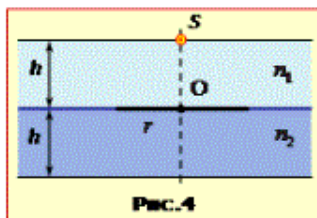


Рис.3-1

Задача_39

Дві пластини товщиною по $h = 2$ см кожна з показниками заломлення $n_1 = 1,35$ і $n_2 = 1,95$ складені впритул. На поверхні дотику на одній з пластин зафарбовано диск радіусом $r = h$. На зовнішній поверхні однієї з пластин прямо над центром диска O розміщене точкове джерело світла S (рис.4).



Визначити

радіус тіні R від диска на зовнішній поверхні іншої пластини у випадку, коли джерело знаходиться на поверхні:

А) першої пластини;

В) другої пластини.

Дано:

$$h = 2 \text{ см}$$

$$n_1 = 1,35$$

$$n_2 = 1,95$$

$$R = ?$$

Розв'язання

А) У цьому випадку світло переходить з оптично менш густої середовища n_1 в більш густе n_2 . За законом заломлення (16.6) маємо:

$$R = r + h \tan \beta.$$

За умовою $r = h$, отже

$$R = h(1 + \tan \beta) = h \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1/\sin^2 \beta - 1}} \right).$$

Величину $1/\sin^2 \beta$ знайдемо через співвідношення (16.7), врахувавши, що за умовою задачі ($r = h$) $\alpha = 45^\circ$, отже $\sin \alpha = 1/\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sin^2 \beta} = \frac{2n_2^2}{n_1^2}.$$

Тепер

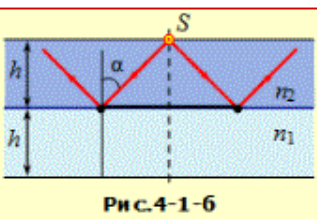
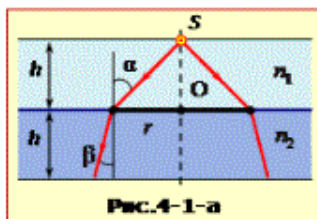
$$R = h \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2(n_2/n_1)^2 - 1}} \right) \approx 3,1 \text{ см}.$$

Б) В цьому випадку світло падає на межу поділу з більш густого середовища, тому, перш ніж виконувати обчислення, слід з'ясувати, чи зможе світло взагалі пройти через межу поділу. Для цього визначимо граничний кут, для межі заданих речовин (формула (16.7)):

$$\alpha_0 = \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \right) = 43,8^\circ.$$

Згідно з умовою $r = h$ кут падіння $\alpha = 45^\circ$, тобто $\alpha > \alpha_0$. Отже на межі пластин здійснюється повне відбивання і жоден падаючий на поверхню дотику промінь не пройде в іншу пластину. Тому формальна відповідь

$$R \rightarrow \infty.$$



Задача_40

Промінь світла падає під кутом $\alpha = 60^\circ$ на скляну ($n = 1,5$) плоскопаралельну пластину товщиною $d = 3$ см, що знаходиться в повітрі.

Визначити

зміщення x променя відносно його початкового напрямку після проходження крізь пластину.

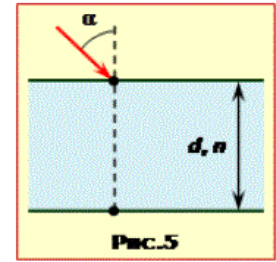


Рис.5

Розв'язання

Дано:
 $\alpha = 60^\circ$
 $n = 1,5$
 $d = 3$ см
 $x = ?$

Розглянемо хід променя крізь плоскопаралельну пластинку (рис.5-1) для цього запишемо закон заломлення світла (формула (16.6)), на верхній і на нижній гранях:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad \frac{\sin \beta}{\sin \alpha'} = \frac{1}{n}.$$

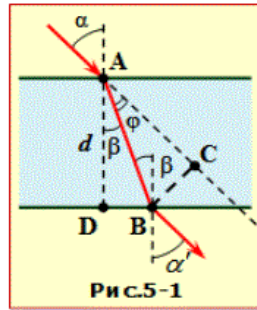


Рис.5-1

З цих виразів випливає, що $\alpha' = \alpha$. Це значить, що після проходження промінь не змінює напрямку, а тільки зміщується відносно падаючого на відстань x рівну довжині спільного перпендикуляра до цих променів: $x = BC$.

З прямокутного трикутника ABC:

$$\begin{aligned} x &= AB \cdot \sin \varphi = AB \cdot \sin(\alpha - \beta) = \\ &= AB(\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha) = \\ &= AB \sin \alpha \cos \beta \left(1 - \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

де β – кут заломлення. За законом заломлення

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - (\sin \alpha / n)^2}. \quad (2)$$

З прямокутного трикутника AB:

$$AB = \frac{AD}{\cos \alpha} = \frac{d}{\cos \alpha}. \quad (3)$$

Підставивши вирази (2) і (3) у формулу (1), після нескладних перетворень одержимо:

$$x = d \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right). \quad (4)$$

Виконаємо обчислення:

$$x = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1/2}{\sqrt{1,5^2 - 3/4}} \right) = 1,53 \text{ см.}$$

Задача_41

Вузкий паралельний пучок променів падає на аркуш паперу під кутом $\alpha = 60^\circ$ і створює світлову пляму (**рис.6**).

Визначити

відстань S на яку зміститься цятка, якщо на папір покласти скляну ($n = 1,5$) пластину товщиною $d = 5$ см.

Дано:

$$\alpha = 60^\circ$$

$$n = 1,5$$

$$d = 5 \text{ см}$$

$$S = ?$$

Розв'язання

Нехай спочатку світна цятка розміщена в точці М (**рис.6-1.а**). Після того як на папір поклали пластину, цятка внаслідок заломлення переміститься в точку N.

Шукана відстань $S = MN$. З рисунка видно, що

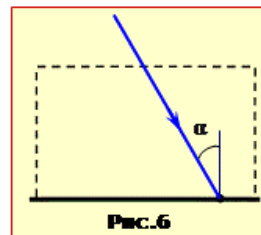


Рис.6

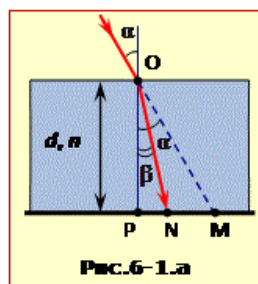


Рис.6-1.а

$$S = PM - PN = d(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta).$$

(1)

Величину $\operatorname{tg} \beta$ легко визначити через відомі тригонометричні співвідношення та закон заломлення (16.6), згідно з яким $\sin \beta = \sin \alpha / n$

$$d(\operatorname{tg} \beta) = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Підставивши цей вираз у формулу (1), дістанемо відповідь:

$$S = d \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right).$$

Обчислення дають:

$$S = 5 \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{1,5^2 - 3/4}} \right) \approx 5,1 \text{ см.}$$

Задача_42

Рибалка, що сидить у човні, розглядає камінчик на дні озера безпосередньо під човном. Рибалці здається, що камінчик знаходиться на глибині $h = 3$ м.

Визначити

істинну глибину озера H . Показник заломлення води $n = 1,33$.

Дано:

$$h = 3 \text{ м}$$

$$n = 1,33$$

$$H - ?$$

Розв'язання

Рибалка бачить камінчик завдяки тим відбитим від нього променям світла, що попадають в око. На **рис.7-1** показані два таких промені, що виходять з точки розташування камінчика на дні А. Ці промені розходяться, тому рибалці буде здаватися, що вони виходять з точки А, розташованої на глибині h . Так виникає оптичний обман: удавана глибина водойми h виявляється меншою, ніж істинна глибина H .

Для розрахунків позначимо α кут падіння променя на межу вода-повітря і β кут заломлення (**рис.7-1**). За законом заломлення (**16.6**)

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}, \quad (1)$$

де враховано, що показник заломлення повітря $n_0 = 1$. Трикутники ABC і A_сBC мають спільний катет BC, тому

$$\frac{H}{h} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}. \quad (2)$$

Розв'язавши сумісно рівняння (1) і (2), одержимо:

$$H = nh \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - (n \sin \alpha)^2}}. \quad (3)$$

З цього результату може здатися, що глибина озера H залежить від кута α . Звичайно це не так. Від кута α залежить не H , а h , тобто положення точки А_с. Це означає, що продовження заломлених променів, що виходять з точки А під різними кутами, перетинаються в різних точках, і, отже, не створюють її зображення. Чому ж тоді ми чітко бачимо предмети на дні (звичайно, якщо вода прозора)? Відповідь така: тому що розміри зіниці дуже малі, в око попадають тільки промені, що виходять з води під дуже малими кутами ($\alpha \ll 1$). У такому випадку величини $\sin \alpha$ і $n \sin \alpha$ у формулі (3) нехтовно малі і відповідь задачі фактично має вигляд:

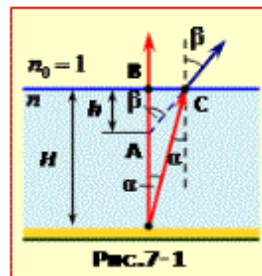
$$H = nh = 1,33 \cdot 3 = 4 \text{ м.}$$

Зверніть увагу на наступне. Подібна ситуація зустрічається в усіх задачах, зв'язаних з візуальними спостереженнями. Тому малість кутів необхідно враховувати із самого початку. Наприклад, у даній задачі необхідно було б одразу врахувати, що для малих кутів $\sin \alpha = \tan \alpha = \alpha$ і записати закон заломлення у вигляді.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{n}.$$

Тоді відразу і набагато простіше була б отримана правильна відповідь:

$$\frac{H}{h} = n \Rightarrow H = nh.$$



Задача_43

Хід променя крізь скляну трикутну призму показаний на **рис.8**, на якому $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$, $\delta = 45^\circ$.

Визначити заломний кут призми φ .

Дано:

$$\alpha_1 = 30^\circ$$

$$\alpha_2 = 60^\circ$$

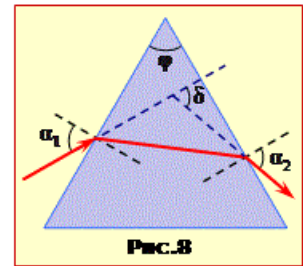
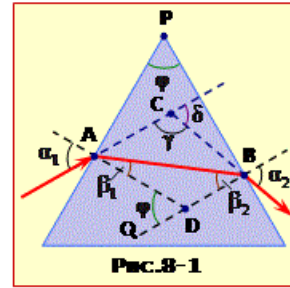
$$\delta = 45^\circ$$

$\varphi = ?$

Розв'язання

Позначимо кут заломлення на першій грані β_1 , а кут падіння на другу грань β_2 (**рис.8-1**).

Кут відхилення променя δ – то є кут між напрямками променя, що вийшов з призми та променя, що падає на призму. Він є зовнішнім кутом трикутника ABC, отже



$$\delta = \pi - \gamma \Rightarrow \gamma = \pi - \delta. \quad (1)$$

В цьому трикутнику $\angle BAC = \alpha_1 - \beta_1$ і $\angle ABC = \alpha_2 - \beta_2$. Тому

$$\gamma = \pi - (\alpha_1 - \beta_1) - (\alpha_2 - \beta_2) = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2). \quad (2)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (1) і (2), отримаємо:

$$\delta = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2). \quad (3)$$

Зовнішній кут $\angle ADQ$ трикутника ABD дорівнює заломному куту призми φ , оскільки він утворений перпендикулярами до бічних граней призми. Отже

$$\varphi = \beta_1 + \beta_2. \quad (4)$$

Підставивши цей вираз у формулу (3), дістанемо відповідь:

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi \Rightarrow \varphi = \alpha_1 + \alpha_2 - \delta = 30^\circ + 60^\circ - 45^\circ$$

Задача_44

На **рис.13** показаний хід заданого променя крізь збиральну лінзу.

Визначити

побудовою положення головних фокусів лінзи.

Розв'язування

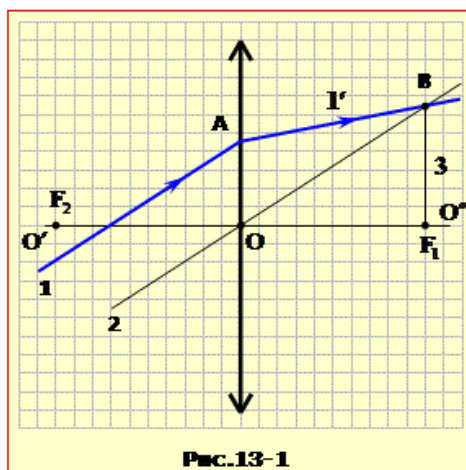
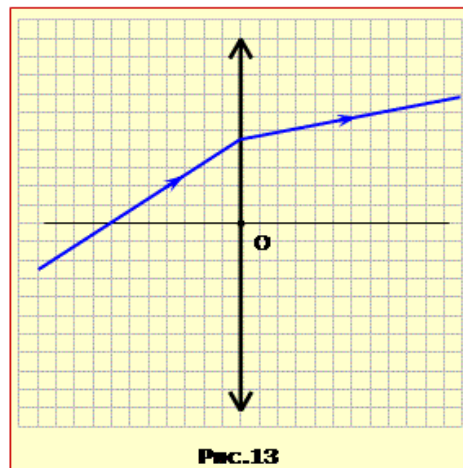
Для розв'язання використовуємо властивості фокальної площини (див. **Характеристики лінзи**):

- 1) фокальна площина проходить через фокус перпендикулярно головній оптичній осі;
- 2) будь-які паралельні між собою промені після лінзи перетинаються в одній точці фокальної площини.

Побудову проводимо в такій послідовності (див.**рис.13-1**):

1. Проводимо через центр лінзи O допоміжний промінь **2** паралельний заданому падаючому променю **1** – A (див. **Рекомендації, п.2**);
2. Знаходимо точку перетину променів **2** і **1'** (точці B), яка належить фокальній площині;
3. Опускаємо перпендикуляр **3** із точки B на головну оптичну вісь лінзи $O'O''$ і визначаємо положення правого фокуса лінзи F_1 .

4. Симетрично точці F_1 відзначаємо положення лівого фокуса F_2 . Строго кажучи для визначення положення F_2 треба було б повторити побудову п.п.1-3, використовуючи в якості падаючого променя **1'** – лінія BA (оборотність променів). Але для тонких лінз це можна не робити.



Задача_45

По заданому положенню точки S і головної оптичної осі лінзи $O'O''$.

Визначити

побудовою положення оптичного центра і фокусів, а також визначити тип лінзи, якщо точки S і S' розташовані, як показано

А) на **рис.15а**;

Б) на **рис.15б**.

Розв'язування

Ключем до розв'язування задачі є той факт, що точка і її зображення завжди лежать на одному промені, що проходить через оптичний центр лінзи (див. **Рекомендації п.3**).

Побудова виконаємо паралельно для обох випадків у такій послідовності (**рис.15-1а,б**):

1. Проводимо промінь **1** через точки S і S' і на перетині його з оптичною віссю $O'O''$ одержуємо положення оптичного центра O лінзи.
2. Проводимо через точку O перпендикуляр до $O'O''$, що показує положення площини лінзи.
3. Направляємо з точки S на лінзу промінь **2**, паралельний $O'O''$, і визначаємо точку його падіння на лінзу (точка A).
4. Заломлений промінь **2'** (сам чи його продовження) перетинає головну оптичну вісь лінзи у фокусі. З іншого боку зображення (точка S') теж знаходиться на цьому промені. Тому, провівши промінь **2'** через точки S' і A , на перетині з віссю $O'O''$ знаходимо положення фокуса F_1 . Положення другого фокуса відзначаємо симетрично з іншого боку лінзи.
5. З ходу променя **2** (очевидно, що у випадку **А**) розсіювальна лінза, а у випадку **Б**) збиральна. Показуємо це на рисунку відповідно «вилочками» (**рис.15-1а**) і «стрілочками» (**рис.15-1б**).

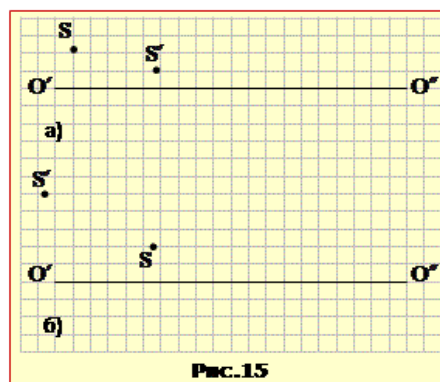


Рис.15

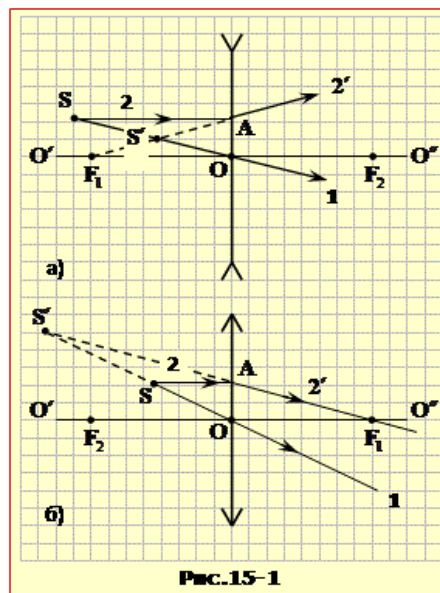


Рис.15-1

Задача_46

Рефлектор прожектора являє собою угнуте сферичне дзеркало з радіусом кривизни $R = 30$ см.

Визначити

на якій відстані l від фокуса дзеркала треба розташувати на головній оптичній осі точкове джерело світла, щоб одержати конічний пучок відбитих променів, що сходиться в точку на відстані $L = 10$ м від полюса дзеркала.

Дано:

$$R = 30 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$$

$$L = 10 \text{ м}$$

$l - ?$

Розв'язання

Положення вершини відбитого пучка S' (рис.17) і джерела S зв'язані формулою дзеркала (16.9). Оскільки дзеркало угнуте і точка S' є дійсним зображенням точки

S , усі величини у формулі (16.9) мають знак «+» (див. правило знаків).

Відповідно до тексту задачі $f = L$ і $d = F + l$, де F – головна фокусна відстань дзеркала. Тому формула (16.9) здобуває вигляд:

$$\frac{1}{F + l} + \frac{1}{L} = \frac{1}{F}.$$

Звідси, після елементарних викладок одержуємо

$$l = \frac{F^2}{L - F}.$$

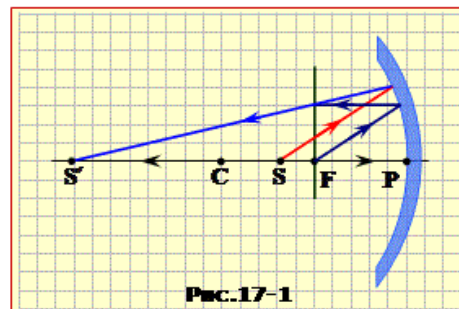
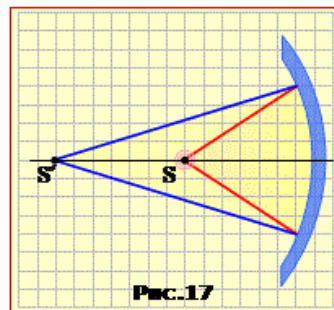
Для сферичного дзеркала $F = \frac{R}{2}$ (формула (16.8)), тому

$$l = \frac{R^2}{2(2L - R)}.$$

З урахуванням того, що за умовою $L \gg R$, остаточну відповідь доцільно представити у вигляді:

$$l \approx \frac{R^2}{4L} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 4 \text{ мм}$$

У такий спосіб джерело варто розташувати на 4 мм далі від полюса P , ніж фокус F . На рис.17-1 для ілюстрації показана побудова ходу одного з променів. (При побудові враховано, що показник заломлення повітря практично рівний одиниці).



Задача_47

Малий предмет розглядають, приклавши до ока збірну лінзу (лупу) з фокусною відстанню $F = 5$ см так, що утворюється пряме зображення предмета, розміщене на відстані найкращого зору $L = 25$ см від лінзи.

Визначити

положення d предмета та збільшення Γ зображення.

Дано:

$$F = 5 \text{ см}$$

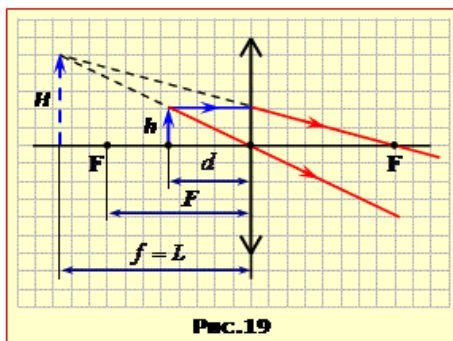
$$L = 25 \text{ см}$$

$d, \Gamma - ?$

Розв'язання

Лупа є найпростішим приладом, що "озброює" око. Для того, щоб зображення було прямим (неперевернутим), точки предмета та їх зображення повинні бути розташовані по один бік від головної оптичної осі лінзи. В збірній лінзі це можливо, тільки коли предмет розміщений між оптичним центром та фокусом. При цьому зображення є

увягним і збільшеним, як видно з побудови **рис.19**.



Отже, згідно з формулою лінзи **(16.13)** та правилом знаків і умовою задачі $f = L$, маємо:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{L} = \frac{1}{F} \Rightarrow d = \frac{LF}{L + F} \approx 4,2 \text{ см.} \quad (1)$$

Збільшення зображення визначимо, підставивши вираз **(1)** у формулу **(16.14)**:

$$\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{L + F}{F} = 6.$$

З останнього виразу видно, що збільшення тим більше, чим менша фокусна відстань лінзи. Тому в якості луп використовують короткофокусні лінзи, і при розгляданні предмета його розміщують у безпосередньо біля фокуса лупи. Це очевидно з формули **(1)** за умови $F \ll L$.

Задача_48

Відстань між предметом та його зображенням у розсіювальній лінзі $l = 5$ см, а збільшення $\Gamma = 0,5$.

Визначити

фокусну відстань F та оптичну силу лінзи D .

Дано:

$$l = 5 \text{ см}$$

$$\Gamma = 0,5$$

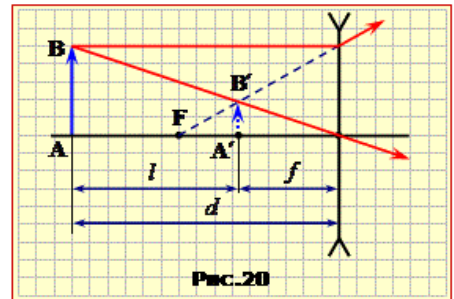
$$F, D - ?$$

Розв'язання

Побудова зображення предмета АВ в розсіювальній лінзі та відповідні відстані показані на **рис.20**, з якого видно що

$$l = d - f. \quad (1)$$

Лінійне збільшення лінзи Γ визначається формулою (16.14):



$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d}. \quad (2)$$

З рівнянь (1) та (2) знайдемо f та d :

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} \Rightarrow F = \frac{fd}{d-f} = \frac{l\Gamma}{(1-\Gamma)^2} = \frac{5 \cdot 0,5}{1-0,5} = 10 \text{ см.}$$

Оптична сила лінзи

$$D = -\frac{1}{F} = -10 \text{ дптр.}$$

Задача_49

Короткозорий хлопець читає книжку, тримаючи її на відстані $d_0 = 16$ см від очей.

Визначити

оптичну силу $D_{\text{л}}$ окулярів, які потрібні хлопцеві для корекції зору.

Дано: $d_0 = 16 \text{ см}$ $D_{\text{л}} - ?$		Розв'язання Людина з нормальним зором найкраще розрізняє дрібні деталі, якщо предмет розташований на відстані найкращого бачення $d = 25$ см. Люди з дефектами зору змушені роздивлятися дрібні предмети, тримаючи їх на відстанях d_0, що відрізняються від вказаної. Для корекції зору застосовують окуляри, при цьому кришталік ока та лінзу окулярів можна вважати оптичною системою, в якій лінзи розташовані впритул одна до одної. Оптична сила такої системи D, тобто «скорегованого» ока, визначається формулою (16.15):
--	--	---

$$D = D_0 + D_{\text{л}}, \quad (1)$$

де D_0 – оптична сила кришталіка, $D_{\text{л}}$ – оптична сила лінзи окулярів.

За формулою тонкої лінзи **(16.13)**

$$D_0 = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{f}; \quad D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}, \quad (2)$$

де f – відстань між кришталіком та дном ока. (Нагадаємо, що на дні ока знаходиться сітківка, що відіграє роль "екрана", на який фокусується зображення розглядуваних об'єктів). Підставивши вирази **(2)** у формулу **(1)**, після перетворень дістанемо

$$D_{\text{л}} = D - D_0 = \frac{1}{d} - \frac{1}{d_0} = \frac{1}{0,25} - \frac{1}{0,16} = -2,25 \text{ дптр.}$$

Оптична сила від'ємна, отже для короткозорих людей окуляри виготовляються з розсіювальних лінз.

Задача_50

На рисунку 1.1 зображена частина симетричного розподілу інтенсивності в інтерференційній картині від двох щілин (аналог досліду Юнга). Довжина хвилі світла, що падає, $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$. Визначити ступінь монохроматичності світла, яке використовується, та довжину його когерентності.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$d_{\min} - ?$$

$$\lambda = 0,6 \text{ мкм} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м},$$

$$n_1 = \sqrt{n},$$

$$n = 1,53$$

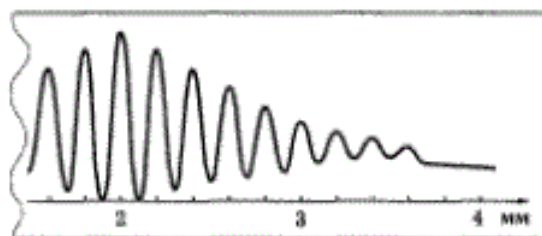


Рисунок 1.1

Ступінь монохроматичності дорівнює граничному порядку інтерференції. Найбільшому максимуму відповідає $m=0$ (третій максимум зліва). Кількість наступних максимумів (порядків інтерференції), як бачимо з рисунка 1.1, дорівнює 8. Таким чином,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = m = 8.$$

Довжина когерентності визначається співвідношенням

$$l_{\text{коз}} = m\lambda.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та визначимо довжину когерентності світла:

$$l_{\text{коз}} = 8 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-6} (\text{м}) = 4 (\text{мкм}).$$

Відповідь: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 8$; $l_{\text{коз}} = 4 \text{ мкм}$.

Задача_51_1

Два точкові когерентні джерела світла розташовані на відстані $l = 0,5$ м від екрана. Довжина хвилі світла $\lambda = 620$ нм. Відстань між джерелами $d = 0,4$ мм.

Визначити

відстань Δx між інтерференційними максимумами на екрані.

Дано:

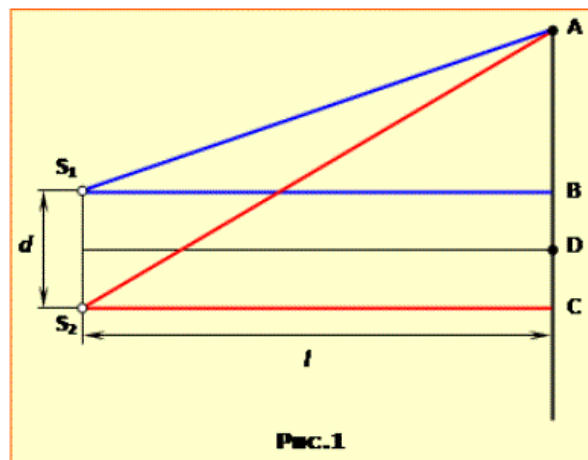
$$l = 0,5 \text{ м}$$

$$\lambda = 620 \text{ нм} = 6,2 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$d = 0,4 \text{ мм} = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\Delta x = ?$$

Розв'язання



Припустимо, що в точці А на екрані (**рис.1**) спостерігається максимум інтерференції. Це можливо, якщо різниця ходу Δ двох променів S_1A та S_2A задовольняє умові (**17.8a**):

$$\Delta = \pm m\lambda, \quad (1)$$

де m – цілі числа. Знайдемо різницю ходу, скориставшись геометричною побудовою на **рис.1**. З трикутників S_1AB та S_2AC за теоремою Піфагора маємо:

$$S_1A^2 = S_1B^2 + AB^2; \quad S_2A^2 = S_2C^2 + AC^2.$$

Відрізки AB та AC відповідно дорівнюють

$$AB = AD - \frac{1}{2}BC; \quad AC = AD + \frac{1}{2}BC.$$

Задача_51_2

Позначимо $AD = x$. Оскільки $S_1B = S_2C = l$, $BC = d$, маємо:

$$S_1A^2 = l^2 + (x - d/2)^2; \quad S_2A^2 = l^2 + (x + d/2)^2. \quad (2)$$

Різницю квадратів ($S_2A^2 - S_1A^2$) запишемо у вигляді:

$$S_2A^2 - S_1A^2 = (S_2A - S_1A)(S_2A + S_1A).$$

Інтерференційна картина в таких випадках завжди спостерігається поблизу центра екрана (точка **D** на **рис.1**), тобто $x \ll l$. За цих умов $S_2A + S_1A \approx 2l$, $S_2A - S_1A = \Delta$ отже

$$S_2A^2 - S_1A^2 = \Delta \cdot 2l.$$

Підставимо сюди вирази **(2)** і дістанемо:

$$l^2 + (x + d/2)^2 - l^2 - (x - d/2)^2 = \Delta 2l \Rightarrow x = \frac{\Delta \cdot l}{d}.$$

Врахувавши умову **(1)**, знаходимо, що точка A, в якій спостерігається максимум інтерференції з номером m , віддалена від точки D на відстань

$$x_m = \frac{m\lambda l}{d}.$$

Точка A_1 , в якій спостерігається максимум з номером $(m + 1)$, віддалена від точки O на відстань

$$x_{m+1} = \frac{(m + 1)\lambda l}{d},$$

отже відстань між максимумами

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda l}{d}.$$

З останнього виразу зрозуміло, що для покращення умов спостереження інтерференції необхідно збільшувати відстань від джерел до екрана l і зменшувати відстань між джерелами d .

Виконаємо обчислення:

$$\Delta x = \frac{6,2 \cdot 10^{-7} \cdot 0,5}{0,4 \cdot 10^{-3}} = 7,75 \cdot 10^{-4} \text{ м} \approx 0,8 \text{ мм}.$$

Задача_52_1

На тонку плівку з показником заломлення $n = 1,33$ падає паралельний пучок білого світла під кутом $\alpha = 30^\circ$.

Визначити

мінімальну товщину плівки d , при якій відбите світло з довжиною хвилі $\lambda_1 = 0,64$ мкм максимально підсилене внаслідок інтерференції, а з довжиною хвилі $\lambda_2 = 0,40$ мкм – зовсім не відбивається. Врахувати, що при відбиванні від оптично більш густого середовища фаза відбитої хвилі стрибком змінюється на $\delta = \pi$.

Дано:

$n = 1,33$

$\alpha = 30^\circ$

$\lambda_1 = 0,64$ мкм

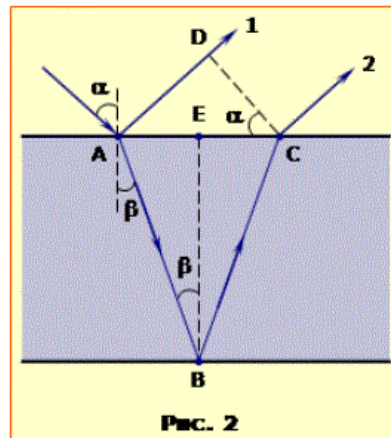
$\lambda_2 = 0,40$ мкм

$d - ?$

Розв'язання

Світло, що падає на плівку, частково відбивається від її верхньої поверхні, частково входить у плівку, відбивається від її нижньої поверхні та виходить назовні. Хід одного з падаючих променів показаний на **рис.2**. Промені **1** та **2** є когерентними, оскільки утворені поділом одного падаючого променя. Якщо на шляху променів поставити лінзу, що збере їх в одну точку (такою лінзою може бути кристалик ока), то буде

спостерігатись інтерференція. Як наслідок, інтенсивність відбитого світла в залежності від різниці фаз δ може підсилюватися (при виконанні умови **(17.7а)**), або послаблятися (при виконанні умови **(17.7б)**).



Задача_52_2

Різниця фаз залежить від різниці ходу променів (формула (17.5)). Визначимо геометричні довжини шляху променів **1** та **2** від точки падіння А до точок D та С (подальші шляхи променів до екрана однакові, тому їх не треба враховувати). Шлях променя **1** $l_1 = AD$. З трикутника ACD:

$$l_1 = AC \cdot \sin \alpha = 2AE \sin \alpha.$$

З трикутника ABE: $AE = d \cdot \tan \beta$, отже $l_1 = 2d \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}$

Підставивши вираз $\sin \beta = \sin \alpha / n$ з закону заломлення світла (16.6), дістанемо:

$$l_1 = 2d \frac{\sin^2 \alpha}{n \sqrt{1 - \sin^2 \alpha / n}} = \frac{2d \sin^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}. \quad (1)$$

Аналогічно визначаємо шлях променя **2** (див. рис.2):

$$l_2 = AB + BC = 2AB = \frac{2d}{\cos \beta} = \frac{2d}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{2dn}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}. \quad (2)$$

В однорідному середовищі різниця фаз пов'язана з шляхами променів співвідношенням (17.5). Але в даній задачі промені поширюються в різних середовищах: промінь **1** у повітрі ($n = 1$), а промінь **2** у плівці ($n = 1,33$). Тоді довжини хвиль цих променів різні: у променя **1** задане в умові значення λ_0 , а у променя **2** $\lambda = \lambda_0 / n$ (див. формулу (16.4)), і формула (17.5) набуває вигляду:

$$\delta = \frac{2\pi l_2}{\lambda} - \frac{2\pi l_1}{\lambda_0} \Rightarrow \delta = \frac{2\pi}{\lambda} (l_2 n - l_1).$$

Підставивши в це співвідношення вирази (2) і (1), після спрощення отримаємо:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot 2d \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}. \quad (3)$$

Задача_52_3

Для визначення результату інтерференції цих променів слід урахувати вказаний в умові ефект зміни фази $\delta_0 = \pi$ променя **1**, який відбивається від плівки (оптично більш густої, ніж повітря). Промінь **2** в точці В відбивається від повітря, тому його фаза не змінюється. Тому повна різниця фаз променів **1** і **2** $\delta_n = \delta - \delta_0 = \delta - \pi$. З урахуванням виразу **(3)**, маємо:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \left(2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda_0}{2} \right). \quad (4)$$

Максимум інтерференції для довжини хвилі $\lambda_0 = \lambda$ спостерігається при виконанні умови **(17.7a)**, тобто

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda_0}{2} \right) &= 2m_1\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} &= (2m_1 + 1)\frac{\lambda_0}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Мінімум інтерференції для довжини хвилі $\lambda_0 = \lambda$ спостерігається при виконанні умови **(17.7b)**, тобто

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda_0}{2} \right) &= (2m_2 + 1)\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} &= (m_2 + 1)\lambda_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Порядки інтерференції (числа m_1, m_2) у формулах **(5)** та **(6)** є незалежними і, звичайно, можуть бути різними.

Оскільки умови **(5)** і **(6)** повинні виконуватись одночасно, то, прирівнюючи праві частини, дістанемо

$$(2m_1 + 1)\frac{\lambda_1}{2} = (m_2 + 1)\lambda_2 \Rightarrow \frac{2m_2 + 2}{2m_1 + 1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Мінімальній можливій товщині плівки відповідають мінімальні значення цілих чисел m_2 та m_1 , що з урахуванням значень λ_1 та λ_2 дає

$$\frac{2m_2 + 2}{2m_1 + 1} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{m_2 + 1}{2m_1 + 1} = \frac{4}{5}.$$

Звідси: $m_2 + 1 = 4$; $2m_1 + 1 = 5$.

Підставивши будь-яке з цих чисел у відповідну формулу (**(6)** або **(5)**), отримаємо відповідь. Наприклад:

$$d = \frac{(2m_1 + 1)\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \frac{5 \cdot 0,64 \cdot 10^{-6}}{4\sqrt{1,33^2 - \sin^2 30^\circ}} = 6,49 \cdot 10^{-7} \text{ м} \approx 0,65 \text{ мкм}.$$

Задача_53_1

Між скляною пластинкою і плоско-опуклою лінзою, яка лежить на ній, міститься рідина (рис. 1.6). Знайти показник заломлення рідини, якщо радіус r третього темного кільця Ньютона при спостереженні у відбитому світлі з довжиною хвилі $\lambda = 0,56 \text{ мкм}$ дорівнює $r_s = 1,69 \text{ мм}$. Радіус кривини лінзи $R = 1,5 \text{ м}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$n = ?$

$$r_s = 1,69 \text{ мм} = 1,69 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\lambda = 0,56 \text{ мкм} = 0,56 \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

$$k = 5,$$

$$R = 1,5 \text{ м}$$

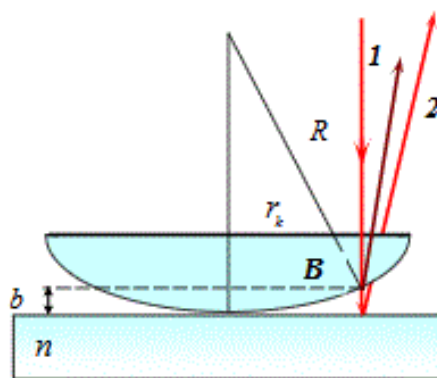


Рисунок 1.6

Схема установки спостереження кілець Ньютона зображена на рис. 1.6. Із цього рисунка бачимо, що

$$R^2 = (R - b)^2 + r^2 = R^2 - 2Rb + b^2 + r^2, \quad (1)$$

де R – радіус кривини лінзи; b – товщина зазору між лінзою і скляною пластинкою. Оскільки $b^2 \ll 2Rb$, то величиною b^2 можна знехтувати. З урахуванням цього після простих перетворень одержимо

$$b^2 = \frac{r^2}{2R}. \quad (2)$$

Оптична різниця ходу двох променів, відбитих від верхньої і нижньої поверхонь зазору між пластиною і лінзою, дорівнює

$$\Delta = 2nb = 2n \frac{r^2}{2R} = n \frac{r^2}{R}, \quad (3)$$

де n – коефіцієнт заломлення рідини у зазорі.

Задача_53_2

Щоб урахувати, що при відбитті від пластинки виникає зміна фази світла на π , до правої частини виразу (3) додамо $\lambda/2$.

Умова спостереження інтерференційного мінімуму має вигляд

$$\Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad (4)$$

де k – порядок інтерференційного мінімуму.

Прирівнявши вирази (3) і (4), знайдемо

$$n\frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}. \quad (5)$$

Після перетворень одержимо таке співвідношення:

$$n\frac{r^2}{R} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}(2k+1-1) = k\lambda.$$

Із цього виразу знайдемо n :

$$n = \frac{k\lambda R}{r^2}. \quad (6)$$

У випадку п'ятого кільця Ньютона $k = 5$.

Після підставлення числових значень фізичних величин у (6) одержимо

$$n = \frac{5 \cdot 0,56 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5}{(1,69 \cdot 10^{-3})^2} = 1,47.$$

Відповідь: $n = 1,47$.

Задача_54

Відстань між двома когерентними джерелами $d = 0,9 \text{ мм}$. Монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,64 \text{ мкм}$ від джерел попадає на екран, який міститься на відстані $L = 3,5 \text{ м}$ від них. Визначити кількість інтерференційних смуг на одиницю довжини екрана.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$k/x = ?$$

$$d = 0,9 \text{ мм} = 9 \cdot 10^{-4} \text{ м},$$

$$\lambda = 0,64 \text{ мкм} = 6,4 \cdot 10^{-7} \text{ м},$$

$$L = 3,5 \text{ м}$$

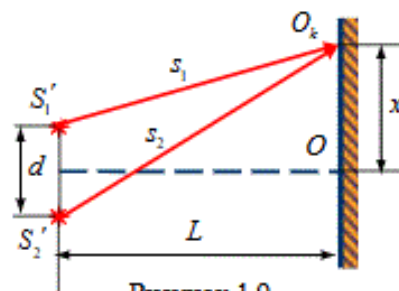


Рисунок 1.9

У точці O на екрані буде спостерігатися максимальна освітленість. Оскільки точка O рівновіддалена від джерел S_1' та S_2' , то оптична різниця ходу хвиль $S_1'O$ і $S_2'O$ буде дорівнювати нулю. У довільній точці екрана O_k максимум освітленості буде спостерігатися за умови, якщо оптична різниця ходу променів дорівнює цілому числу довжин хвиль:

$$\Delta = s_2 - s_1 = k\lambda. \quad (1)$$

Різниця ходу променів у досліді Юнга дорівнює $\Delta = xd/L$.

Ураховуючи вираз (1), одержимо

$$\Delta = \frac{xd}{L} = k\lambda. \quad (2)$$

Із виразу (2) можна визначити кількість світлих інтерференційних смуг на одиницю довжини екрана:

$$\frac{k}{x} = \frac{d}{\lambda L}.$$

Підставимо у цей вираз числові значення фізичних величин та одержимо

$$\frac{k}{x} = \frac{9 \cdot 10^{-4}}{6,4 \cdot 10^{-7} \cdot 3,5} = 401(\text{м}^{-1}).$$

Відповідь: $k/x = 401 \text{ м}^{-1}$.

Задача_55_1

Визначити кутову відстань між сусідніми світлими смугами у досліді Юнга, якщо відомо, що екран віддалений від джерел світла на відстань $L = 1\text{ м}$, а п'ята світла смуга на екрані міститься на відстані $x = 1,5\text{ мм}$ від центра інтерференційної картини.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta\alpha - ?$
$x = 1,5\text{ мм} = 1,5 \cdot 10^{-3}\text{ м},$
$k = 5,$
$L = 1\text{ м}$

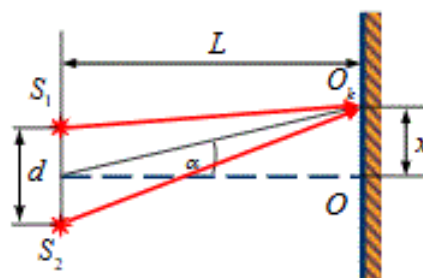


Рисунок 1.10

У точці O на екрані (рис. 1.10) (центр інтерференційної картини) буде спостерігатися максимальна освітленість, оскільки ця точка рівновіддалена від джерел світла S_1 та S_2 , і оптична різниця ходу хвиль S_1O і S_2O буде дорівнювати нулю. У довільній точці екрана O_k максимум освітленості буде спостерігатися, коли оптична різниця ходу хвиль S_1O_k і S_2O_k дорівнює цілому числу довжин хвиль

$$\Delta = s_2 - s_1 = k\lambda. \quad (1)$$

Різниця ходу променів у досліді Юнга дорівнює

$$\Delta = \frac{xd}{L}. \quad (2)$$

Прирівняємо вирази (1) і (2) та одержимо

$$xd/L = k\lambda,$$

Звідки координата k -го максимуму

$$x_k = \frac{k\lambda L}{d}. \quad (3)$$

Задача_55_2

Кутове положення інтерференційної смуги на екрані визначається кутом α . Із рисунка 1.10 бачимо, що $\operatorname{tg} \alpha = x/L$. Оскільки цей кут є малим, то можна вважати, що

$$\alpha \approx \frac{x}{L}. \quad (4)$$

Підставимо (3) у вираз (4), одержимо

$$\alpha \approx k\lambda/d. \quad (4)$$

Кутова відстань між сусідніми світлими смугами дорівнює

$$\Delta\alpha \approx \frac{k\lambda}{d} - \frac{(k-1)\lambda}{d} = \frac{\lambda}{d}. \quad (5)$$

Підставимо (5) у вираз (3) та одержимо

$$x = kL\Delta\alpha,$$

звідки

$$\Delta\alpha = \frac{x}{kL}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та проведемо розрахунки:

$$\Delta\alpha = \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{5} = 3 \cdot 10^{-4} (\text{рад}) = 0,0017^\circ = 1,03'.$$

Відповідь: $\Delta\alpha = 1,03'$.

Задача_56

Плоска світлова хвиля з довжиною хвилі $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$ падає нормально на діафрагму з круглим отвором діаметром $d = 1 \text{ мм}$. На якій відстані b від отвору міститься точка спостереження, якщо отвір відкриває одну зону Френеля?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$b - ?$	Радіус r_k зони Френеля з номером k для плоскої хвилі дорівнює
$\lambda = 0,5 \text{ мкм} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м},$	$r_k = \sqrt{bk\lambda}.$
$d = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м},$	Звідси одержимо вираз для відстані
$k = 1$	$b = \frac{d^2}{4k\lambda}.$

Підставимо значення фізичних величин в одержаний вираз та виконаємо обчислення:

$$b = \frac{(10^{-3})^2}{4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = \frac{10^{-6}}{20 \cdot 10^{-7}} = 0,5 (\text{м}).$$

Відповідь: $b = 0,5 \text{ м}.$

Задача_57_1

Плоска монохроматична світлова хвиля з інтенсивністю I_0 падає нормально на непрозорий екран із круглим отвором. Яка інтенсивність світла I спостерігається за екраном у точці, для якої радіус отвору дорівнює радіусу першої зони Френеля?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

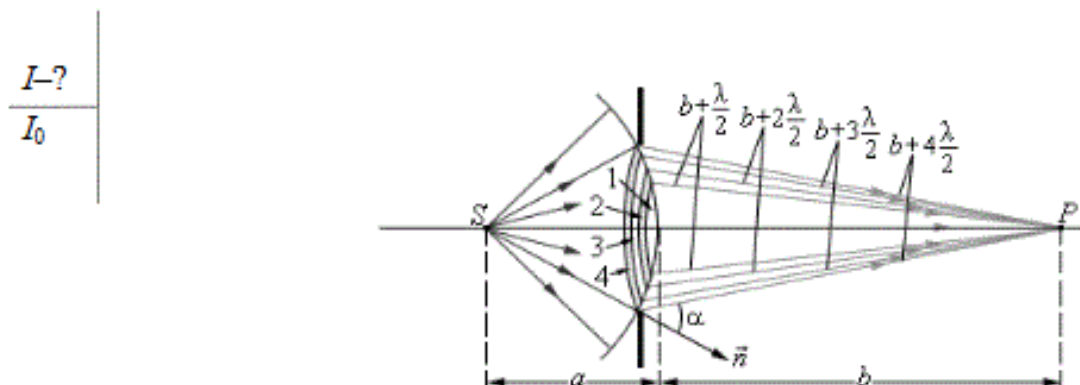


Рисунок 2.3

Амплітуда A_k коливань у точці P (рис. 2.3), розміщеній на прямій, що проходить через центр отвору та джерело, буде визначатися через амплітуди a_k коливань, що доходять до точки P від окремих зон Френеля. Оскільки фази коливань, що надходять до точки P від двох сусідніх зон, відрізняються на π , то амплітуда сумарного коливання A_k , викликаного дією k зон, дорівнює

$$A_k = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - \dots \pm A_k. \quad (1)$$

Останній член виразу має додатний знак, якщо $k = 2m + 1$, і від'ємний, якщо $k = 2m$. Можна вважати, що амплітуда коливань, викликаних k -ю зоною, наближено дорівнює півсумі амплітуд коливань, викликаних зонами $(k - 1)$ і $(k + 1)$:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Тоді, групуючи доданки у співвідношенні (1), можна одержати таку наближену формулу для обчислення результуючого коливання в точці P :

Задача_57_2

$$A_k = \frac{a_1}{2} \pm \frac{a_k}{2},$$

де знаки «+» і «-» відповідають непарному та парному числам зон відповідно. Таким чином, амплітуда сумарного коливання у точці P залежить від числа відкритих зон k . Внесок окремих зон зменшується зі збільшенням k . При повністю відкритому отворі (за відсутності діафрагми) $k = \infty$. Дія останньої зони є нескінченно малою і $A_\infty = \frac{1}{2}a_1$. За умовою задачі точка P розміщена так, що $k = 1$. У цьому випадку

$$A_1 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2} = a_1.$$

Тоді відношення амплітуд коливань у точці P дорівнює

$$\frac{A_1}{A_\infty} = \frac{a_1}{\frac{1}{2}a_1} = 2.$$

Урахуємо ту обставину, що інтенсивність коливань пропорційна квадрату амплітуди, тобто

$$I \sim A^2,$$

тоді

$$\frac{A_1^2}{A_\infty^2} = \frac{I}{I_0},$$

Звідки одержимо

$$I = I_0 \frac{A_1^2}{A_\infty^2} = 4I_0.$$

Відповідь: $I = 4I_0$.

Задача_58_1

На щілину шириною $b = 0,1 \text{ мм}$ падає нормально монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$. За щілиною міститься збиральна лінза, у фокальній площині якої міститься екран. Що буде спостерігатися на екрані, якщо кут дифракції дорівнює: 1) $\varphi_1 = 17'$; 2) $\varphi_2 = 43'$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$k - ?$

$$\lambda = 0,5 \text{ мкм} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м},$$

$$b = 0,1 \text{ мм} = 10^{-4} \text{ м},$$

$$\varphi_1 = 17',$$

$$\varphi_2 = 43'$$

При дифракції плоских хвиль на щілині (дифракції Фраунгофера) (рис. 2.4) мінімуми інтенсивності світла спостерігаються у напрямках φ , обумовлених умовою

$$b \sin \varphi = \pm k \lambda,$$

де k – номер інтерференційного мінімуму; b – ширина щілини.

Максимуми інтенсивності спостерігаються, якщо в отворі укладається непарне число зон Френеля. У цьому випадку напрямки φ визначаються таким співвідношенням:

$$b \sin \varphi = \pm (2k + 1) \lambda / 2.$$

Для малих кутів

$$\sin \varphi \approx \varphi.$$

У цьому випадку одержуємо таку умову спостереження мінімумів інтенсивності:

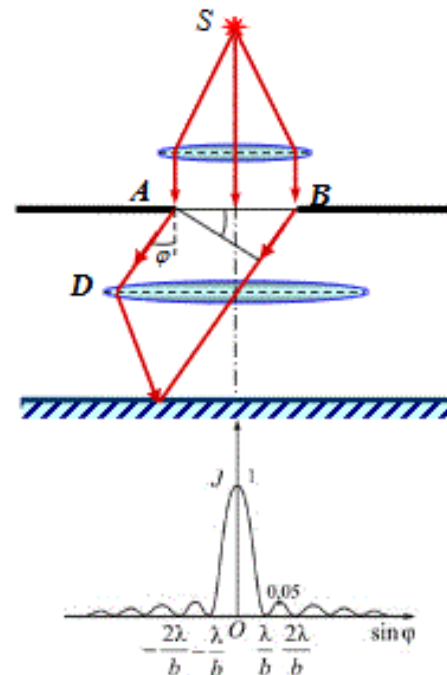


Рисунок 2.4

Задача_58_2

$$\varphi = \pm k\lambda/b.$$

Максимуми інтенсивності будуть спостерігатися під кутами

$$\varphi = \pm(2k+1)\lambda/2b.$$

Підставляючи числові значення фізичних величин, знаходимо, що мінімуми та максимуми дифракції будуть спостерігатися під такими кутами:

$$\begin{aligned} N=12, \quad k_{\min}=2, \quad k_{\max}=1, \quad k_{\max}=2, \\ \varphi_1=17,2'; \quad \varphi_2=37,4'; \quad \varphi_1=25,8'; \quad \varphi_2=43'. \end{aligned}$$

Порівнюючи одержані значення з наведеними в умові задачі, бачимо, що під кутом $\varphi_1=17'$ буде спостерігатися перший мінімум інтенсивності, а під кутом $\varphi_2=43'$ – другий максимум інтенсивності.

Відповідь: під кутом $\varphi_1=17'$ буде спостерігатися перший мінімум інтенсивності $k_{\min}=1$, а $\varphi_2=43'$ – другий максимум інтенсивності світла $k_{\max}=2$.

Задача_59

Скляний клин (показник заломлення $n = 1,5$) має кут при вершині $\varphi = 2'$. На клин падає нормально монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 600$ нм

Визначити

відстань x між сусідніми темними інтерференційними смугами, що спостерігаються у відбитих променях.

Дано:

$$n = 1,5$$

$$\varphi = 2'$$

$$\lambda = 600 \text{ нм} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$x = ?$

Розв'язання

Промінь світла, який падає на клин, частково відбивається, а частково проходить у скло. Оскільки кут клина дуже малий, можна вважати, що кут заломлення практично дорівнює куту падіння, тобто $\alpha = \beta = 0$. Промінь, що зайшов у скло, відбивається від нижньої грані клина і після виходу зі скла інтерферує з променем, відбитим від верхньої грані. Умови утворення темних смуг (мінімумів

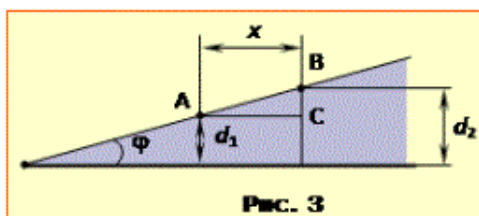
інтерференції) цих променів такі ж, як у попередній задачі. Слід тільки врахувати, що в даній задачі $\alpha = 0$. Отже, згідно з виразом (6) з задачі 17.2 маємо таку умову мінімумів:

$$2dn = \lambda, \quad (1)$$

де m – порядок (номер) мінімуму.

Припустимо, що в точці А (рис.3) спостерігається $(m + 1)$ -й мінімум. Тоді, позначивши товщину клина в цій точці d_1 , можемо записати:

$$2d_1n = (m + 1)\lambda. \quad (2)$$



Аналогічно для точки В де спостерігається наступний інтерференційний мінімум порядку $m + 2$ і товщина клина дорівнює d_2 :

$$2d_2n = (m + 2)\lambda. \quad (3)$$

Віднявши ліві та праві частини виразів (3) та (2), дістанемо:

$$2(d_2 - d_1)n = \lambda \Rightarrow d_2 - d_1 = \frac{\lambda}{2n}.$$

Різниця $d_2 - d_1 = s$ дуже мала. Тому з трикутника ABC, враховуючи малість кута φ (звичайно, вираженого в радіанах), маємо

$$\frac{s}{\varphi} = \frac{\lambda}{2n\varphi} = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 1,5 \cdot 5,82 \cdot 10^{-4}} = 0,00034 \text{ м} = 0,34 \text{ мм}.$$

Задача_60

2. Визначити довжину світлової хвилі за допомогою дифракційної решітки, якщо стала решітки 0,01мм. Перше дифракційне зображення дістали на відстані 11,8см від центрального зображення і на відстані 2м від решітки.

Дано:

$$l = 2 \text{ м}$$

$$h = 11,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$d = 0,01 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\lambda = ?$$

Розв'язання:

З формули для максимуму для дифракційної решітки визначимо синус кута φ :

$$d \cdot \sin \varphi = k \cdot \lambda, \quad k = 1$$

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{d}, \quad \sin \varphi = \frac{h}{l}$$

$$\text{Отже, } \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{l} \Rightarrow \lambda = d \frac{h}{l}$$

Підставивши числові значення, дістанемо:

$$\lambda = \frac{0,01 \cdot 10^{-3} \cdot 11,8 \cdot 10^{-2}}{2} = 5,9 \cdot 10^{-9} \text{ м}$$

Відповідь: 5,9 нм.

Задача_61

При опроміненні дифракційної ґратки білим світлом спектри другого та третього порядків частково перекриваються.

Визначити

довжину хвилі λ_2 у спектрі другого порядку ($m_2 = 2$), на яку накладається фіолетова ($\lambda_3 = 400$ нм) межа спектра третього порядку ($m_3 = 3$).

Дано:

$$m_2 = 2$$

$$m_3 = 3$$

$$\lambda_3 = 400 \text{ нм}$$

$$\lambda_3 = ?$$

Розв'язання

З умови задачі зрозуміло, що кути дифракції φ для хвиль λ_2 та λ_3 однакові. Тому, згідно з умовою (17.9), маємо:

$$d \sin \varphi = m_2 \lambda_2; \quad d \sin \varphi = m_3 \lambda_3$$

Прирівнюючи праві частини цих виразів, одержимо

$$m_2 \lambda_2 = m_3 \lambda_3 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{m_3}{m_2} \lambda_3 = \frac{3}{2} \cdot 400 = 600 \text{ нм.}$$

Задача_62

Світло з довжиною хвилі $\lambda = 530 \text{ нм}$ падає на прозору дифракційну ґратку, період якої дорівнює $d = 1,5 \text{ мкм}$. Визначити кут із нормаллю до ґратки, під яким виникає максимум найбільшого порядку за умови, що світло падає на ґратку нормально.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\varphi_{\text{max}} - ?$	За нормального падіння світла з довжиною хвилі λ на дифракційну ґратку кут, під яким спостерігається максимум k -го порядку, можна визначити за формулою
$\lambda = 530 \text{ нм} = 5,3 \cdot 10^{-7} \text{ м},$	
$d = 1,5 \text{ мкм} = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$	

$$d \sin \varphi = \pm k \lambda,$$

де $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ – порядок дифракції.

Оскільки значення $\sin \varphi$ в інтервалі $[-1, 1]$, то максимальний порядок фраунгоферового максимуму дорівнює найбільшому з цілих чисел, які не перевищують d/λ . У нашому випадку він дорівнює $k = 2$. Тоді кут, під яким буде спостерігатися цей максимум, знайдемо зі співвідношення

$$\sin \varphi = \pm \frac{k \lambda}{d} \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{k \lambda}{d}.$$

Підставлення числових значень в одержаний вираз дає

$$\varphi_{\text{max}} = \arcsin \frac{2 \cdot 5,30 \cdot 10^{-7}}{1,5 \cdot 10^{-6}} = 45^{\circ}.$$

Відповідь: $\varphi = 45^{\circ}$.

Задача_63_1

На дифракційну ґратку нормально до її поверхні падає паралельний пучок світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$. Розміщена поблизу ґратки лінза проектує дифракційну картину на плоский екран, віддалений від лінзи на відстань $L = 1 \text{ м}$. Відстань між двома максимумами інтенсивності першого порядку, які спостерігаються на екрані, дорівнює $l = 20,2 \text{ см}$.

Визначити: 1) сталу d дифракційної ґратки; 2) число штрихів n на один сантиметр; 3) число максимумів N , яке при цьому дає дифракційна ґратка; 4) максимальний кут відхилення φ_{max} променів, що відповідає останньому дифракційному максимуму.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$d - ? \quad n - ? \quad N - ? \quad \varphi_{\text{max}} - ?$
$\lambda = \lambda = 0,5 \text{ мкм} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м},$
$L = 1 \text{ м},$
$l = 20,2 \text{ см} = 0,202 \text{ м},$
$h = 1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м},$
$k = 1$

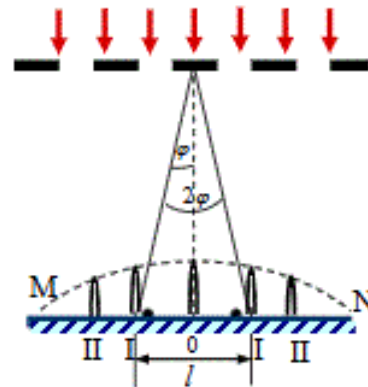


Рисунок 2.5

1 Стала дифракційної ґратки,
довжина хвилі та кут відхилення променів, що відповідає k -му максимуму,

Задача_63_2

пов'язані співвідношенням

$$d \sin \varphi = \pm k \lambda, \quad (1)$$

де d – період дифракційної ґратки, k – порядок максимуму.

У нашому випадку $k = 1$. Оскільки $\frac{l}{2} \ll L$, то $\operatorname{tg} \varphi = \sin \varphi$. Із рисунка 2.5

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l/2}{L}.$$

З урахуванням трьох останніх співвідношень вираз (1) набере вигляду

$$d \frac{l}{2L} = \lambda, \quad (2)$$

звідки знайдемо сталу ґратки

$$d = \frac{2L\lambda}{l}.$$

Підставляючи числові значення фізичних величин, знаходимо

$$d = \frac{2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{0,202} = 4,95 \cdot 10^{-6} \text{ (м)}.$$

2 Число штрихів на 1 см знайдемо з виразу

$$n = \frac{h}{d}.$$

Розрахунок дає

$$n = \frac{10^{-2}}{4,95 \cdot 10^{-6}} = 2,02 \cdot 10^3.$$

3 Для визначення числа максимумів, які дає дифракційна ґратка, спочатку підрахуємо максимальне значення $k_{\max}$, виходячи з того, що максимальний кут відхилення променів ґраткою не може перевищувати 90° .

Із формули (1) знайдемо

$$k_{\max} = d \sin \varphi / \lambda. \quad (3)$$

Задача_63_3

Підставляючи числові значення фізичних величин, знаходимо

$$k_{\max} = 4,95 \cdot 10^{-6} / 5 \cdot 10^{-7} = 9,9.$$

Число k обов'язково повинне бути цілим. У той самий час воно не може набути значення, яке дорівнює 10, оскільки при цьому значення $\sin \varphi$ повинне бути більшим за одиницю, що неможливо. Таким чином:

$$k_{\max} = 9.$$

Визначимо загальне число максимумів дифракційної картини, одержаних за допомогою дифракційної ґратки. Ліворуч та праворуч від центрального максимуму буде спостерігатися однакова кількість максимумів, яка дорівнює $k_{\max}$, тобто всього $2k_{\max}$. Якщо врахувати центральний нульовий максимум, то одержимо загальне число максимумів

$$N = 2k_{\max} + 1.$$

Підставимо значення $k_{\max}$, визначимо

$$N = 2 \cdot 9 + 1 = 19.$$

4 Для визначення максимального кута відхилення променів, що відповідає останньому дифракційному максимуму, знайдемо із співвідношення (3) синус цього кута:

$$\sin \varphi_{\max} = k_{\max} \lambda / d.$$

Звідки

$$\varphi_{\max} = \arcsin(k_{\max} \lambda / d).$$

Підставляючи числові значення фізичних величин, знаходимо

$$\varphi_{\max} = \arcsin(9 \cdot 5 \cdot 10^{-7} / 4,95 \cdot 10^{-6}) = 65,4^\circ.$$

Відповідь: 1) $d = 4,95 \cdot 10^{-6} \text{ м}$; 2) $n = 2,02 \cdot 10^3$;

3) $N = 2 \cdot 9 + 1 = 19$; 4) $\varphi_{\max} = 65,4^\circ$.

Задача_64_1

Монохроматичне світло нормально падає на дифракційну ґратку, яка має 45 штрихів на кожний міліметр довжини. Кут між напрямками на максимуми другого ($m_1 = 2$) та третього ($m_2 = 3$) порядків $\Theta = 1,6^\circ$.

Визначити

довжину хвилі світла λ .

Дано:

$$N = 45 \text{ 1/мм}$$

$$m_1 = 2$$

$$m_2 = 3$$

$$\Theta = 1,6^\circ$$

$$\lambda - ?$$

Розв'язання

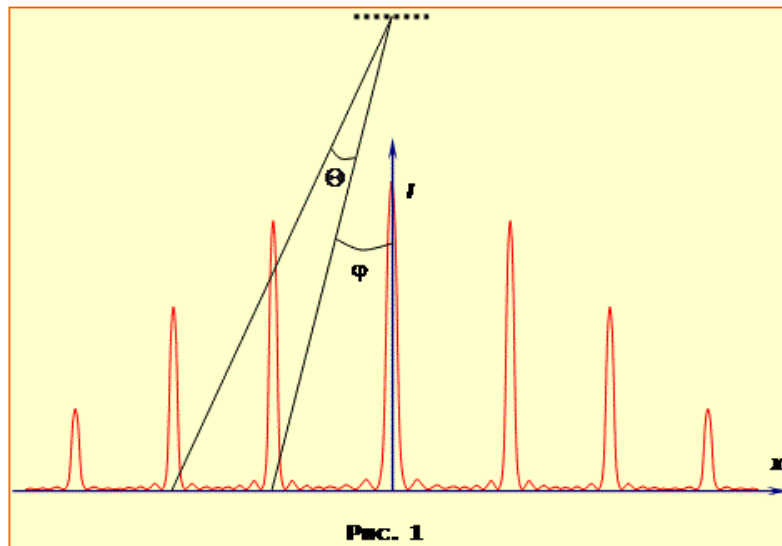
Відповідно до умови головних максимумів дифракційної ґратки (формула (17.9)), і з урахуванням умови задачі для максимумів порядку m_1 і m_2 можна записати:

$$d \sin \varphi = m_1 \lambda, \quad (1)$$

$$d \sin(\varphi + \Theta) = m_2 \lambda, \quad (2)$$

де φ – кут між нормаллю до ґратки і напрямком на максимум порядку m_1 (рис.1), d – період ґратки, що зв'язаний з числом штрихів на одиницю довжини співвідношенням

$$d = \frac{1}{N}.$$



Задача_64_2

Представимо вираз **(2)** у вигляді

$$\frac{m_2 \lambda}{d} = \sin \varphi \cos \Theta + \sin \Theta \cos \varphi. \quad (3)$$

Оскільки кут $\Theta \ll 1$ ($1,6^\circ = 0,028$ рад), то можна прийняти $\cos \Theta = 1$ та $\sin \Theta = \Theta$ (рад). Крім того

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}.$$

Зробивши ці підстановки у вираз **(3)**, одержимо

$$\frac{m_2 \lambda}{d} = \sin \varphi + \Theta \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}.$$

Підставивши вираз $\sin \varphi = m_1 \lambda / d$ з формули **(1)** в останній вираз, після перетворень знаходимо:

$$\lambda = \frac{\Theta}{N \sqrt{(m_2 - m_1)^2 + m_1^2 \Theta}} = \frac{\Theta}{N \sqrt{1 + \Theta^2}} \approx \frac{\Theta}{N}.$$

Обчислення дають:

$$\lambda = \frac{0,028}{45} \approx 620 \text{ нм.}$$

Задача_65_1

1 За якого значення відношення $x = b/d$ (d – стала дифракційної ґратки, b – ширина щілини) буде спостерігатися дифракційний максимум: а) 1-го; б) 2-го; в) 3-го порядків. 2 Визначити значення $x = b/d$, за яких інтенсивність перетворюється на нуль, для максимуму а) 1-го; б) 2-го; в) 3-го порядків.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$x = ?$	Умова спостереження головних дифракційних максимумів при дифракції на ґратці:
а) $k = 1$,	$d \sin \varphi = \pm k \lambda, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (1)$ де d – період дифракційної ґратки; k – порядок максимуму.
б) $k = 2$,	
в) $k = 3$	

Умова спостереження головних дифракційних мінімумів при дифракції на ґратці визначається співвідношенням

$$b \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad (2)$$

де b – ширина прозорої щілини; $m = 1, 2, 3, \dots$ – порядок (номер) мінімумів.

1 Умовою максимуму для ширини дифракційної ґратки буде рівність добутку $b \sin \varphi$ непарному числу півдовжин хвиль, тобто

$$b \sin \varphi = (2k_1 + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (3)$$

де $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ – порядок максимумів.

Потрібно, щоб кути відхилення променів в умовах (1) і (3) були однаковими. Поділимо (3) на (1) та одержимо

$$x = \frac{b}{d} = \frac{(2k_1 + 1) \lambda}{2k \lambda} = \frac{(2k_1 + 1)}{2k}.$$

Величина k_1 визначається умовою, що $x = \frac{b}{d} < 1$, оскільки стала дифракційної ґратки $d = b + a$, де a – ширина непрозорого проміжку.

а) у випадку, якщо $k = 1$, то k_1 може набувати лише значення 0, тобто

Задача_65_2

$$x = \frac{b}{d} = \frac{1}{2};$$

б) за умови, що $k = 2$, k_1 може дорівнювати 0, 2,

$$\text{то } x = \frac{b}{d} = \frac{1}{2 \cdot 2} = 0,25 \quad \text{і } x = \frac{b}{d} = \frac{(2+1)}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} = 0,75;$$

в) якщо $k = 3$, $k_1 = 0, 2, 3$, тобто

$$x = \frac{b}{d} = \frac{(0+1)}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6} = 0,167; \quad x = \frac{b}{d} = \frac{(2 \cdot 1 + 1)}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} = 0,67$$
$$\text{і } x = \frac{b}{d} = \frac{(2 \cdot 2 + 1)}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6} = 0,83.$$

2 Визначимо значення $x = \frac{b}{d}$, за яких інтенсивність перетворюється на нуль. Для цього поділимо вираз (2) на (1) та одержимо

$$x = \frac{b}{d} = \frac{m}{k}. \quad (4)$$

Це співвідношення також є меншим за одиницю, тобто $x = \frac{b}{d} < 1$.

а) у випадку, якщо $k = 1$, зі співвідношення (4) бачимо, що інтенсивність ні за яких значень $x = \frac{b}{d}$ не дорівнює нулю;

б) якщо $k = 2$, то m може дорівнювати 1, тоді

$$x = \frac{b}{d} = \frac{1}{2} = 0,5;$$

в) за умови $k = 3$, $m = 1, 2$, тобто

$$x = \frac{b}{d} = \frac{1}{3} = 0,33 \quad \text{і} \quad x = \frac{b}{d} = \frac{2}{3} = 0,66.$$

Відповідь: 1 а) $x = b/d = 0,5$; б) $x = b/d = 0,25$ та $x = b/d = 0,75$;

в) $x = b/d = 0,167$, $x = b/d = 0,67$ та $x = b/d = 0,83$.

2 а) інтенсивність ні за яких значень $x = b/d$ не дорівнює нулю;

б) $x = b/d = 0,5$; в) $x = b/d = 0,33$ і $x = b/d = 0,66$.

Задача_66

Яку найменшу роздільну здатність R повинна мати дифракційна ґратка, щоб за її допомогою можна було розрізнити дві спектральні лінії калію ($\lambda_1 = 578 \text{ нм}$ і $\lambda_2 = 580 \text{ нм}$)? Яке найменше число N штрихів потрібно нанести на ґратку, щоб розрізнити ці спектральні лінії було можливо у спектрі другого порядку?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$R - ?$ $N - ?$
$\lambda_1 = 578 \text{ нм} = 5,78 \cdot 10^{-7} \text{ м},$
$\lambda_2 = 580 \text{ нм} = 5,8 \cdot 10^{-7} \text{ м},$
$k = 2$

Роздільною здатністю спектрального приладу називають величину

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \quad (1)$$

де λ – довжина хвилі; $\Delta\lambda$ – найменша різниця довжин хвиль двох спектральних ліній, за якої вони можуть бути розділені (спостерігатися у спектрі окремо) за допомогою цього приладу.

Для дифракційної ґратки

$$R = kN, \quad (2)$$

де k – номер дифракційного максимуму; N – число штрихів ґратки. Тоді можна записати

$$N = R/k. \quad (3)$$

Підставимо числові значення фізичних величин у вирази (1) і (3) та одержимо

$$R = \frac{5,8 \cdot 10^{-7}}{5,80 \cdot 10^{-7} - 5,78 \cdot 10^{-7}} = \frac{5,8}{0,02} = 290.$$
$$N = \frac{290}{2} = 145.$$

Відповідь: $R = 290, N = 145$.

Задача_67

Визначити відстань між атомними площинами у кристалі кам'яної солі, якщо дифракційний максимум першого порядку спостерігається за час падіння рентгенівських променів із довжиною хвилі $\lambda = 0,147 \text{ нм}$ під кутом $\theta = 15^\circ 12'$ до поверхні кристала.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$d = ?$
$\lambda = 0,147 \text{ нм} = 1,47 \cdot 10^{-10} \text{ м},$
$\theta = 15^\circ 12' = 15,20^\circ,$
$k = 1$

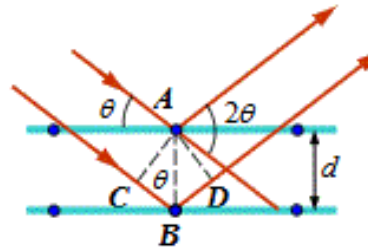


Рисунок 2.6

Дифракція рентгенівських променів на кристалах – це результат інтерференції рентгенівського випромінювання, яке дзеркально відбивається від системи паралельних площин, що проходять через вузли – атоми (наприклад, А (рис. 2.5)) кристалічної ґратки. Ці площини називають атомними. Відбивання спостерігається лише у напрямках, що відповідають дифракційним максимумам, які задовольняють співвідношенням

$$\Delta = |BC| + |BD| = 2d \sin \theta \text{ та } 2d \sin \theta = k\lambda, \quad (1)$$

де $k = 1, 2, 3, \dots$ – порядок дифракційного максимуму; θ – кут ковзання, тобто кут між падаючим променем та площиною кристала; d – відстань між сусідніми площинами.

Зі співвідношення (1):

$$d = \frac{k\lambda}{2 \sin \theta}.$$

Підставимо числові дані та проведемо розрахунки:

$$d = \frac{1 \cdot 1,47 \cdot 10^{-10}}{2 \sin 15,20^\circ} = 2,8 \cdot 10^{-10} (\text{м}) = 0,28 (\text{нм}).$$

Відповідь: $d = 0,28 \text{ нм}$.

Задача_68

Пучок світла з повітря падає на поверхню рідини під кутом $\theta_1 = 54^\circ$. Визначити кут заломлення θ_2 пучка, якщо відбитий пучок повністю поляризований.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$\begin{array}{|l} \theta_2 = ? \\ \hline \theta_1 = 54^\circ \end{array}$$

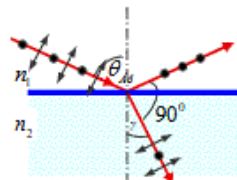


Рисунок 3.3

Відбитий пучок світла буде повністю поляризований (рис. 3.3), якщо світло падає на межу поділу двох середовищ під кутом Брюстера. Цей кут визначається умовою

$$\operatorname{tg} \theta_{sp} = \frac{n_2}{n_1},$$

де n_1 і n_2 – показники заломлення середовищ, у яких поширюються падаючий та заломлений промені відповідно.

Кут заломлення γ можна визначити за допомогою закону заломлення світлових променів на межі поділу двох середовищ:

$$\frac{\sin \theta_{sp}}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Ураховуючи, що $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1}$, одержимо

$$\frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Звідки випливає, що

$$\cos \theta_1 = \sin \theta_2,$$

або

$$\sin(\pi/2 - \theta_1) = \sin \theta_2.$$

Тоді

$$\pi/2 - \theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \pi/2.$$

Таким чином, якщо світло падає на межу поділу середовищ під кутом Брюстера, то сума кутів падіння та заломлення дорівнює 90° .

Звідси легко визначити кут заломлення:

$$\theta_2 = \pi/2 - \theta_1, \quad \theta_2 = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ.$$

Відповідь: $\theta_2 = 36^\circ$.

Задача_69

Граничний кут повного внутрішнього відбивання пучка світла на межі поділу рідини з повітрям дорівнює $\theta = 43^\circ$. Визначити кут Брюстера θ_s для падіння променя з повітря на поверхню цієї рідини.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\theta_s - ?$	Кут повного внутрішнього відбивання на межі поділу рідини з показником заломлення n і повітря з показником заломлення $n_{\pi} = 1$ визначається з умови
$\theta = 43^\circ$	

$$\sin \theta_s = \frac{n}{n_{\pi}} = n. \quad (1)$$

Звідси показник заломлення рідини дорівнює $n = \sin 43^\circ$. Кут Брюстера визначається з умови

$$\operatorname{tg} \theta_s = 1/n. \quad (2)$$

Порівнюючи співвідношення (1) і (2), одержуємо

$$\operatorname{tg} \theta_s = \frac{1}{\sin \theta}.$$

Отже,

$$\theta_s = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right).$$

Обчислення дають

$$\theta_s = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sin 43^\circ} \right) = 55,7^\circ.$$

Відповідь: $\theta_s = 55,7^\circ$.

Задача_70

Промінь світла проходить шар льоду, падає на алмазну пластинку, частково відбивається та частково заломлюється. Визначити, яким повинен бути кут падіння, щоб відбитий промінь був максимально поляризованим.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\theta_s - ?$	Відбите світло максимально поляризоване за кута падіння $\alpha = \theta_s$, який задовольняє закон Брюстера
$n_1 = 1,31,$	
$n_2 = 2,42$	

$$\operatorname{tg} \theta_s = \frac{n_2}{n_1},$$

де n_2 і n_1 – показники заломлення другого (алмазу) та першого середовища (льоду) відповідно.

Звідси визначимо кут падіння

$$\theta_s = \operatorname{arctg} n_2 / n_1.$$

Із розрахунку одержуємо

$$\theta_s = \operatorname{arctg} \frac{2,42}{1,31} = 61,5^\circ = 61^\circ 03'.$$

Відповідь: $\theta_s = 61^\circ 03'$.

Задача_71_1

Природне світло падає на поверхню діелектрика під кутом повної поляризації. Ступінь поляризації заломленого променя дорівнює $P_2 = 0,124$. Визначити коефіцієнт пропускання світла τ .

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\tau = ?$	Природне світло можна уявити як накладання двох некогерентних хвиль, поляризованих у взаємно перпендикулярних площинах. Ці хвилі мають однакову інтенсивність
$P_2 = 0,124$	

$$I_{\parallel} = I_{\perp}, \quad (1)$$

де індексами $\parallel$ і $\perp$ позначені коливання, паралельні та перпендикулярні до площини падіння світла на поверхню діелектрика, причому інтенсивність падаючого світла

$$I = I_{\parallel} + I_{\perp}. \quad (2)$$

Під час падіння світла під кутом повної поляризації відбиваються лише хвилі, поляризовані у площині, перпендикулярній до площини падіння. У заломленій хвилі переважають коливання, паралельні площині падіння. Інтенсивність заломленої хвилі можна записати як

$$I_2 = I_{2\parallel} + I_{2\perp}. \quad (3)$$

Складники $I_{2\parallel}$ і $I_{2\perp}$ інтенсивності заломленої хвилі дорівнюють

$$I_{2\parallel} + I_{\parallel} \text{ і } I_{2\perp} = I_{\perp} - I_1, \quad (4)$$

де I_1 – інтенсивність відбитого світла.

Ступінь поляризації заломленого променя

$$P_2 = \frac{I_{2\parallel} - I_{2\perp}}{I_{2\parallel} + I_{2\perp}} = \frac{I_{2\parallel} - I_{2\perp}}{I_2}. \quad (5)$$

З урахуванням виразів (4) і (1) співвідношення (5) можна подати у вигляді

Задача_71_2

$$P_2 = I_1 / I_2. \quad (6)$$

Коефіцієнт пропускання світла дорівнює відношенню інтенсивності світла, яке пройшло через діелектрик I_2 , до інтенсивності світла, що на нього падає ($I = I_1 + I_2$), тобто

$$\tau = \frac{I_2}{I} = \frac{I_2}{I_1 + I_2}. \quad (7)$$

Поділимо чисельник і знаменник на I_2 та підставимо вираз (6) у (7):

$$\tau = \frac{1}{I_1 / I_2 + 1} = \frac{1}{1 + P_2}. \quad (8)$$

Обчислимо та одержимо

$$\tau = \frac{1}{1 + 0,124} \approx 0,89.$$

Відповідь: $\tau = 0,89$.

Задача_72_1

Визначити, у скільки разів зменшиться інтенсивність природного світла, яке пройшло через два ніколі, кут між площинами поляризації яких дорівнює 45° . Кожний ніколь поглинає 8 % падаючого світла.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$I_e/I - ?$
$\varphi = 45^\circ,$
$k = 0,08$

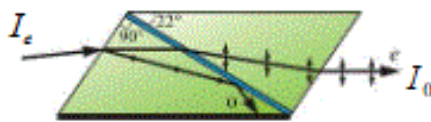


Рисунок 3.4

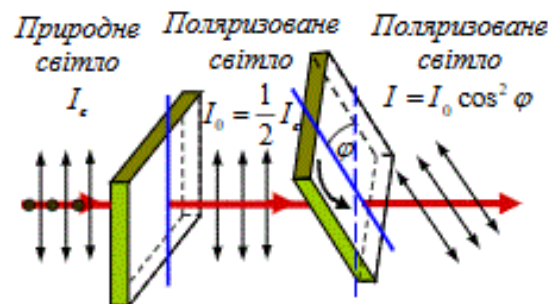


Рисунок 3.5

Унаслідок подвійного променезаломлення промінь природного світла після попадання у призму розділяється на звичайний та незвичайний промені (рис. 3.4). Обидва промені поляризовані, але у взаємно перпендикулярних площинах. Звичайний промінь за законом заломлення світла заломиться та відіб'ється від шару канадського бальзаму повністю, оскільки для нього виконується умова повного внутрішнього відбивання. Цей промінь буде поглинений зачорненою боковою гранню призми. Незвичайний промінь проходить через призму без відхилення, його інтенсивність зменшується внаслідок поглинання світла призмою на величину kI_e .

Інтенсивність світла, яке пройшло через поляризатор, дорівнює

$$I_0 = 0,5(1 - k)I_e, \quad (1)$$

Задача_72_2

де k – коефіцієнт поглинання світла у призмі, у нашому випадку $k = 0,08$; I_e – інтенсивність природного світла, яке падає на поляризатор.

Поляризоване світло входить у другий ніколь – аналізатор, де знову поглинається, при цьому його інтенсивність зменшується на величину kI_1 (рис. 3.4). Крім того, інтенсивність поляризованого світла внаслідок незбіжності площин поляризації поляризатора та аналізатора зменшується відповідно до закону Малюса

$$I = I_0(1 - k) \cos^2 \varphi, \quad (2)$$

де α – кут між площинами поляризації поляризатора та аналізатора; k – коефіцієнт поглинання; I_0 – інтенсивність поляризованого світла, яке падає на аналізатор; I – інтенсивність поляризованого світла, яке пройшло через аналізатор.

Підставимо вираз (1) у (2) та одержимо

$$I = 0,5(1 - k)^2 I_e \cos^2 \varphi. \quad (3)$$

Зі співвідношення (3) випливає

$$\frac{I_e}{I} = \frac{2}{(1 - k)^2 \cos^2 \varphi}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин у останній вираз та одержимо

$$\frac{I_e}{I} = \frac{2}{(1 - 0,08)^2 \cos^2 45} = 4,7.$$

Відповідь: $I_e/I = 4,7$.

Задача_73

Природне світло падає на систему з трьох послідовно розміщених однакових поляроїдів. Кут між площиною пропускання середнього поляроїда та площинами пропускання двох інших дорівнює $\varphi = 60^\circ$. Кожний поляроїд має таке поглинання, що за час падіння на нього лінійно поляризованого світла максимальний коефіцієнт пропускання дорівнює 0,81. У скільки разів зменшиться інтенсивність світла після проходження цієї системи?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$I_e/I_2 - ?$	Під час падіння природного світла на ідеальний поляроїд через нього проходить світло, інтенсивність якого дорівнює половині початкової інтенсивності, тобто $I_0 = 0,5 I_e. \quad (1)$
$\varphi = 60^\circ,$	
$k = 0,19$	

Максимальна інтенсивність світла, яке проходить через цей поляроїд, дорівнює 0,81 від інтенсивності світла, що падає на нього, тобто коефіцієнт поглинання дорівнює $k = 0,19$.

За законом Малюса інтенсивність світла, яке пройшло через другий поляроїд, дорівнює

$$I_1 = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (2)$$

Ураховуючи втрати світла внаслідок поглинання в обох поляроїдах перепишемо співвідношення (2) у вигляді

$$I_1 = I_0 (1 - k)^2 \cos^2 \varphi. \quad (3)$$

На третій поляроїд падає світло, інтенсивність якого I_1 . Третій поляроїд також пропускає

$$I_2 = I_1 (1 - k) \cos^2 \varphi. \quad (4)$$

Підставивши вирази (3) у співвідношення (4), одержимо

$$I_2 = 0,5 I_e (1 - k)^3 \cos^4 \varphi. \quad (5)$$

З одержаного виразу знайдемо, у скільки разів зменшиться інтенсивність світла після проходження системи:

$$\frac{I_e}{I_2} = \frac{2}{(1 - k)^3 \cos^4 \varphi}.$$

Підставимо значення фізичних величин в одержаний вираз та обчислимо:

$$\frac{I_e}{I_2} = \frac{2}{(1 - 0,19)^3 \cos^4 60^\circ} = 60.$$

Відповідь: у 60 разів.

Задача_74_1

На шляху частково поляризованого світла, ступінь поляризації якого дорівнює $P = 0,6$, поставили аналізатор так, що інтенсивність світла, яке пройшло через нього, стала максимальною. У скільки разів зменшиться інтенсивність світла, якщо площину пропускання аналізатора повернути на кут $\varphi = 30^\circ$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\frac{I_{\max}/I_\varphi - ?}{P = 0,6, \quad \varphi = 30^\circ}$	Відповідно до закону Малюса, якщо на поляризатор падає плоскополяризоване світло з інтенсивністю I_{0p}, то інтенсивність світла на виході поляризатора I_p буде дорівнювати $I_p = I_{0p} \cos^2 \varphi, \quad (1)$
--	--

де φ – кут між площиною поляризації падаючого світла та площиною пропускання поляризатора. Якщо ж на поляризатор падає природне неполяризоване світло з випадковими напрямками коливань світлового вектора, то для визначення інтенсивності світла, яке пройшло через поляризатор, потрібно у співвідношенні Малюса виконати усереднення за всіма кутами φ . Ураховуючи, що середнє значення $\cos^2 \varphi$ дорівнює

$$\langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = 0,5,$$

одержуємо зменшення інтенсивності падаючого природного світла I_{0p} удвічі.

Тепер знаючи, як поляризоване і природне світло проходять через поляризатор, подамо частково поляризоване світло у вигляді суми природного світла з інтенсивністю I_{0e} і плоскополяризованого світла з інтенсивністю I_{0p} . Якщо таке світло пропустити через аналізатор, то з урахуванням закону Малюса максимальна інтенсивність прохідного світла буде дорівнювати

$$I_{\max} = I_{0p} + 0,5 I_{0e}, \quad (2)$$

а мінімальна інтенсивність

Задача_74_2

$$I_{\min} = 0,5 I_{0e}. \quad (3)$$

Тоді ступінь поляризації цього світла може бути визначений таким чином:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_{0p}}{I_{0p} + I_{0e}}. \quad (4)$$

За умовою задачі спочатку поляризатор перебував у положенні, за якого інтенсивність прохідного світла була максимальною (вираз (2)).

Площина поляризації поляризованого компонента в цьому випадку збігається з площиною пропускання поляризатора. Якщо тепер поляризатор повернути на кут α , то інтенсивність поляризованого компонента світла зменшиться відповідно до закону Малюса. Інтенсивність прохідного природного компонента не зміниться та буде, як і раніше, дорівнювати половині інтенсивності природного компонента в падаючому на поляризатор світлі. Тоді інтенсивність прохідного світла буде дорівнювати

$$I_{\varphi} = 0,5 I_{0e} + I_{0p} \cos^2 \varphi. \quad (5)$$

Відношення інтенсивностей $I_{\max}/I_{\varphi}$, які потрібно знайти в задачі, дорівнюють

$$\frac{I_{\max}}{I_{\varphi}} = \frac{I_{0p} + 0,5 I_{0e}}{0,5 I_{0e} + I_{0p} \cos^2 \varphi}. \quad (6)$$

Виразимо їх через відношення інтенсивностей I_{0p}/I_{0e} , поділивши чисельник і знаменник співвідношення (6) на I_{0e} :

$$\frac{I_{\max}}{I_{\varphi}} = \frac{\frac{I_{0p}}{I_{0e}} + 0,5}{0,5 + \frac{I_{0p}}{I_{0e}} \cos^2 \varphi}. \quad (7)$$

Виконаємо перетворення у співвідношенні (1), поділивши спочатку чисельник і знаменник цього виразу на I_{0p} :

Задача_74_3

$$P = \frac{1}{1 + I_{0e}/I_{0p}}. \quad (8)$$

Звідси одержимо

$$I_{0p}/I_{0e} = P/(1 - P). \quad (9)$$

Підставивши (4) у (2), одержимо

$$\frac{I_{\max}}{I_{\varphi}} = \frac{\frac{P}{1-P} + 0,5}{0,5 + \frac{P}{1-P} \cos^2 \varphi}. \quad (10)$$

Підставимо числові значення фізичних величин у це співвідношення та одержимо

$$\frac{I_{\max}}{I_{\varphi}} = \frac{\frac{0,6}{1-0,6} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{0,6}{1-0,6} \cos^2 30^\circ} = \frac{\frac{0,6}{0,4} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{0,6}{0,4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{4}{1 + \frac{9}{4}} = 1,23.$$

Відповідь: $I_{\max}/I_{\varphi} = 1,23$.

Задача_75

Пластинка кварцу товщиною $d_1 = 1 \text{ мм}$, вирізана перпендикулярно до оптичної осі кристала, повертає площину поляризації монохроматичного світла певної довжини хвилі на кут $\varphi_1 = 20^\circ$. Визначити: 1) якою повинна бути товщина d_2 кварцової пластинки між двома «паралельними» ніколями, щоб світло не проходило через таку систему; 2) якої довжини l трубку з розчином цукру з масовою концентрацією $C = 0,4 \text{ кг/л}$ потрібно помістити між ніколями для досягнення такого самого ефекту? Питоме обертання цукру $[\alpha] = 0,665 \text{ град}/(\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^{-3})$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$d_2 - ? \quad l - ?$$

$$d_1 = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м},$$

$$\varphi_1 = 20^\circ,$$

$$C = 0,4 \text{ кг/л} = 400 \text{ кг/м}^3,$$

$$[\alpha] = 0,665 \text{ град}/(\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^{-3})$$

1 Кут повороту площини поляризації кварцовою пластинкою визначається співвідношенням

$$\varphi = \alpha d. \quad (1)$$

Світло повністю гаситься за умови, що кут повороту площини поляризації дорівнює

...

$\varphi_2 = 90^\circ$. Тоді товщина пластинки дорівнює

$$d_2 = \varphi_2 / \alpha. \quad (2)$$

Сталу обертання знайдемо з формули (1):

$$\alpha = \varphi_1 / d_1. \quad (3)$$

Підставимо цей вираз у співвідношення (2) та одержимо

$$d_2 = \varphi_2 d_1 / \varphi_1. \quad (4)$$

Виконуємо обчислення за цим співвідношенням та знайдемо товщину пластинки:

$$d_2 = 90 \cdot 10^{-3} / 20 = 4,5 \cdot 10^{-3} (\text{м}).$$

2 Довжину трубки з цукровим розчином визначимо зі співвідношення $\varphi_2 = [\alpha] C l$:

$$l = \frac{\varphi_2}{[\alpha] C}.$$

Підставимо в одержаний вираз значення фізичних величин та виконаємо розрахунки:

$$l = \frac{90}{0,665 \cdot 400} = 0,338 (\text{м}).$$

Відповідь: 1) $d_2 = 4,5 \text{ мм}$; 2) $l = 0,338 \text{ м}$.

Задача_76

Природне монохроматичне світло падає на систему з двох схрещених поляризаторів, між якими міститься кварцова пластинка, вирізана перпендикулярно до оптичної осі. Визначити мінімальну товщину $d_{\min}$ пластинки, за якої ця система буде пропускати $\eta = 0,3$ світлового потоку. Стала обертання кварцу $\alpha = 17 \text{ град} \cdot \text{мм}^{-1}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$d_2 - ? \quad l - ?$ $\eta = 0,3,$ $\alpha = 17 \text{ град} \cdot \text{мм}^{-1} = 1,7 \cdot 10^4 \text{ град} \cdot \text{м}^{-1}$	Інтенсивності падаючого світла I_e та світла, що пройшло крізь перший поляризатор I_0 , пов'язані між собою співвідношенням
	$I_0 = 0,5 I_e.$

(1)

Під час проходження світла через кварц спостерігається обертання площини поляризації світла на кут φ , який можна визначити з формули

$$\varphi = \alpha d,$$

(2)

де d – товщина пластинки.

Мінімальній товщині, яка задовольняє умову задачі, відповідає кут, значення якого перебуває в межах $0 < \varphi < \pi/2$. Після проходження кварцової пластинки площина поляризації світла повернеться на кут φ , тому інтенсивності I_0 та I пов'язані співвідношенням

$$I = I_0 \cos^2(\pi/2 - \varphi) = I_0 \sin^2 \varphi.$$

(3)

Підставимо вирази (1) і (2) у співвідношення (3), врахуємо, що $\eta = I/I_e$, виконаємо математичні перетворення та одержимо

$$I = 0,5 I_e \sin^2(\alpha d) \Rightarrow \frac{I}{I_e} = 0,5 \sin^2(\alpha d) \Rightarrow \eta = 0,5 \sin^2(\alpha d) \Rightarrow \sin(\alpha d) = \sqrt{2\eta}.$$

Звідси

$$d_{\min} = \frac{1}{\alpha} \arcsin \sqrt{2\eta}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та виконаємо розрахунки:

$$d_{\min} = \frac{1}{1,7 \cdot 10^4} \arcsin \sqrt{2 \cdot 0,3} = 3 \cdot 10^{-3} (\text{м}) = 3 (\text{мм}).$$

Відповідь: $d_{\min} = 3 \text{ мм}.$

Задача_77_1

Показники заломлення сірковуглецю для світла з довжинами хвиль $\lambda_1 = 509 \text{ нм}$, $\lambda_2 = 534 \text{ нм}$, $\lambda_3 = 574 \text{ нм}$ відповідно дорівнюють: $n_1 = 1,647$; $n_2 = 1,64$; $n_3 = 1,63$. Визначити фазову швидкість для довжини хвилі λ_2 та групову швидкість.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Фазові швидкості для кожної заданої довжини хвилі можна знайти як

$$v = c/n, \quad (1)$$

де c – швидкість світла у вакуумі;
 n – показник заломлення.

Для знаходження групової швидкості потрібно знати закон дисперсії. Загальний вираз для групової швидкості можна перетворити так:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\lambda} \frac{1}{dk/d\lambda}, \quad (2)$$

де ω – циклічна частота коливань; λ – довжина хвилі; k – хвильове число.

Ураховуючи, що $k = 2\pi/\lambda$ і $\omega = 2\pi\nu/\lambda$, одержимо

$$u = v - \lambda(dv/d\lambda). \quad (3)$$

$v_2 = ?$ $u = ?$

$$n_1 = 1,647,$$

$$n_2 = 1,64,$$

$$n_3 = 1,63,$$

$$\lambda_1 = 509 \text{ нм} = 5,09 \cdot 10^{-7} \text{ м},$$

$$\lambda_2 = 534 \text{ нм} = 5,34 \cdot 10^{-7} \text{ м},$$

$$\lambda_3 = 574 \text{ нм} = 5,74 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

Задача_77_2

За умовою задачі групова швидкість повинна бути виражена через показник заломлення n та довжину хвилі λ . Використовуючи вираз (1), перетворимо співвідношення (3):

$$u = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right). \quad (4)$$

Похідну $dn/d\lambda$ можна знайти, якщо відома функція $n(\lambda)$, або за тангенсом кута нахилу дотичної до графіка $n(\lambda)$ у даній точці. Для побудови графіка недостатньо трьох точок із заданими значеннями n і λ . Тому задачу можна розв'язати лише наближено. Коли відношення

$$(n_2 - n_1)/(\lambda_2 - \lambda_1) \text{ і } (n_3 - n_2)/(\lambda_3 - \lambda_2) \quad (5)$$

дорівнюють або незначно відрізняються, то функцію $n(\lambda)$ у діапазоні від λ_1 до λ_2 можна вважати лінійною. Тоді похідна $dn/d\lambda$ для $\lambda = \lambda_2$ дорівнює відношенню (4) або середньому з двох значень.

Обчислимо відношення (5):

$$\begin{aligned} (n_2 - n_1)/(\lambda_2 - \lambda_1) &= 10^9 (1,64 - 1,647)/(534 - 509) = -2,8 \cdot 10^5 \text{ (м}^{-1}\text{)}, \\ (n_3 - n_2)/(\lambda_3 - \lambda_2) &= 10^9 (1,63 - 1,64)/(574 - 534) = -2,5 \cdot 10^5 \text{ (м}^{-1}\text{)}. \end{aligned}$$

Розходження становить приблизно
$$\frac{-2,8 \cdot 10^5 - (-2,5 \cdot 10^5)}{-2,8 \cdot 10^5} \approx 11\%, \text{ тоді}$$

за $dn/d\lambda$ можна взяти середнє значення

$$\frac{dn}{d\lambda} = -2,8 \cdot 10^5 + -2,5 \cdot 10^5 = -2,65 \cdot 10^5 \text{ (м}^{-1}\text{)}.$$

Знак «мінус» показує, що зі збільшенням λ показник заломлення зменшується, а фазова швидкість збільшується (область нормальної дисперсії). Підставимо одержане значення $dn/d\lambda$, а також $n = n_2$ і $\lambda = \lambda_2$ у вираз (4):

$$u = \frac{3 \cdot 10^8}{1,64} \left(1 + \frac{534 \cdot 10^{-9}}{1,64} (-2,65 \cdot 10^5) \right) = 1,67 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}.$$

Фазову швидкість знайдемо зі співвідношення (1):

$$v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,64} = 1,83 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}.$$

Відповідь: $v_2 = 1,83 \cdot 10^8 \text{ м/с}$; $u = 1,67 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Задача_78_1

Через кварцову пластинку товщиною $d = 5 \text{ см}$ проходять інфрачервоні промені. Кут падіння дорівнює нулю. Відомо, що для інфрачервоних променів з довжиною хвилі $\lambda_1 = 2,72 \text{ мкм}$ показник поглинання $k_1 = 0,2 \text{ см}^{-1}$, а для променів $\lambda_2 = 4,5 \text{ мкм}$ – $k_2 = 7,3 \text{ см}^{-1}$. Визначити: 1) шари половинного послаблення d_1 і d_2 відповідно для довжин хвиль λ_1 і λ_2 ; 2) відносне змінювання інтенсивності цих променів після проходження ними кварцової пластинки.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$$d_1 = ? \quad d_2 = ? \quad \frac{I_0}{I_2} = ?$$

$$d = 5 \text{ см} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$\lambda_1 = 2,72 \text{ мкм} = 2,72 \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

$$k_1 = 0,2 \text{ см}^{-1} = 20 \text{ м}^{-1},$$

$$\lambda_2 = 4,5 \text{ мкм} = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

$$k_2 = 7,3 \text{ см}^{-1} = 730 \text{ м}^{-1}$$

Поглинання світлових променів у середовищі визначається законом Бугера – Ламберта – Бера, який строго виконується лише для монохроматичних променів:

$$I = I_0 e^{-k_\lambda d}, \quad (1)$$

де I_0 – інтенсивність вхідного пучка світла; d – товщина шару речовини, через яку проходить світло; k_λ – показник поглинання речовини (коефіцієнт лінійного

послаблення) для даної довжини хвилі.

Для шару половинного послаблення виконується умова $I = 0,5 I_0$.

Тоді формула (1) набере вигляду

$$0,5 I_0 = I_0 e^{-k_\lambda d}.$$

Звідси

$$e^{k_\lambda d} = 2 \quad \text{або} \quad k_\lambda d = \ln 2.$$

Для променів із довжиною хвилі λ_1 шар половинного послаблення дорівнює

Задача_78_2

$$d_1 = \ln 2 / k_1.$$

Для променів із довжиною хвилі λ_2 шар половинного послаблення дорівнює:

$$d_2 = \ln 2 / k_2,$$

$$d_1 = \frac{\ln 2}{20} = 0,0347(\text{м}) = 3,47(\text{см}),$$

$$d_2 = \frac{\ln 2}{730} = 0,00095(\text{м}) = 0,95(\text{мм}).$$

Відносне змінювання знайдемо з формули (1):

$$\frac{I_0}{I} = e^{-k_x d}.$$

Відносне змінювання інтенсивності променів із довжиною хвилі λ_1 після проходження ними кварцової пластинки визначиться співвідношенням

$$\frac{I_0}{I_1} = e^{-k_1 d_1}.$$

Аналогічно для променів з довжиною хвилі λ_2

$$\frac{I_0}{I_2} = e^{-k_2 d_2}.$$

З обчислення одержуємо

$$\frac{I_0}{I_1} = e^{0,25} = 2,7 \quad \text{і} \quad \frac{I_0}{I_2} = e^{7,35} = 7,1 \cdot 10^{15}.$$

Відповідь: 1) $d_1 = 3,47\text{см}$; $d_2 = 0,95\text{мм}$; 2) $\frac{I_0}{I_2} = 7,1 \cdot 10^{15}$.

Задача_79_1

Приклад 2.4. Відстань між двома когерентними джерелами монохроматичного світла S_1 і S_2 у повітрі $d=0,15\text{мм}$. Визначити положення максимумів першого та другого порядку на екрані, відстань від джерел до якого дорівнює $l = 3,0\text{м}$. Довжина хвилі $\lambda = 0,6\text{мкм}$.

$$d = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$$

$$l = 3,0 \text{ м}$$

$$\lambda = 6,0 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$m_1 = 1$$

$$m_2 = 2$$

$$x_{\max 1}; x_{\max 2} = ?$$

Розв'язання

Для визначення координат максимумів або мінімумів необхідно знайти різницю ходу Δ хвиль, які випромінюються джерелами. Оскільки промені йдуть у повітрі ($n_{\text{пов.}}=1$), оптична різниця ходу дорівнює геометричній. Опустимо на екран перпендикуляри S_1A , S_2B , а також з'єднаємо точки S_1 і S_2 з точкою C екрана,

яка знаходиться від центру екрана на відстані $OC=x$ (рис.2.6). З трикутників S_1AC та S_2BC за теоремою Піфагора отримуємо:

$$L_1^2 = S_1C^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2;$$

$$L_2^2 = S_2C^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2.$$

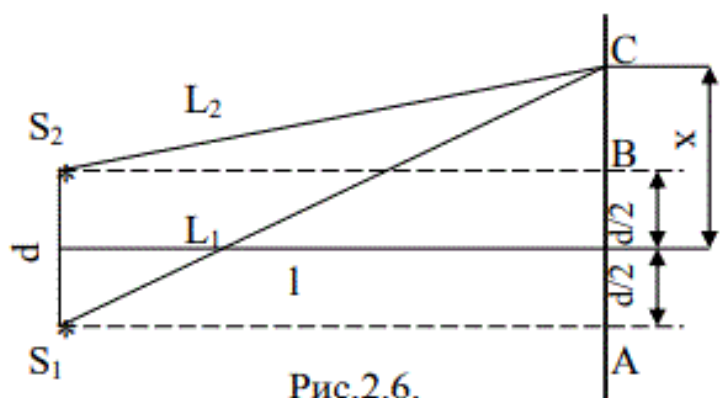


Рис.2.6.

Різниця останніх виразів дає:

$$L_1^2 - L_2^2 = (L_1 - L_2)(L_1 + L_2) = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2\right) = 2xd. \quad (1)$$

Оскільки $n(L_1 - L_2) = \Delta$ є оптичною різницею ходу променів, а суму $L_1 + L_2$ наближено можна замінити на $2l$, бо d та x при спостереженні інтерференції світла є завжди малими порівняно l , з виразу (1) отримуємо:

Задача_79_2

$$\Delta = \frac{xd}{l}n. \quad (2)$$

За умовою (2.1.5) координати максимумів повинні задовольняти умові:

$$\frac{x_{\max}d}{l}n = \pm m\lambda_0, \quad (m=0, 1, 2, 3, \dots).$$

Звідки $x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \frac{\lambda_0}{n}$, $(m=0, 1, 2, 3, \dots)$.

Розрахунок дає $x_{\max 1} = \pm 1 \cdot \frac{3 \cdot 6,0 \cdot 10^{-7}}{1,5 \cdot 10^{-4} \cdot 1} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ (м)}; \quad x_{\max 2} = \pm 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$

Відповідь: $x_{\max 1} = 1,2 \text{ см}; \quad x_{\max 2} = 2,4 \text{ см.}$

Задача_80_1

При спостереженні спектральної лінії $\lambda_0 = 0,59 \text{ мкм}$ у напрямках на протилежні боки сонячного диска на його екваторі виявили різницю у довжинах хвиль на $\Delta\lambda = 8 \text{ нм}$. Визначити період обертання Сонця навколо власної осі.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\nu - ?$
$\lambda_0 = 0,59 \text{ мкм} = 5,9 \cdot 10^{-7} \text{ м},$
$\Delta\lambda = 8 \text{ нм} = 8 \cdot 10^{-12} \text{ м},$
$R_c = 6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$

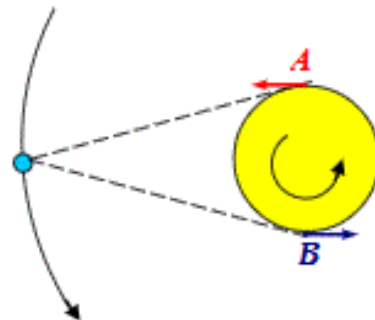


Рисунок 3.7

Спостерігач, який перебуває на Землі, спостерігає рух Землі навколо Сонця, як зображено на рисунку 3.7. Напрямок обертання Сонця навколо власної осі показаний на рисунку стрілкою. При цьому швидкості дослідних точок А і В сонячної поверхні однакові за модулем та мають протилежний напрямок. Оскільки відстань між Сонцем і Землею значно більша за розміри Сонця, кут між лінією спостереження (зображена пунктиром) і напрямком руху джерела для точки А дорівнює 180° , а для точки В – нулю. Це означає, що різницю частот, які випромінюються точками А і В, спостерігач на Землі може визначити за допомогою формули класичного ефекту Доплера:

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu} = \frac{v}{c} \cos \vartheta, \quad (1)$$

де ν – частота електромагнітного випромінювання у системі відліку, пов'язаній зі спостерігачем; ν_0 – власна частота випромінювання Сонця; v – модуль швидкості обертання Сонця; ϑ – кут між вектором $\vec{v}$ та напрямком спостереження, виміряний у системі відліку, пов'язаній зі спостерігачем.

Ураховуючи, що $\nu = c/\lambda$, перетворимо формулу (1):

Задача_80_2

$$\frac{c/\lambda - c/\lambda_0}{c/\lambda} = \frac{v}{c} \cos \vartheta \Rightarrow \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \cos \vartheta. \quad (2)$$

Для точки А

$$\frac{\lambda_0 - \lambda_A}{\lambda_0} = \frac{v_A}{c} \cos \pi \Rightarrow 1 - \frac{\lambda_A}{\lambda_0} = -\frac{v_A}{c} \Rightarrow \lambda_A = \lambda_0 \left(1 + \frac{v_A}{c} \right), \quad (3)$$

а для точки В

$$\frac{\lambda_0 - \lambda_B}{\lambda_0} = \frac{v_B}{c} \cos 0 \Rightarrow 1 - \frac{\lambda_B}{\lambda_0} = \frac{v_B}{c} \Rightarrow \lambda_B = \lambda_0 \left(1 - \frac{v_B}{c} \right). \quad (4)$$

Різниця у довжинах хвиль при спостереженні спектральної лінії λ_0 у напрямках на протилежні краї сонячного диска на його екваторі дорівнює

$$\Delta \lambda = \lambda_A - \lambda_B = \lambda_0 \left(1 + \frac{v_A}{c} \right) - \lambda_0 \left(1 - \frac{v_B}{c} \right) \Rightarrow \Delta \lambda = \lambda_0 \left(\frac{v_A}{c} + \frac{v_B}{c} \right). \quad (5)$$

Ураховуючи, що $v_A = v_B$, одержимо

$$\Delta \lambda = \lambda_0 \frac{2v_A}{c}, \text{ звідки } v_A = \frac{\Delta \lambda c}{2\lambda_0}. \quad (6)$$

Лінійна швидкість обертання Сонця навколо своєї осі пов'язана з періодом обертання співвідношенням

$$T = \frac{2\pi R_\odot}{v_A} = \frac{4\pi R_\odot}{c} \frac{\lambda_0}{\Delta \lambda}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержане співвідношення та одержимо

$$T = \frac{4\pi \cdot 6,95 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} \frac{5,9 \cdot 10^{-7}}{8 \cdot 10^{-12}} = 2,15 \cdot 10^6 (c) = 24,85 (\text{дiб}).$$

Відповідь: $T = 24,85 \text{ дiб}.$