

Задача_1

Точка здійснює гармонічні коливання з періодом $T = 1,57$ с і амплітудою $A = 12$ см.

Записати

рівняння руху точки $x(t)$, якщо в початковий момент часу вона має координату $x_0 = 6$ см і віддаляється від положення рівноваги.

Дано:

$$T = 1,57 \text{ с}$$

$$A = 12 \text{ см}$$

$$x_0 = 6 \text{ см}$$

$$x(t) - ?$$

Розв'язання

Оскільки в початковий момент часу ні координата, ні швидкість точки не дорівнюють нулю, то немає значення, яку функцію вибрати для опису коливань. Отож будемо шукати рівняння $x(t)$ у вигляді

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right). \quad (1)$$

Значення A і T задані, отже, задача зводиться до визначення початкової фази φ_0 . Підставивши в рівняння (1) значення $t = 0$, x_0 і A , одержимо

$$6 = 12 \cos \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \pm \frac{\pi}{3}.$$

Для вибору знаку φ_0 врахуємо, що за умовою у початковий момент напрям швидкості точки збігається з напрямом осі ОХ, тобто $v_{0x} > 0$. Проекція швидкості $v_{0x} = x'(t)$, тому відповідно до рівняння (1) отримаємо

$$v_x = x'(t) = -A \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi_0\right).$$

При $t = 0$

$$v_{0x} = -A \frac{2\pi}{T} \sin \varphi_0.$$

Оскільки $v_{0x} > 0$, то

$$\sin \varphi_0 < 0 \Rightarrow \varphi_0 < 0.$$

Отже, початкова фаза $\varphi_0 = -\pi/3$.

Підставивши в рівняння (1) всі числові значення, отримаємо відповідь:

$$x(t) = 12 \cos(4t - \pi/3), \text{ см.}$$

Зауваження. Зверніть увагу на те, що при складанні рівняння коливань у відповіді всі величини, окрім часу, повинні бути представлені в числовому вигляді.

Задача_2

Точка здійснює гармонічні коливання так, що на відстанях $x_1 = 3\text{ см}$ і $x_2 = 5\text{ см}$ від положення рівноваги її швидкість становить $v_1 = 10\text{ см/с}$ і $v_2 = 6\text{ см/с}$, відповідно.

Визначити

циклічну частоту ω й амплітуду A коливань точки.

Розв'язання	
Дано: $x_1 = 3\text{ см}$ $v_1 = 10\text{ см/с}$ $x_2 = 5\text{ см}$ $v_2 = 6\text{ см/с}$	Припустимо, що рівняння руху точки має вигляд $x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{1}$
$A - ?$ $\omega - ?$	де φ_0 – початкова фаза, t – час. Тоді її швидкість $v_x = x'(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0). \tag{2}$
	Виключимо з рівнянь (1) і (2) час t , скориставшись основною тригонометричною тотожністю $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$: $\left. \begin{aligned} \sin(\omega t + \varphi_0) &= \frac{x}{A} \\ \cos(\omega t + \varphi_0) &= \frac{v}{A\omega} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1. \tag{3}$

(Такий прийом дуже часто є продуктивним у задачах на гармонічні коливання, коли немає необхідності у визначенні моменту часу, або він не заданий в умові задачі).

Відтак, записавши вирази (3) для обох пар заданих величин $((x_1, v_1); (x_2, v_2))$ та прирівнявши їхні ліві частини, отримаємо шукану частоту:

$$\omega = \sqrt{\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}} = 2\text{ с}^{-1},$$

а потім із одного з них — амплітуду

$$A = 5,83\text{ см}.$$

Задача_3

Коливання вантажу масою 1 кг на пружині описується рівнянням $x = 0,1 \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$. Визначити: 1) амплітуду коливань; 2) колову частоту; 3) частоту; 4) період; 5) початкову фазу; 6) повну енергію; 7) максимальну швидкість руху вантажу; 8) коефіцієнт жорсткості пружини.

Дано:	Розв'язання
$m = 1\text{ кг}$	Порівнюючи формулу гармонічних коливань в умові задачі з базовою формулою 1 та використо-
$x = 0,1 \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$	вуючи інші базові формули, приходимо до вис-
$A - ? \quad \omega - ?$	новку:
$\nu - ? \quad T - ? \quad \varphi_0 - ?$	1. $A = 1\text{ м}$. 2. $\omega = 1\text{ 1/с}$. 3. $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{6,28} = 0,16\text{ 1/с}$.
$E - ? \quad v_{\max} - ? \quad k - ?$	4. $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} = 2\pi\text{ с}$. 5. $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. 6. $E = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 0,01}{2} = 0,005\text{ Дж}$
	7. $\frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{mv_{\max}^2}{2} \Rightarrow v_{\max} = \omega A = 0,1\text{ м/с}$ 8. $\frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \Rightarrow k = m\omega^2 = 1\frac{\text{Н}}{\text{м}}$.

Задача_4

Визначити

середню шляхову швидкість $\langle v \rangle$ тіла, що здійснює гармонічні коливання, якщо його максимальна швидкість складає $v_m = 10$ м/с.

Дано:
 $v_m = 10$ м/с

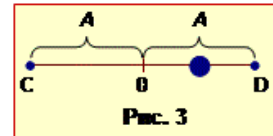
$\langle v \rangle$ - ?

Розв'язання

Середня шляхова швидкість – це відношення пройденого шляху до часу (див. [1], ф-ла (1.4)):

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t}.$$

Отже, якщо розглянути два крайні положення тіла C і D (рис. 3), то відстань між ними $S = 2A$ (A – амплітуда коливань) воно проходить за час $t = T/2$ у пів періоду коливань, і шукана середня шляхова швидкість дорівнює



$$\langle v \rangle = \frac{4A}{T}. \quad (1)$$

У той же час максимальна швидкість тіла при гармонічних коливаннях за формулою (1.5б) складає:

$$v_m = A\omega = A \frac{2\pi}{T}.$$

Тож

$$T = \frac{2\pi A}{v_m},$$

де ω – колова (циклічна) частота.

Підставивши цей вираз у формулу (1), знайдемо відповідь:

$$\langle v \rangle = \frac{4Av_m}{2\pi A} = \frac{2v_m}{\pi} \approx 6,4 \text{ м/с}.$$

Задача_5

1. Рівняння коливань $x = 0,1 \sin(\pi t/8 + \pi/4)$ см. Знайти: 1) максимальні значення швидкості та прискорення руху точки; 2) значення максимальної сили, що діє на точку; 3) повну енергію точки, яка коливається.

Розв'язання:

Дано:

$$m = 16 \text{ г} = 16 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$x = 0,1 \sin\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ см} = 0,001 \sin\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ м}$$

$$v_{\max} = ?, a_{\max} = ?, F_{\max} = ?, E_{\text{повн}} = ?$$

Швидкість точки можна визначити як першу похідну від зміщення:

$$v = 0,001 \frac{\pi}{8} \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Значення максимальної швидкості буде, якщо

$$\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \text{ отже}$$

$$v_{\max} = 0,001 \frac{3,14}{8} = 0,0003925 = 3,9 \cdot 10^{-4} \text{ (м/с)} \text{ Прискорення точки можна знайти як похідну від швидкості:}$$

$$a = -0,001 \left(\frac{\pi}{8}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Максимальне значення буде, якщо } \sin\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \text{ отже}$$

$$a_{\max} = -0,001 \frac{\pi^2}{64} = -1,5 \cdot 10^{-4} \text{ (м/с}^2\text{)}$$

Значення максимальної сили знайдемо:

$$F_{\max} = m a_{\max} = -0,016 \cdot 10^{-4} = -2,46 \cdot 10^{-6} \text{ (Н)}$$

Значення повної енергії знайдемо:

$$E_{\text{повн}} = \frac{m A^2 \omega^2}{2} = \frac{0,016 \cdot (0,001)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{8}\right)^2}{2} = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ (Дж)}$$

$$\text{Відповідь: } v_{\max} = 3,94 \cdot 10^{-4} \text{ м/с; } a_{\max} = -1,54 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2;$$

$$F_{\max} = -2,464 \cdot 10^{-6} \text{ Н; } E_{\text{повн}} = 1,234 \cdot 10^{-10} \text{ Дж.}$$

Задача_6

Період коливань одного математичного маятника T_1 , а другого T_2 . Яким буде період математичного маятника, довжина якого буде рівною сумі довжин даних маятників?

Дано:	Розв'язання
T_1	За умовою $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_1+l_2}{g}}$. Довжина маятників l_1 і l_2 знаходи-
T_2	мо з
$l=l_1+l_2$	$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \Rightarrow l_1 = \frac{gT_1^2}{4\pi^2}$ і $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} \Rightarrow l_2 = \frac{gT_2^2}{4\pi^2}$.
$T - ?$	Тоді $T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{gT_1^2}{4\pi^2} + \frac{gT_2^2}{4\pi^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\sqrt{g}}{2\pi}\sqrt{T_1^2 + T_2^2}$.

Отже $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$.

Задача_7

Один маятник здійснив 10 коливань, другий за цей же час – 6 коливань. Різниця довжин маятників 16см. Знайти довжини маятників.

Розв'язання

Дано:

$$N_1 = 10$$

$$t_1 = t_2$$

$$N_2 = 6$$

$$\ell_2 - \ell_1 = 16 \text{ см} = 0,16 \text{ м}$$

$$\ell_1 = ? \quad \ell_2 = ?$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\ell_1 N_1^2 = (0,16 + \ell_1) N_1^2$$

$$\ell_1 \cdot 100 = (0,16 + \ell_1) \cdot 36$$

$$100\ell_1 = 5,76 + 36\ell_1$$

$$64\ell_1 = 5,76$$

$$\ell_1 = 0,09(\text{м})$$

$$\ell_2 = 0,25(\text{м})$$

Відповідь: $\ell_1 = 0,09\text{м}$; $\ell_2 = 0,25\text{м}$.

За умовою задачі $t_1 = t_2$. Час всіх коливань: $t = TN_1$, де T – період коливань, N – кількість коливань: $T_1 N_1 = T_2 N_2$

$$2\pi \sqrt{\frac{\ell_1}{g}} \cdot N_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_2}{g}} \cdot N_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_1 \cdot N_1^2 = \ell_2 \cdot N_2^2 \\ \ell_2 - \ell_1 = 0,16 \end{array} \right\}, \text{ звідки } \ell_2 = 0,16 + \ell_1$$

Задача_8

Визначити

період T малих коливань кульки масою $m = 40$ г із зарядом $|q| = 8$ мкКл, яку підвішено на тонкій шовковій нитці довжиною $l = 1$ м у напрямленому вертикально вгору електричному полі з напруженістю $E = 300$ В/см.

Дано:

$$m = 40 \text{ г} = 0,04 \text{ кг}$$

$$q = 8 \text{ мкКл} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$$

$$l = 1 \text{ м}$$

$$E = 300 \text{ В/см} = 3 \cdot 10^4 \text{ В/м}$$

$T = ?$

Розв'язання

Кулька на нитці являє собою математичний маятник (п. 1.3), тож період її коливань задається загальним виразом (1.13) і формулою (1.18). Але за умовою на кульку, крім сили тяжіння $m\vec{g}$, діє ще й вертикальна електрична сила $q\vec{E}$, як показано на рис. 1.4 для випадку $q > 0$. Тому у виразі (1.16) замість mg має стояти $|mg \mp |q|E|$. Тож

$$k = \frac{|mg \mp |q|E|}{l},$$

де знак "–" відповідає випадку $q > 0$ і навпаки.

В такому разі період коливань кульки визначається виразом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{|mg \mp |q|E|}}$$

Обчислення дають наступні значення:

$$q > 0: T = 3,14 \text{ с}; \quad q < 0: T = 1,57 \text{ с}.$$

На завершення варто зауважити таке. При заданих в умові числах сила тяжіння $m\vec{g}$ переважає

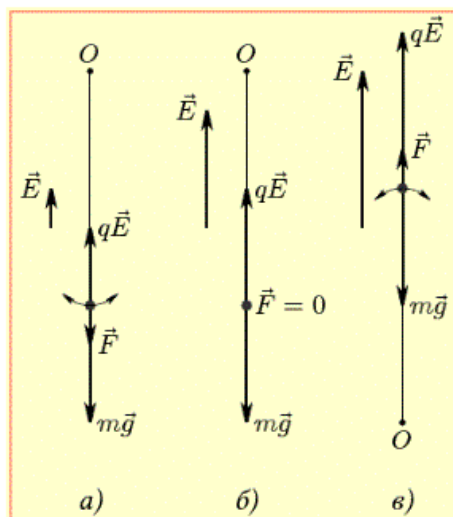
електричну силу $q\vec{E}$, що й відображає рис. 1.4а. Але

загальний вираз (1) є чинним при будь-яких величинах сил та знаках заряду кульки. Тож при збільшенні напруженості електричного поля

період коливань буде зростати так, що при $|q|E = mg$ (рис. 1.4б) величина $T \rightarrow \infty$. Це означає байдужу

рівновагу та відсутність коливань кульки. А далі при $|q|E > mg$ (рис. 1.4в) кулька знову почне коливатись у згоді з виразом (1), але в такому випадку коливання будуть відбуватися не під, а над точкою кріплення нитки (рис. 1.4в). (Про це також див. [П], розділ I, задача 1.30).

Рис. 1.4



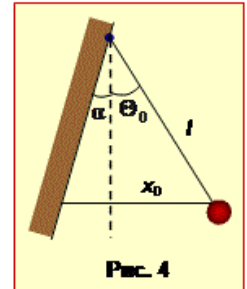
Задача_9

Пружну кульку на нитці довжиною $l = 0,5$ м прикріплено до пружної стінки, що нахилена під малим кутом α до вертикалі, рис 4.

Визначити,

з яким інтервалом часу T кулька вдарятиме в стінку, якщо нитку відвести на кут $\theta_0 = 2\alpha$ й відпустити.

Дано: $l = 0,5$ м $T = ?$	Розв'язання Відповідно до умови кулька стикається зі стінкою пружньо, тобто без утрати енергії, й через рівні проміжки часу T, а в проміжках рухається, як математичний маятник за загальним рівнянням (1.4). Отже, якщо початкову координату кульки (відхилення від вертикалі) позначити як x_0, то далі вона змінюється за законом
--	---



$$x(t) = x_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

З урахуванням співвідношення між кутами α і θ_0 , координата кульки на момент зіткнення зі стінкою t_1 дорівнює $x_1 = -0,5x_0$, тож із рівняння (1) маємо:

$$\cos \omega t_1 = -0,5 \quad \Rightarrow \quad \omega t_1 = \frac{2\pi}{3}$$

Відтак, узявши до уваги формулу (1.17) і те, що інтервал часу між послідовними зіткненнями кульки зі стінкою $T = 2t_1$, отримаємо наступну відповідь задачі:

$$T = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{l}{g}} = 0,95 \text{ с}$$

Задача_10

Яку довжину має підвіс маятника Фуко, якщо уявити собі, що маятник встановлений на планеті, густина якої дорівнює густині Землі, а радіус в два рази менший. Маятник здійснює три коливання на хвилину.

Дано:	Розв'язання
$\rho_1 = \rho$	Довжину підвісу математичного маятника l знаходимо з формули його періоду коливань
$R_1 = R_2/2$	
$t = 1 \text{ хв.}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow l = \frac{gT^2}{4\pi^2}.$
$N = 3$	Вираз для прискорення вільного падіння знайдемо з порівняння сили ваги mg і сили тяжіння $\frac{GmM}{R^2}.$
$l_1 - ?$	

$$mg = \frac{GmM}{R^2} \Rightarrow g = \frac{GM}{R^2};$$

Маса планети через густину і об'єм $M = \rho v = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$. Таким чином

$$g = \frac{G}{R^2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow g = \frac{4}{3} \pi \rho G R.$$

Для Землі $g_3 = \frac{4}{3} \pi \rho G R_3$. Для планети з умови задачі $g_n = \frac{4}{3} \pi \rho_1 G R_1$.

$$\text{Тоді } \frac{g_n}{g_3} = \frac{\rho_1 R_1}{\rho R_3} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Тобто } g_n = \frac{1}{2} g_3.$$

Період коливань маятника на планеті:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g_n}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_1 \cdot 2}{g_3}} \quad l_1 = \frac{g_3 \cdot T_1^2}{8\pi^2}; \quad T_1 = \frac{t}{N} \quad l_1 = \frac{g_3 \cdot t^2}{8\pi^2 N^2} = 50 \text{ м.}$$

Задача_11

2. Якщо пружину з тягарцем розтягнути на 4см і надати швидкості 3м/с, то положення рівноваги він пройде зі швидкістю 5м/с. Знайти циклічну частоту коливань такого маятника.

Розв'язання:

Дано:

$$x=4\text{см}=0,04\text{м}$$

$$v_1 = 3\text{м/с}$$

$$v_{\text{max}} = 5\text{м/с}$$

$$\omega = ?$$

Повна енергія точки, яка коливається, дорівнює:

$$E_{\text{повна}} = E_{\text{кін.}} + E_{\text{потенц.}} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2} \quad v_1^2 + \omega^2 x^2 = v_{\text{max}}^2, \text{ звідки}$$

$$\text{так як } k=m\omega^2, \text{ то } mv_1^2 + m\omega^2 x^2 = mv_{\text{max}}^2 \quad \omega = \sqrt{\frac{v_{\text{max}}^2 - v_1^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{25 - 9}{0,04^2}} = \sqrt{10^4} = 100(\text{рад/с})$$

Відповідь: $\omega = 100 \text{ рад/с}$.

3. Визначити довжину хвилі при частоті 200 Гц, якщо швидкість розповсюдження хвиль 340м/с. Визначити швидкість звуку у воді, якщо джерело, що коливається з періодом 0,002с, збуджує у воді хвилі довжиною 2,9м.

Розв'язання:

Дано:

$$v_1 = 200\text{Гц}, v = 340\text{м/с}$$

$$T_2 = 0,002\text{с}$$

$$\lambda_2 = 2,9\text{м}$$

$$v_2 = ? \quad \lambda_1 = ?$$

Довжина хвилі обчислюється:

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{340}{200} = 1,7(\text{м})$$

$$v_2 = \frac{\lambda_2}{T_2} = \frac{2,9}{0,002} = 1450\text{м/с}$$

Відповідь: $\lambda_1 = 1,7\text{м}; v_2 = 1450\text{м/с}$.

Задача_12

Відкачаний до тиску $P = 5 \text{ кПа}$ горизонтальний циліндр перерізом $S = 50 \text{ см}^2$ поділено рухомим поршнем масою $m = 1 \text{ кг}$ на дві частини довжиною $l = 1 \text{ м}$ кожна. Нехтуючи товщиною поршня,

визначити

період T коливань поршня внаслідок незначного поштовху.

Дано:

$$\begin{aligned} l &= 1 \text{ м} \\ m &= 1 \text{ кг} \\ S &= 50 \text{ см}^2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \\ P &= 5 \text{ кПа} = 5 \cdot 10^3 \text{ Па} \end{aligned}$$

$T = ?$

При відведенні поршня з рівноважного положення в будь-

який бік компенсація сил тиску повітря $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ (рис. 6) порушується так, що їхня рівнодійна $\vec{F}$ є спрямована протилежно й має проекцію на вісь OX

Розв'язання

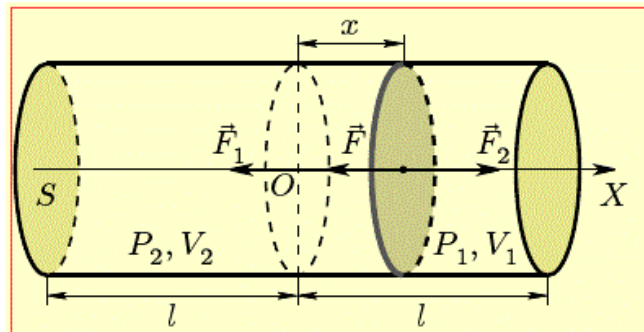


Рис. 1.6

$$F_x = (P_1 - P_2)S. \quad (1)$$

Тому після вивільнення поршень починає коливатися з періодом, який визначається залежністю $F_x(x)$ повертаючої сили від зміщення x поршня з положення рівноваги. Ця залежність на загал може бути складною, але в даній задачі ситуація спрощується тим, що при малих коливаннях поршня температура повітря в циліндрі лишається сталою. Тож зміна його тиску та об'єму відбувається ізотермічно і є підпорядкована закону Бойля-Маріотта ([III], п. 1.3) Отже, $P_1 V_1 = P_2 V_2 = PV$ і, врахувавши, що $V_1 = (l+x)S$, $V_2 = (l-x)S$ і $V = lS$, маємо:

$$Pl = P_1(l-x) \Rightarrow P_1 = \frac{Pl}{l-x};$$

У такому разі

$$F_x = PlS \left(\frac{1}{l-x} - \frac{1}{l+x} \right) = -PlS \frac{2x}{l^2 - x^2}.$$

За умовою $x \ll l$, тож величиною x^2 у цьому виразі можна знехтувати, тож

$$F_x = -kx,$$

де

$$k = \frac{2PS}{l}.$$

Отриманий вираз F_x збігається з формулою (1.10). Отже, малі, коливання поршня є гармонічними, тож шуканий період T , згідно із загальною формулою (1.13), дорівнює

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{2PS}} \approx 1,3 \text{ с}.$$

Задача_13_1

Визначити

період T та амплітуду A коливань пластини масою $M = 1,5$ кг на вертикальній пружині жорсткістю $k = 250$ Н/м після падіння на неї шматка пластиліну масою $m = 0,5$ кг з висоти $h = 20$ см (рис. 7).

Дано:
 $k = 250$ Н/м
 $M = 1,5$ кг
 $h = 20$ см = $0,2$ м
 $m = 0,5$ кг
 $T = ?$ $A = ?$

Розв'язання

Після падіння пластиліну на пластину створюється пружинний маятник (п. 1.3) масою $(M + m)$ і жорсткістю k . Отже, шуканий період коливань T за формулою (1.15) дорівнює

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + M}{k}} = 0,57 \text{ с.} \quad (1)$$

Що до амплітуди A , то її можна визначити двома способами.

Спосіб 1. При зіткненні в точці O з координатою $x = 0$ пластилін пердає пластині деякий імпульс, через що її наступні коливання відбуваються з відповідною швидкістю v_0 й

Коливання пластини з пластиліном відбуваються навколо точки O_1 , на відстані x_0 від початкового положення, що визначається умовою компенсації сумарної ваги тіл і сили, з якою на них діє пружина:

$$(M + m)g = kx_0 \Rightarrow x_0 = \frac{(M + m)g}{k} \quad (2)$$

При цьому коливання відбуваються не зі стану спокою, як зазвичай, а з певною початковою швидкістю v_0 , що визначається законом збереження імпульсу. Тож, зважаючи на непружний характер зіткнення

$$mv = (M + m)v_0,$$

де v – швидкість пластиліну на момент падіння на пластину, котра складає (див. [П], Ф-ла (1.19а)), $v = \sqrt{2gh}$. Отже, початкова швидкість коливань пластини з пластиліном

$$v_0 = \frac{m}{M + m}\sqrt{2gh}. \quad (3)$$

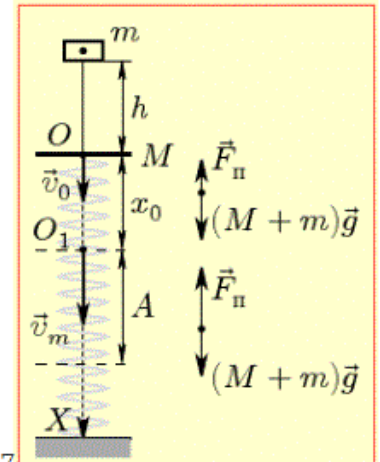


Рис. 7

Відтак при знайдених початкових умовах (x_0, v_0) , із загальних рівнянь гармонічних коливань (1.4) і (1.5) виходить:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \frac{x}{A} = \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v_x = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \frac{v_x}{A\omega} = \cos(\omega t + \varphi_0),$$

Задача_13_2

звідки, враховуючи відому тригонометричну тотожність, отримуємо:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2 \omega^2} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}.$$

Ця рівність виконється при будь-якому положенні коливного тіла, тож поклавши $x = x_0$, отримаємо :

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 T)^2}{4\pi^2}}$$

Відтак, узявши отримане напочатку (вираз (1)) значення T та обрахувавши за виразами (2) і (3) значення x_0 і v_0 , дістанемо:

$$A = 9,2 \text{ см.}$$

Спосіб 2. Амплітуду коливань можна знайти, й спираючися не на співвідношення механіки коливань. А саме.

Стискання пружини відбувається за рахунок енергії пластини з пластиліном. Тому, якщо прийняти потенціальну енергію тіл у найнижчій точці за 0, то на момент зупинки вся їхня енергія перейде в енергію деформації пружини на величину відстані x від початкового до крайнього положення пластини. Отже,

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{(M+m)v_0^2}{2} + (M+m)gx \Rightarrow kx^2 - 2(M+m)gx - (M+m)v_0^2 = 0$$

Корені цього рівняння складають:

$$x_{1,2} = \frac{(M+m)g}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{(M+m)g}{k}\right)^2 + \frac{(M+m)v_0^2}{k}}$$

або, враховуючи вирази (2) і (3),

$$x_{1,2} = x_0 \pm \sqrt{\left(\frac{(M+m)g}{k}\right)^2 + \frac{(M+m)2gh}{k}}.$$

Зрозуміло, що другі доданки в цьому виразі визначають максимальне відхилення пластини з пластиліном від точки рівноваги сил, тобто шукану амплітуду коливань. Отже,

$$A = \sqrt{\left(\frac{(M+m)g}{k}\right)^2 + \frac{(M+m)2gh}{k}}.$$

Обчислення дають

$$A = 9,2 \text{ см,}$$

що, природньо, збігається із отриманим раніше значенням. Варто також відмітити, що перший доданок під радикалом дорівнює x_0^2 . Отже, пластина з пластиліном, незалежно від їхньої маси та жорсткості пружини, повертаючись із найнижчої точки, підніметься вище початкового положення. Це пояснюється тим, що коливання почалися не зі стану спокою, як зазвичай, і з певною початковою кінетичною енергією.

Задача_14

Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання вздовж осі x навколо положення рівноваги $x=0$. Частота коливань $\omega=4$ 1/с. Визначити, в який момент часу після проходження положення рівноваги точка буде мати координату 25 см і швидкість 100 см/с.

Дано:	Розв'язання
$\omega=4$ 1/с	За умовою задачі вигляд рівняння гармонічного коливання буде мати вигляд:
$x=0,25$ см	
$v_x=1$ м/с	$x=A \sin \omega t$ (1)
$t - ?$	Швидкість $v_x=A \omega \cos \omega t$ (2)

Розділивши (1) на (2), одержимо:

$$\frac{x}{v_x} = \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} \Rightarrow \tan \omega t = \frac{x \omega}{v_x}, \quad \tan \omega t = \frac{0,25 \cdot 4}{1} = 1.$$

Тоді $\omega t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4\omega}, \quad t = \frac{3,14}{16} = 0,2$ с.

Задача_15

Показати,

що потенціальна енергія малих коливань математичного маятника масою m і довжиною l визначається формулою $W_n = \frac{kx^2}{2}$, де $k = \frac{mg}{l}$.

Розв'язання

Потенціальна енергія маятника обумовлена дією на нього сили тяжіння і виражається формулою

$$W_n = mgh, \quad (1)$$

де m – маса маятника, h – висота підйому над положенням рівноваги (див. рис.8). З **рис.8** видно, що

$$h = AO - AB = l - l \cos \alpha \Rightarrow h = l(1 - \cos \alpha) = 2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Оскільки маятник здійснює малі коливання ($x \ll l$), то $\alpha \ll 1$ рад. Тому $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$, і вираз (2) набуває вигляду:

$$h = 2l \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 = \frac{l\alpha^2}{2}.$$

Підставивши його у формулу (1) і зробивши заміну $\alpha = x/l$, отримаємо

$$W_n = \frac{mgx^2}{2l} = \frac{kx^2}{2},$$

де $k = \frac{mg}{l}$, що і треба було довести.

Ця задача ілюструє універсальність формули (13.19): вона може бути застосовна до будь-яких гармонічних коливань, а не тільки до коливань під дією сили пружності.

Задача_16

Визначити

період T гармонічних коливань маятника на момент, коли потенціальна енергія коливань складає $n = 80\%$ від повної, а зміщення з положення рівноваги та швидкість мають значення $x = 2\text{ см}$ і $v = 3,1\text{ см/с}$.

Дано:	Розв'язання
$n = 80\%$ $x = 2\text{ см}$ $v = 3,1\text{ см/с}$	Період коливань тіла на пружині визначається формулою: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1)$
$T - ?$	Відношення (m/k) знайдемо через повну енергію коливань:

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = W_n \left(\frac{mv^2}{kx^2} + 1 \right), \quad (2)$$

де $(mv^2/2)$ – кінетична і $(kx^2/2)$ – потенціальна енергія. Відтак із виразу (2) одержимо

$$\frac{m}{k} = \frac{x^2}{v^2} \left(\frac{W}{W_n} - 1 \right).$$

і після підстановку у формулу (1) дістанемо відповідь:

$$T = 2\pi \frac{x}{v} \sqrt{\frac{W}{W_n} - 1} = 2\pi \cdot \frac{2}{3,1} \sqrt{\frac{1}{0,8} - 1} \approx 2\text{ с}.$$

Задача_17

1. Максимальний струм в коливальному контурі дорівнює 5мА. Знайти циклічну частоту власних коливань, якщо при силі струму 3мА заряд на конденсаторі дорівнює 2мКл.

Дано:	Заряд на конденсаторі в коливальному контурі
$I_0 = 5 \text{ мА} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ А}$	обчислюється: (1) $q = q_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$. Сила струму
$I = 3 \text{ мА} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ А}$	обчислюється: (2) $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, де $I_0 = q_0 \omega$,
$q = 2 \text{ мКл} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$	звідки $\omega = \frac{I_0}{q_0}$
$\omega = ?$	

Розв'язуючи рівняння (1) і (2), знайдемо q_0 :

$$\frac{q^2}{q_0^2} = \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{I^2}{I_0^2} = \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{q^2}{q_0^2} + \frac{I^2}{I_0^2} = 1, \text{ звідки } q_0 = \sqrt{\frac{q^2}{1 - \frac{I^2}{I_0^2}}} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ (Кл)}, \text{ Тоді } \omega = \frac{I_0}{q_0} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 2 \text{ (рад/с)}$$

Відповідь: 2рад/с.

Задача_18

Ідеальний коливальний контур із повітряним конденсатором і власною частотою $\nu_1 = 41,405$ кГц розмістили під вакуумним ковпаком і відкачали повітря, через що власна частота контуру змінилася на $\Delta\nu = 13$ Гц. За цими даними

визначити

діелектричну проникність повітря ε .

Дано:	Розв'язання
$\nu_1 = 41,405$ кГц	При відкачуванні з конденсатора контуру видаляється діелектрик (повітря). Через це напруженість поля та напруга на обкладках конденсатора зростають, а ємність зменшується, в ε разів. Отож, відношення початкової C_1 та кінцевої C_2 ємностей дорівнює
$\Delta\nu = 13$ Гц	
$\varepsilon - ?$	
	$\frac{C_1}{C_2} = \varepsilon$

А відповідно до формули (2.7) воно складає

$$\frac{C_1}{C_2} = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1} \right)^2$$

Отже, шукана проникність

$$\varepsilon = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1} \right)^2$$

Відтак, урахувавши, що за умовою $\nu_2 = \nu_1 + \Delta\nu$, отримуємо відповідь:

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{\Delta\nu}{\nu} \right)^2.$$

Обчислення дає

$$\varepsilon = 1,00063.$$

Примітка. Зважаючи на отриману відповідь, умова задачі може здатися не реалістичною, позаяк задана зміна власної частоти контуру ($\Delta\nu/\nu$) складає всього $\approx 0,02\%$. Але існуючі прилади дозволяють робити такі вимірювання з достатньою точністю, так що описаний дослід може входити до лабораторного практикуму у відповідних ВНЗ.

Задача_19

В ідеальному контурі ємністю $C = 1 \text{ мкФ}$ й індуктивністю $L = 100 \text{ мкГн}$ відбуваються вільні коливання з амплітудою заряду конденсатора $q_m = 0,1 \text{ мкКл}$.

Визначити

силу струму i в контурі на момент, коли заряд конденсатора є в $k = 3$ рази менший за q_m .

Дано: $_{-6}$
 $C = 10^{-6} \text{ Ф}$
 $L = 10^{-4} \text{ Гн}$
 $q_m = 10^{-7} \text{ Кл}$
 $k = 3$

$i - ?$

Розв'язання

Задачу можна розв'язати двома способами.

I спосіб. Нехай заряд конденсатора змінюється з часом за законом (2.8):

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

де ω – власна частота контуру й φ_0 – початкова фаза коливань заряду. Тоді за рівнянням (2.11) сила струму в контурі змінюється як

$$i = -q_m \omega \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (2)$$

Тож, визначивши з рівняння (1) фазу на вказаний в умові момент часу і підставивши її в рівняння (2), можна знайти відповідь. Але зручніше скористатися основною тригонометричною тотожністю: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Тоді із записаних рівнянь маємо

$$\sin(\omega t + \varphi_0) = -\frac{i}{q_m \omega}, \quad \cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{q}{q_m}$$

і

$$\left(\frac{i}{q_m \omega}\right)^2 + \left(\frac{q}{q_m}\right)^2 = 1 \Rightarrow i = q_m \omega \sqrt{1 - \left(\frac{q}{q_m}\right)^2}$$

Відтак, урахувавши, що $\frac{q}{q_m} = \frac{1}{k}$ і $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, знайдемо наступну відповідь:

$$i = \frac{q_m}{k} \sqrt{\frac{k^2 - 1}{LC}} = 94 \text{ мА}.$$

II спосіб ґрунтується на законі збереження енергії. А саме.

Через відсутність утрат енергії при вільних коливаннях в ідеальному контурі сумарна енергія електричного W_E і магнітного W_B полів лишається сталою:

$$W = W_E + W_B = \text{const}.$$

Тому при зміні енергії якогось із полів в один бік енергія іншого змінюється на таку саму величину в протилежний. Через це в будь-який момент часу величина W дорівнює максимальній енергії кожного з полів, яка визначається формулами ([III], (1.16), або (1.32а)). Отже, можна записати:

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C} \Rightarrow i = \sqrt{\frac{q_m^2 - q^2}{LC}},$$

де за умовою $q = (q_m/k)$. Отже маємо таку відповідь:

$$i = \frac{q_m}{k} \sqrt{\frac{k^2 - 1}{LC}} = 94 \text{ мА}.$$

Зазначимо, що використання закону збереження енергії, як зазвичай, істотно скоротило розв'язання.

Задача_20

У певний момент часу у вільному коливальному контурі з ємністю $C = 20 \text{ мкФ}$ й індуктивністю $L = 2 \text{ мГн}$ напруга на конденсаторі складає $u = 10 \text{ В}$, а сила струму в котушці $i_1 = 2 \text{ А}$.

Визначити

заряд конденсатора q на момент, коли сила струм у котушці $i_2 = 1 \text{ А}$.

Дано:

$$C = 20 \text{ мкФ} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Ф}$$

$$L = 2 \text{ мГн} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$$

$$u = 10 \text{ В}$$

$$i_1 = 2 \text{ А}$$

$$i_2 = 1 \text{ А}$$

$$q - ?$$

Розв'язання

Для розв'язання задачі скористаємося законом збереження енергії, за яким у будь-який момент часу сумарна енергія електричного та магнітного полів у ідеальному контурі лишається незмінною. Тому для будь-яких двох моментів часу t_1 і t_2 можна записати

$$W_E(t_1) + W_B(t_1) = W_E(t_2) + W_B(t_2) \quad (1)$$

і, враховуючи вирази ([III], (1.32б) і (3.16)),

$$\frac{Cu^2}{2} + \frac{Li_1^2}{2} = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li_2^2}{2} \Rightarrow q = \sqrt{C^2u^2 + LC(Li_1^2 - Li_2^2)}.$$

Обчислення дають:

$$q = 400 \text{ мкКл}.$$

Примітка. Як і в попередній задачі, відповідь можна було би отримати через рівняння коливань в конденсаторі. Але це було би набагато важче.

Задача_21

Індуктивність коливального контуру 500 мкГн. Потрібно настроїти цей контур на частоту 1 МГц. Яку ємність потрібно вгорати?

Розв'язування:

Дано:

$$L = 500 \text{ мкГн} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Гн}$$

$$\nu = 1 \text{ МГц} = 10^6 \text{ Гц}$$

$$C = ?$$

Виходячи з формули Томсона, знайдемо C:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \text{ звідки } \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \text{ звідки}$$

$$C = \frac{1}{\nu^2 4\pi^2 L} = 50 \text{ пФ}$$

Відповідь: 50 пФ.

Задача_22

Миттєві значення енергії електричного і магнітного поля коливального контуру відповідно дорівнюють 4 мкДж і 6 мкДж. Амплітуда сили струму в контурі 120 мА. Чому дорівнює індуктивність котушки в контурі?

Розв'язування:

Дано:

$$W_e = 4 \text{ мкДж} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}$$

$$W_m = 6 \text{ мкДж} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}$$

$$I_0 = 120 \text{ мА} = 120 \cdot 10^{-3} \text{ А}$$

$$L = ?$$

Повна енергія контуру: $W = W_e + W_m$

$$W = 4 \cdot 10^{-6} + 6 \cdot 10^{-6} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

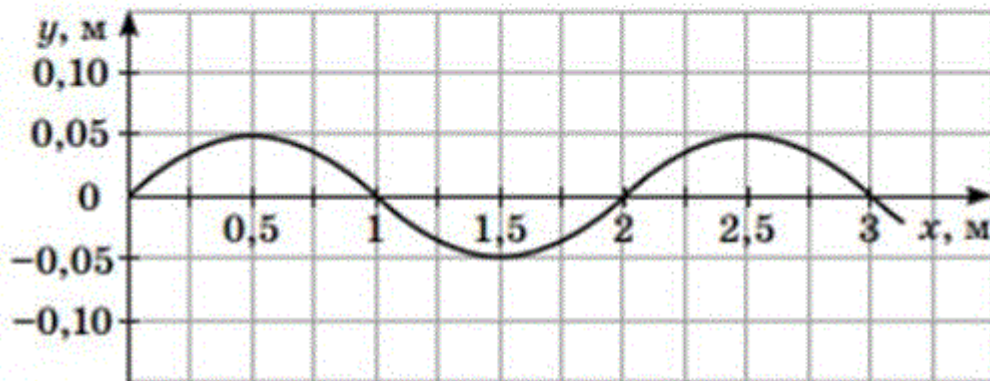
Максимальна енергія контуру дорівнює: $W = \frac{LI_0^2}{2}$, звідки

$$L = \frac{2W}{I_0^2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{120^2 \cdot 10^{-6}} = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 1,4 \text{ мГн.}$$

Відповідь: 1,4 мГн.

Задача_23

По поверхні озера зі швидкістю 0,5 м/с поширюється хвиля, профіль якої має вигляд синусоїди (див. рисунок). Визначте, скільки коливань за хвилину робить поплавок на поверхні озера.



Розв'язання

За формулою хвилі маємо:

$$v = \lambda \nu = \lambda \cdot \frac{N}{t} = \frac{\lambda N}{t} \Rightarrow N = \frac{vt}{\lambda}.$$

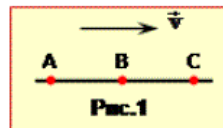
З рисунка бачимо, що довжина хвилі дорівнює 2 м.

Оскільки $t = 1 \text{ хв} = 60 \text{ с}$, то $N = \frac{0,5 \cdot 60}{2} = 15$.

Відповідь: 15 коливань.

Задача_24

Точки А, В та С лежать на лінії поширення плоскої монохроматичної хвилі. Точки В та С віддалені від точки А на відстані $l_1 = 15$ см та $l_2 = 30$ см відповідно. Швидкість поширення хвилі $v = 0,6$ м/с. Коливання в точці А відбуваються за законом $\xi_A = 0,05 \cos(2\pi t)$, м.



Записати:

рівняння коливань в точках В та С.

Дано:

$$\xi_A = 0,05 \cos(2\pi t), \text{ м}$$

$$l_1 = 15 \text{ см} = 0,15 \text{ м}$$

$$l_2 = 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м}$$

$$x_A(t) - ?$$

$$x_B(t) - ?$$

Розв'язання

Коливання в заданій точці хвилі визначаються рівнянням **(15.2)** і співвідношенням **(15.2а)**. Згідно з умовою задачі в точці А початкова фаза $\varphi = 0$, її координату приймемо $x_A = 0$. Тоді, $x_B = l_1$, $x_C = l_2$. Оскільки хвиля поширюється зі швидкістю v , то коливання в точках В та С відстають по фазі від коливань у точці А і згідно з рівнянням (15.2) мають вигляд:

$$x_B = x_m \cos\left(2\pi t - \frac{2\pi l_1}{v}\right);$$

$$x_C = x_m \cos\left(2\pi t - \frac{2\pi l_2}{v}\right).$$

У числовому вигляді:

$$x_B = 0,05 \cdot \cos\left(2\pi t - \frac{2\pi \cdot 0,15}{0,06}\right) = 0,05 \sin(2\pi t);$$

$$x_B = 0,05 \cdot \cos\left(2\pi t - \frac{2\pi \cdot 0,3}{0,06}\right) = -0,05 \cos(2\pi t).$$

Задача_25

Джерело створює плоску звукову хвилю з частотою $\nu = 500$ Гц і амплітудою $\xi_m = 5$ мкм. Коливання в джерелі відбуваються за законом косинуса з нульовою початковою фазою. Для точки, що віддалена від джерела на відстань $l = 170$ м, і моменту часу $t = 1$ с.

визначити:

А) зміщення частинок середовища від положення рівноваги ξ ;

Б) швидкість їх коливального руху u ;

В) прискорення частинок a .

Швидкість звуку прийняти $v = 340$ м/с.

Дано:

$$\nu = 500 \text{ Гц}$$

$$\xi_m = 5 \text{ мкм} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$l = 170 \text{ м}$$

$$v = 340 \text{ м/с}$$

$$t = 1 \text{ с}$$

$$\xi, u, a - ?$$

Розв'язання

А) Згідно з рівнянням (15.1) і формулою (13.2) можна записати:

$$\xi = \xi_m \cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu l}{v}\right) \quad (1)$$

Підставивши числові дані, отримаємо:

$$\xi = 5 \cdot 10^{-6} \cdot \cos\left(1000\pi - \frac{1000\pi \cdot 170}{340}\right) = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 5 \text{ мкм}.$$

Б) Швидкість коливального руху частинок у хвилі – це похідна від зміщення по часу (формула (1.5)):

$u = \xi'(t)$. Взявши похідну від функції (1), дістанемо

$$u = -2\pi\nu\xi_m \cdot \sin\left(2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-5}t - \frac{2\pi\nu l}{v}\right). \quad (2)$$

У числах

$$u = -1000\pi \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot \sin\left(1000\pi \cdot 1 - \frac{1000\pi \cdot 170}{340}\right) = 0.$$

В) Прискорення частинок – це похідна швидкості коливального руху по часу (формула (1.7)): $a = u'(t)$.

Взявши похідну від функції (2), знаходимо:

$$a = -(2\pi\nu)^2 \xi,$$

де, згідно з результатом пункту А), $\xi = 5 \cdot 10^{-6}$ м. Отже

$$a = -(2\pi \cdot 500)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = -49,3 \text{ м/с}^2.$$

Задача_26

У плоскій монохроматичній хвилі частота коливань частинок середовища $\nu = 10$ Гц. Різниця фаз коливань у двох точках, які лежать на лінії поширення хвилі на відстані $\Delta l = 100$ см одна від одної, дорівнює $\Delta\varphi = \pi/4$.

Визначити

швидкість поширення хвилі v .

Дано:

$$\nu = 10 \text{ Гц}$$

$$\Delta l = 100 \text{ см} = 1 \text{ м}$$

$$\Delta\varphi = \pi/4$$

$v - ?$

Розв'язання

Відповідно до формули (15.9) можна записати:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta l, \quad (1)$$

де Δl – задана відстань між точками, λ – довжина хвилі.

Швидкість поширення хвилі v виражається через довжину хвилі на основі формули (15.4а):

$$v = \lambda\nu, \quad (2)$$

Виразивши величину λ з співвідношення (1) і підставивши її у формулу (2), дістанемо

$$v = \frac{2\pi\nu\Delta l}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot 1}{\pi/4} = 80 \text{ м/с}.$$

Задача_27

По озеру рухається катер, хвилі від якого дістаються до берега за час $t = 1$ хв. Відстань між гребнями хвиль $l = 0,5$ м, час між ударами хвиль об берег $\tau = 0,5$ с.

Визначити

відстань L від катера до берега.

Дано:

$$t = 1 \text{ хв} = 60 \text{ с}$$

$$l = 0,5 \text{ м}$$

$$\tau = 0,5 \text{ с}$$

$L - ?$

Розв'язання

Відстань між гребнями хвиль – то є довжина хвилі, час між ударами хвиль об берег дорівнює періоду коливань. Скориставшись зв'язком між довжиною хвилі λ , періодом коливань T та швидкістю поширення хвилі v (формула (15.4)), знайдемо

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{l}{\tau}.$$

Тоді відстань, яку проходить хвиля за час t , становить

$$L = vt = \frac{l}{\tau} t = \frac{0,5}{0,5} \cdot 60 = 60 \text{ м}.$$

тобто катер пливе на відстані 60 м від берега.

Задача_28

Літак рухається горизонтально з надзвуковою швидкістю на висоті $H = 4$ км над землею. Спостерігач чує звук через час $\tau = 10$ с після того, як літак пролетів над ним.

Визначити

швидкість літака u . Швидкість звуку взяти $v = 330$ м/с.

Дано:

$$H = 4 \text{ км} = 4000 \text{ м}$$

$\tau = 10$ с

$$v = 330 \text{ м/с}$$

$$u - ?$$

Розв'язання

Літак у кожній точці свого перебування випромінює сферичну хвилю. Обвідна всіх цих сферичних хвильових поверхонь утворює конус, який являє собою фронт звукової хвилі, що поширюється від літака. На рис.5 показаний перетин деяких з цих сферичних поверхонь з площиною рисунка та слід обвідної O_2C . З рис.5 можна збагнути, що спостерігач (точка C) чує звук, який був випромінений літаком у точці O_1 . В той момент, коли хвиля дійшла до спостерігача, літак вже знаходиться у точці O_2 .

коли хвиля дійшла до спостерігача, літак вже знаходиться у точці O_2 .

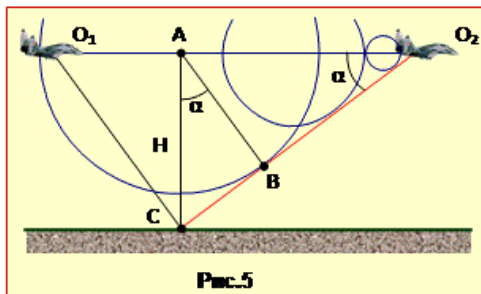


Рис.5

Врахуємо, що обвідна сферичних хвиль O_2C перпендикулярна до радіусів сфер. Отже на рис.5 трикутники $\triangle O_1O_2C$, $\triangle AO_2B$ та $\triangle ACB$ прямокутні та подібні. За умовою задачі літак долає відстань AO_2 за час τ , тому

$$AO_2 = u\tau.$$

За цей же час звукова хвиля, що була випромінена літаком у точці A , доходить до точки B , отже

$$AB = v\tau.$$

З трикутника AO_2B маємо:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{AO_2} = \frac{v}{u}.$$

З трикутника ABC :

$$H = \frac{AB}{\cos \alpha} = \frac{v\tau}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{v\tau}{\sqrt{1 - (v/u)^2}}.$$

Після нескладних перетворень з останнього виразу знаходимо

$$u = \frac{v}{\sqrt{1 - (v\tau/H)^2}} = \frac{330}{\sqrt{1 - (330 \cdot 10/4000)^2}} = 584 \text{ м/с} \approx 2100 \text{ км/год}.$$

Задача_29

Рівняння плоскої електромагнітної хвилі, що поширюється у середовищі з магнітною проникністю $\mu = 1$, має вигляд $E = 10 \sin(2\pi \cdot 10^{14}t - 4,19 \cdot 10^6 x)$. Визначити довжину хвилі та діелектричну проникність середовища.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\varepsilon - ? \quad \lambda - ?$ $\mu = 1,$ $E = 10 \sin(2\pi \cdot 10^{14}t - 4,19 \cdot 10^6 x)$	Рівняння плоскої електромагнітної хвилі у загальному вигляді $E = E_0 \sin(\omega t - kx), \quad (1)$
---	--

де E і E_0 – напруженість та амплітуда напруженості електричного поля; $\omega = 2\pi\nu$ – циклічна частота коливань; ν – частота коливань електромагнітної хвилі; k – хвильове число; t – час; x – координата, в якій розглядається хвиля.

Із порівняння рівняння плоскої електромагнітної хвилі, наведеного у задачі з рівнянням (1), випливає, що

$$k = 4,19 \cdot 10^6 \text{ (м}^{-1}\text{)} \quad \text{і} \quad \omega = 2\pi \cdot 10^{14} \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Хвильове число пов'язане з довжиною хвилі співвідношенням $k = 2\pi/\lambda$, звідки

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (2)$$

Підставимо числові значення фізичних величин у вираз (2) та визначимо довжину хвилі:

$$\lambda = \frac{2\pi}{4,19 \cdot 10^6} = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ (м)} = 1,5 \text{ (мкм)}.$$

Фазова швидкість і циклічна частота електромагнітної хвилі визначаються як

$$\nu = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad \text{і} \quad \omega = 2\pi\nu = 2\pi\nu/\lambda. \quad (3)$$

Виконаємо перетворення виразів (3) та одержимо

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi c}{\lambda\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \Rightarrow \sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{kc}{\omega} \Rightarrow \\ \varepsilon &= \frac{k^2 c^2}{\omega^2 \mu}. \end{aligned} \quad (4)$$

Підставимо числові значення фізичних величин у вираз (4) та визначимо діелектричну проникність середовища:

$$\varepsilon = \frac{4,19^2 \cdot 10^{12} \cdot 3^2 \cdot 10^{16}}{4\pi^2 \cdot 10^{28}} = 4.$$

Відповідь: $\lambda = 1,5 \text{ мкм}$; $\varepsilon = 4$.

Задача_30

Визначити довжину l відрізка, на якому укладається стільки ж довжин хвиль світла у вакуумі, скільки їх укладається на відрізку довжиною $l_1 = 3$ мм у гліцерині.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$l = ?$

$$l_1 = 3 \text{ мм} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$n = 1,47$$

Відомо, що за час одного періоду коливань хвиля поширюється на відстань, яка дорівнює її довжині. Тому для випадку поширення світла у воді можна записати

$$\lambda = vT = \frac{c}{n}T = \frac{\lambda_0}{n}, \quad (1)$$

де λ – довжина хвилі у вакуумі; λ_1 – у середовищі; v – швидкість світла у воді; n – показник заломлення середовища.

Відповідно до умови задачі маємо, що на відрізках l і l_1 укладається однакова кількість довжин хвиль:

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{l_1}{\lambda_1}. \quad (2)$$

Підставимо співвідношення (1) у (2), тоді одержуємо $l = l_1 n$.

Підставимо значення фізичних величин в одержане співвідношення:

$$l = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 1,47 = 4,41 \cdot 10^{-3} (\text{м}).$$

Відповідь: $l = 4,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

Задача_31_1

Тепловоз подає звуковий сигнал з частотою $\nu_0 = 400$ Гц. Пасажир, який стоїть на платформі сприймає частоту сигналу $\nu = 380$ Гц.

Визначити:

швидкість V та напрям руху тепловоза. Швидкість звуку в повітрі прийняти $v = 340$ м/с.

Дано:

$$\nu_0 = 400 \text{ Гц}$$

$$\nu = 380 \text{ Гц}$$

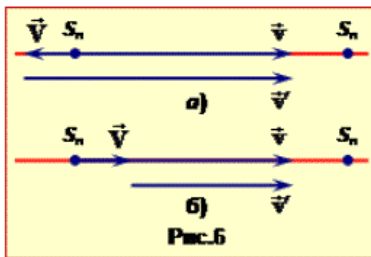
$$v = 340 \text{ м/с}$$

$$V - ?$$

Розв'язання

Пристаючи до розв'язання цієї і подібних задач, слід чітко усвідомити таке. В загальній теорії рівняння хвилі ((15.1), (15.5), (15.7)), а також її параметри (період T , частоти ν та ω , швидкість v , довжина хвилі λ) визначені для випадку, коли джерело і спостерігач нерухомі відносно середовища, в якому поширюється хвиля. В такому

разі частота (або період) хвилі дорівнює частоті коливань в джерелі. При цьому швидкість поширення хвилі (швидкість поширення коливань відносно середовища, яку можна знайти у довідкових таблицях) залежить тільки від властивостей середовища.



Але якщо джерело або спостерігач (чи обоє) рухаються відносно середовища, характеристики хвилі змінюються. Цим і пояснюється те, що для пасажирів на платформі (точка S_p на рис.6) частота звуку ν відрізняється від частоти джерела ν_0 , розміщеного на рухомому тепловозі.

Згідно з формулою (15.4а) пасажир (спостерігач) зафіксує частоту сигналу

$$\nu = \frac{v}{\lambda}, \quad (1)$$

де λ – довжина звукової хвилі, створюваної рухомих тепловозом. Довжина хвилі – це відстань між сусідніми "гребенями" хвилі (для звукової хвилі такими "гребенями" є точки з максимальним значеннями тиску або концентрації молекул (густини) повітря). Джерело на тепловозі посилає ці гребені з інтервалом часу T_0 , отже

$$\lambda = v'T_0 = \frac{v'}{\nu_0}, \quad (2)$$

де v' – швидкість хвилі відносно тепловоза у напрямку до пасажирів.

Задача_31_2

Швидкість $\vec{v}'$ виражається через швидкість звуку $\vec{v}$ та швидкість тепловоза $\vec{V}$ класичною формулою додавання швидкостей **(1.10)**:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \Rightarrow v' = v \pm V, \quad (3)$$

де знак "+" відноситься до випадку, коли тепловоз віддаляється від пасажирів (**рис.6а**), а знак "-" – коли наближається (**рис.6б**).

Підставивши вираз **(3)** у формулу **(2)**, отримаємо

$$\lambda = \frac{v \pm V}{\nu_0}.$$

Таким чином, у відповідності з формулою **(1)**

$$\nu = \frac{v\nu_0}{v \pm V} = \frac{\nu_0}{1 \pm V/v}.$$

Згідно з умовою $\nu \neq \nu_0$, отже

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + (V/v)}, \quad (4)$$

тобто тепловоз віддаляється від пасажирів.

З формули **(4)** після елементарних викладок отримаємо:

$$V = \left(\frac{\nu_0}{\nu} - 1 \right) v.$$

У числах

$$V = \left(\frac{400}{380} - 1 \right) \cdot (340) = 17,9 \text{ м/с} = 64,4 \text{ км/год.}$$

Примітка. Аналогічно до наведених міркувань і викладок можна отримати формули частоти звуку для випадку, коли рухаються як джерело, так і спостерігач. Вперше такі співвідношення були отримані Доплером. Тому зміна частоти, що сприймається при русі джерела і приймача, називається **ефектом Доплера**. Його прояв ви можете подивитися і почути.

Задача_32

Відстань між гребенями хвиль на морі $l = 5$ м. Коли катер йде в напрямку поширення хвиль, вони б'ють у ніс катера з частотою $n_1 = 2$ удари за секунду. Якщо ж катер рухається назустріч хвилям, то удари в ніс йдуть з частотою $n_2 = 4$ удари за секунду.

Визначити

швидкість поширення хвиль v та швидкість руху катера V .

Дано:

$$l = 5 \text{ м}$$

$$n_1 = 2$$

$$n_2 = 4$$

$$v, V - ?$$

Розв'язання

Відстань між гребенями l – це довжина хвилі, а кількість ударів об корпус дорівнює частоті коливань для рухомого спостерігача, що знаходиться на катері. Отже згідно з формулою **(15.4а)** можна записати:

$$n_1 l = v_1, \quad (1)$$

$$n_2 l = v_2, \quad (2)$$

де v_1, v_2 – швидкості поширення хвиль відносно катера у випадках руху вздовж та проти напрямку поширення хвиль. Згідно з законом додавання швидкостей **(1.9)**

$$v_1 = V - v;$$

$$v_2 = V + v,$$

де V, v – швидкості руху катера та поширення хвиль відносно води.

Підставивши сюди вирази **(1)**, **(2)** для швидкостей і розв'язавши отриману систему, дістанемо відповіді:

$$\left. \begin{array}{l} n_1 l = V - v \\ n_2 l = V + v \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} V = l \frac{n_1 + n_2}{2} = 5 \frac{2 + 4}{2} = 15 \text{ м/с}; \\ v = l \frac{n_2 - n_1}{2} = 5 \frac{4 - 2}{2} = 5 \text{ м/с}. \end{array}$$

Задача_33

Вхідний коливальний контур радіоприймача з плоским повітряним конденсатором налаштований на довжину хвилі $\lambda_1 = 200$ м.

Визначити

довжину хвилі λ_2 , на яку буде налаштований контур, якщо між обкладинками конденсатора розмістити діелектричну пластину з проникністю $\epsilon = 6$, товщина якої в $k = 3$ рази менша ніж відстань між пластинами.

Дано:

$$\lambda_1 = 200 \text{ м}$$

$$\epsilon = 6$$

$$k = 3$$

$$\lambda_2 - ?$$

Розв'язання

Резонанс у контурі настає за умови, що період його власних коливань (формула (14.6)) співпадає з періодом коливань в електромагнітній хвилі. В свою чергу довжина хвилі пов'язана з періодом формулою (15.4). Тому для резонансної довжини хвилі маємо

$$\lambda = vT = v2\pi\sqrt{LC}, \quad (1)$$

де v – швидкість поширення хвилі (Для позначення швидкості електромагнітної хвилі використана літера v замість загальноприйнятої літери c , щоб не сплутати її з ємністю конденсатора).

Якщо позначити ємність конденсатора без діелектрика C_1 , з діелектриком – C_2 , то

$$\lambda_1 = 2\pi v\sqrt{LC_1},$$

$$\lambda_2 = 2\pi v\sqrt{LC_2},$$

звідки

$$\lambda_2 = \lambda_1 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}.$$

Ємність конденсатора з двома шарами діелектрика, які мають товщину d_1 та d_2 і діелектричні проникненості ϵ_1 та ϵ_2 , була визначена в задачі 10.17. З урахуванням того, що в даній задачі $\epsilon_1 = 1$ (повітря) та $\epsilon_2 = \epsilon$ ємність C_2 , визначається формулою

$$C_2 = C_1 \frac{\epsilon k}{\epsilon(k-1) + 1}.$$

Підставивши цей вираз у формулу (1), знайдемо

$$\lambda_2 = \lambda_1 \sqrt{\frac{\epsilon k}{\epsilon(k-1) + 1}} = 200 \cdot \frac{6 \cdot 3}{6 \cdot (3-1) + 1} = 235,3 \text{ м.}$$

Задача_34

Частота електромагнітної хвилі $\nu = 1$ МГц.

Визначити

довжину електромагнітної хвилі:

А) λ_0 у вакуумі;

Б) λ у немагнітному ($\mu = 1$) діелектричному середовищі з діелектричною проникністю $\varepsilon = 2,25$.

Дано:
 $\nu = 1$ МГц = 10^6 Гц
 $\varepsilon = 2,25$
 $\mu = 1$

λ_0 - ?
 λ - ?

Розв'язання

Відповідно до формули **(15.4а)** довжина електромагнітної хвилі

$$\lambda = \frac{v}{\nu},$$

де ν – частота, а v – швидкість поширення хвилі.

Швидкість поширення електромагнітних хвиль визначається загальною формулою **(15.10)**, а з урахуванням умови $\mu = 1$ – формулою **(15.10а)**:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}},$$

де $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі (швидкість світла).

Підставляючи вираз швидкості v з формули довжини хвилі, одержимо:

$$\lambda = \frac{c}{\nu \sqrt{\varepsilon}}.$$

Для вакууму формально $\varepsilon = 1$, тому

$$\lambda_0 = \frac{3 \cdot 10^8}{10^6} = 300 \text{ м.}$$

Для діелектричного середовища

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10^6 \cdot \sqrt{2,25}} = 200 \text{ м.}$$

Задача_35

На відстані $l = 30$ км від радіолокатора знаходиться літак.

Визначити

максимальне число імпульсів n , що може випромінювати локатор за $\tau = 1$ с для спостереження за літаком.

Дано:

$$l = 30 \text{ км} = 3 \cdot 10^4 \text{ м}$$

$$\tau = 1 \text{ с}$$

$n - ?$

Розв'язання

Кожен імпульс радіохвиль, випромінюваний антеною локатора, досягає літака і, відбивши від нього, повертається до локатора. Кожен наступний імпульс може бути випромінений антеною тільки після повернення попереднього, інакше антена може вийти з ладу. Таким чином, мінімальний час між послідовним випромінюванням двох імпульсів повинний бути не меншим, ніж час проходження електромагнітних хвиль від антени до літака і назад. З огляду на те, що швидкість поширення електромагнітних хвиль $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, визначаємо час проходження імпульсу радіохвиль

$$\tau = \frac{2l}{c}.$$

При цьому період випромінювання

$$T \geq \tau \Rightarrow T \geq \frac{2l}{c}.$$

Кількість імпульсів, випромінюваних за одиницю часу, – це частота, що зв'язана з періодом співвідношенням $n = 1/T$, тоді

$$n \leq \frac{c}{2l}.$$

Максимальному числу імпульсів відповідає знак рівності, отже

$$n = \frac{c}{2l} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 3 \cdot 10^4} = 5000.$$